

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1967

АННОТАЦИИ

Турбулентная среда, в частности атмосфера, представляет собой оптически неоднородную среду, в которой показатель преломления испытывает беспорядочные флуктуации. При распространении электромагнитных и звуковых волн через неоднородную среду имеют место такие эффекты, как рассеяние волн, возникновение флуктуаций амплитуды, направления распространения и других параметров волны. Многие из этих эффектов оказываются существенными для ряда практических задач, связанных с распространением ультракоротких радиоволн и света через атмосферу.

Книга посвящена изложению теории распространения волн в среде со случайными неоднородностями показателя преломления, а также анализу экспериментальных данных по распространению радиоволн, света и звука в атмосфере. Она предназначена для радиофизиков, занимающихся проблемой распространения радиоволн и света, и для геофизиков, занимающихся физикой атмосферы. Книга может оказаться полезной и для физиков-теоретиков, интересующихся приложениями методов квантовой теории поля к задачам классической физики.

Валерьян Ильич Татарский
Распространение волн в турбулентной атмосфере

М., 1967 г., 548 стр. с илл.

Редакторы *В. В. Шмидт, Л. И. Гладнева*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректор *С. И. Емельянова*

Сдано в набор 7/X 1966 г.
Физ. печ. л. 34,25.
Тираж 3250 экз.

Подписано к печати 6/III 1967 г.
Устойч. печ. л. 34,25.
Т 01809. Цена книги 2 р. 13 к.

Бумага 60×90 16.
Уч.-изд. л. 30,63.
Заказ 1587.

Издательство «Наука»
Главная редакция физико-математической литературы.
Москва, В 71, Ленинский проспект, 15

2-я типография Издательства «Наука». Москва, Г-99, Шубинский пер. 10

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	6
Глава 1. Предварительные сведения по теории турбулентности	9
<i>А. Случайные поля</i>	
§ 1. Случайные функции	9
§ 2. Стационарные случайные функции	13
§ 3. Случайные функции со стационарными приращениями	25
§ 4. Однородные и изотропные случайные поля	36
§ 5. Локально однородные и изотропные случайные поля	40
§ 6. Пространственно-временные случайные поля	50
§ 7. Локально однородные поля с плавно меняющимися средними характеристиками	53
§ 8. Векторные случайные поля	56
<i>Б. Микроструктура турбулентного потока</i>	
§ 9. Структурные и спектральные функции поля скоростей в турбулентном потоке	67
§ 10. Диссипация энергии в турбулентном потоке	69
§ 11. Уравнение Колмогорова	71
§ 12. Структура мелкомасштабной турбулентности при очень больших числах Рейнольдса	73
§ 13. Микроструктура температурного поля в турбулентном потоке	84
§ 14. Связь характеристик микроструктуры полей скорости и температуры с характеристиками усредненных полей	94
§ 15. Микроструктура коэффициента преломления в турбулентном потоке	103
§ 16. Турбулентность в приземном слое атмосферы	106
§ 17. Влияние сил плавучести на микроструктуру полей скорости и температуры	114
<i>В., Экспериментальные данные о турбулентности атмосферы</i>	
§ 18. Измерения пространственных структурных функций скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы	117
§ 19. Аппаратура для измерений турбулентных флуктуаций скорости ветра и температуры в атмосфере	119
§ 20. Связь временной и пространственной структур турбулентности (гипотеза «замороженности»)	121
§ 21. Измерения спектра поля скоростей в инерционном и вязком интервалах	124
§ 22. Микроструктура полей скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы	130
§ 23. Структура турбулентности в нижней тропосфере	132

Глава 2. Рассеяние электромагнитных и звуковых волн в турбулентной атмосфере	139
<i>А. Рассеяние электромагнитных волн</i>	
§ 24. Уравнения распространения волн	140
§ 25. Рассеянное поле	143
§ 26. Средняя интенсивность рассеяния	145
§ 27. Качественная интерпретация рассеяния	152
§ 28. Эффективный рассеивающий объем	157
§ 29. Частотный спектр рассеянного поля	162
§ 30. Рассеяние импульса	177
§ 31. Корреляционные функции рассеянного поля	182
§ 32. Законы распределения вероятностей рассеянного поля	189
§ 33. Распространение ультракоротких радиоволн в тропосфере	193
<i>Б. Рассеяние звука в турбулентной атмосфере</i>	
§ 34. Вывод уравнений распространения звука в турбулентной атмосфере	198
§ 35. Эффективный поперечник рассеяния	202
§ 36. Эксперименты по рассеянию звука в турбулентной атмосфере	208
Глава 3. Распространение коротких электромагнитных и звуковых волн в турбулентной атмосфере в пределах прямой видимости	
<i>А. Геометрическая оптика</i>	
§ 37. Учет многократного рассеяния при распространении коротких волн в неоднородной среде	213
§ 38. Вывод уравнений геометрической оптики	222
§ 39. Решение уравнений геометрической оптики методом возмущений	227
§ 40. Флуктуации фазы, угла прихода и амплитуды плоской волны	232
§ 41. Флуктуации параметров сферической волны	248
§ 42. Флуктуации амплитуды и фазы волны, распространяющейся в локально изотропной турбулентной среде	260
§ 43. Границы применимости первого приближения геометрической оптики	268
§ 44. Флуктуации параметров звуковой волны	276
<i>Б. Метод плавных возмущений</i>	
§ 45. Вывод основных уравнений метода плавных возмущений	280
§ 46. Флуктуации амплитуды и фазы плоской волны	290
§ 47. Структурные функции амплитуды и фазы в локально изотропном турбулентном потоке	298
§ 48. Флуктуации фазы и амплитуды в локально однородной турбулентной среде с плавно меняющимися средними характеристиками	311
§ 49. Флуктуации амплитуды сферической волны	318
§ 50. Границы применимости первого приближения метода плавных возмущений	326
§ 51. Сильные флуктуации амплитуды и фазы плоской монохроматической волны	333

Глава 4. Экспериментальные данные о распространении света, радиоволн и звука в турбулентной атмосфере и их интерпретация	355
<i>А. Некоторые приложения теории распространения волн в турбулентной среде к задачам атмосферной оптики, акустики и радиометеорологии</i>	
§ 52. Частотные спектры флуктуаций амплитуды и фазы волны	355
§ 53. Влияние усредняющего действия апертуры приемного устройства на величину амплитудных флуктуаций . .	370
§ 54. Мерцание источников с конечными угловыми размерами	378
§ 55. «Дрожание» изображений в фокальной плоскости телескопа.	385
<i>Б. Экспериментальные данные по распространению света, звука и радиоволн в тропосфере</i>	
§ 56. Распространение света в приземном слое атмосферы . .	393
§ 57. Распространение звука в приземном слое атмосферы . .	412
§ 58. Флуктуации диэлектрической проницаемости тропосферы и распространение ультракоротких радиоволн . . .	426
§ 59. Мерцание и «дрожание» изображений звезд в телескопах	434
Глава 5. Исследование распространения волн в среде со случайными неоднородностями методами квантовой теории поля	449
<i>А. Распространение волн в среде с сильными флуктуациями</i>	
§ 60. Анализ рядов теории возмущений	450
§ 61. Уравнения в вариационных производных для средней функции Грина и корреляционной функции. Вершинная функция	465
§ 62. Распространение волн в среде с мелкомасштабными флуктуациями	480
§ 63. Корреляционная функция для случая мелкомасштабных неоднородностей	488
§ 64. Некоторые заключительные замечания	497
<i>Б. Сильные флуктуации амплитуды плоской волны, распространяющейся в слабо неоднородной турбулентной среде в приближении геометрической оптики</i>	
§ 65. Приближение малых углов	498
§ 66. Вычисление среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды.	504
Приложения:	
I. Вариационные производные	520
II. Некоторые часто употребляемые формулы	529
Литература	540

В современной теории распространения электромагнитных и звуковых волн в атмосфере во многих случаях приходится принимать во внимание турбулентность, вызывающую флуктуации показателя преломления воздуха.

В некоторых случаях турбулентность атмосферы вызывает флуктуации параметров распространяющихся через нее волн (амплитуды, направления распространения, частоты, фазы и т. д.). Эти эффекты являются источниками искажений и ошибок в системах связи, локации, радионавигации, системах управления. Особенно сильны флуктуации параметров световых волн, что приобретает сейчас особое значение в связи с развитием оптических квантовых генераторов.

В других случаях турбулентность выступает как источник неоднородностей, вызывающих рассеяние радиоволн. Это явление играет важную роль при дальнем распространении ультракоротких радиоволн за горизонт, так как рассеянное поле может значительно превосходить поле, обусловленное дифракцией вокруг поверхности Земли. По-видимому, в явлении дальнего тропосферного распространения УКВ рассеяние на турбулентных флуктуациях не является единственной причиной. Тем не менее подробное развитие теории этого явления и сопоставление ее выводов с экспериментальными данными чрезвычайно существенны для выяснения механизма дальнего тропосферного распространения (это замечание относится, конечно, и к другим теориям, выдвигаемым для объяснения дальнего распространения УКВ за горизонт).

Как теоретические, так и экспериментальные исследования влияния турбулентности атмосферы на распространение радиоволн и звука получили большое развитие за последние два десятилетия, что связано как с развитием техники, так и с успехами статистической теории турбулентности, способной количественно объяснить наблюдаемые явления.

В 1958–1959 гг. вышли в свет три монографии по этим вопросам (Д. М. В ы с о к о в с к и й, Некоторые вопросы дальнего тропосферного распространения ультракоротких радиоволн, Изд-во АН СССР, 1958; Л. А. Ч е р н о в, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд-во АН СССР, 1958; В. И. Т а т а р с к и й, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, Изд-во АН СССР, 1959). В настоящее время количество работ по проблеме «волны и турбулентность» продолжает расти как за счет расширения круга рассматриваемых прикладных задач, так и за счет работ, направленных на уточнение принципиальных сторон теории.

В настоящей работе рассматриваются те же вопросы, что и в монографии автора, вышедшей из печати в 1959 г. Однако здесь материал изложен значительно подробнее, чем в первой книге. Кроме того, рассмотрено значительное число новых задач, представляющих практический интерес.

Особое место занимает пятая глава, посвященная методам расчета флуктуаций поля, выходящим за рамки теории возмущений. Здесь находят применение математические методы, развитые в квантовой теории поля, — диаграммная техника и уравнения в вариационных производных. Применение этих методов позволяет в ряде случаев рассматривать эффекты, не поддающиеся расчету при помощи той или иной формы метода возмущений, например, распространение волн в среде с сильными флуктуациями показателя преломления.

Большое внимание было уделено расчету сильных флуктуаций амплитуды волны. В настоящее время теорию этого явления нельзя еще считать завершенной, но здесь уже получены некоторые обнадеживающие результаты, изложенные в конце третьей и пятой глав.

Ряд вопросов, касающихся взаимодействия турбулентности с распространяющимися через атмосферу волнами, не затронут в монографии. К ним в основном относятся такие задачи, где взаимодействие турбулентности осложнено другими факторами: наличием поверхностей раздела, атмосферных волноводов и т. п.

Книга разбита на главы, разделы и параграфы. Нумерация параграфов проводится непрерывно (от § 1 до § 66). Нумерация

формул в каждом параграфе производится независимо, а при ссылках на формулу другого параграфа вслед за номером формулы указывается номер параграфа (например, (6.23) означает формулу (6) из § 23).

В процессе работы над монографией автор пользовался советами А. М. Обухова, А. М. Яглома, А. С. Гурвича. При написании пятой главы большую пользу принесла автору помощь со стороны Д. А. Киржница. Рукопись книги была просмотрена С. М. Рытовым и Е. Л. Фейнбергом, которые высказали много полезных замечаний. Очень большая работа была проделана редактором книги В. В. Шмидтом, который проверил все многочисленные выкладки, содержащиеся в монографии. Всем этим лицам автор приносит свою искреннюю признательность.

В. И. Татарский

ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ
ПО ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

А. СЛУЧАЙНЫЕ ПОЛЯ

Современная теория турбулентности является статистической теорией. Описание турбулентного движения при помощи статистических методов наиболее адекватно сущности этого процесса, поскольку сама турбулентность является следствием неустойчивости движения жидкости (или газа) по отношению к неизбежно возникающим малым флуктуациям. Для описания флуктуационных явлений, возникающих при распространении звуковых и электромагнитных волн через турбулентную среду, также необходимо использовать статистические методы. Математическая сторона этого вопроса получила за последнее время достаточно широкое развитие и изложена в ряде специальных работ А. Я. Хинчина, А. М. Обухова, А. М. Яглома и других авторов (см., например, [1—9]). Однако, нам кажется полезным привести (без строгих доказательств) некоторые необходимые сведения из теории случайных функций и полей.

§ 1. Случайные функции

Такие величины, как скорость ветра, температура, показатель преломления, в каждой точке турбулентной атмосферы испытывают нерегулярные флуктуации. На рис. 1 в качестве примера приведена синхронная запись некоторых метеорологических элементов, полученная при помощи малоинерционной аппаратуры. Мы видим, что значения скорости ветра и температуры испытывают беспорядочные флуктуации, которые различаются по амплитуде и частоте и накладываются друг на друга хаотическим образом. Для описания полей метеоэлементов в турбулентной атмосфере применяется аппарат случайных функций. Понятие случайной функции является обобщением понятия случайной величины. Например, дискретная случайная величина может принимать значения из некоторой совокупности чисел ξ_1, ξ_2, \dots (совокупность возможных реализаций ξ) с различными вероятностями P_1, P_2, \dots . Аналогично этому мы говорим, что функция $f(t)$ является случайной, если она с различными вероятностями может

совпадать с одной из функций некоторой заданной совокупности $f_\alpha(t)$ (совокупность возможных реализаций), где α — совокупность параметров, пробегающих дискретный или непрерывный ряд значений. Для того чтобы реально находить вероятностные характеристики случайной функции, необходимо иметь возможность многократного воспроизведения различных ее реализаций.

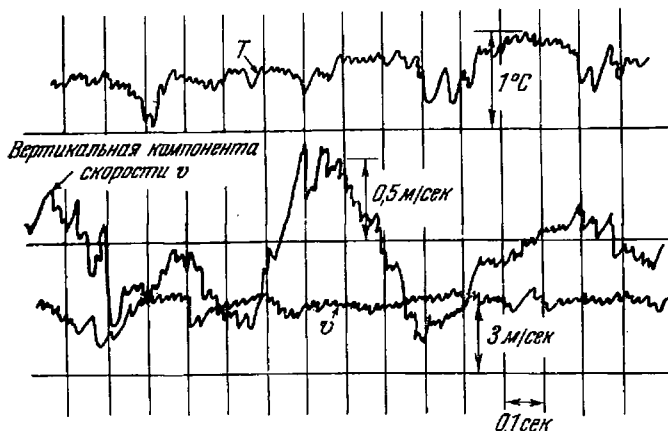


Рис. 1. Образец синхронной записи температуры T , скорости ветра v и вертикальной компоненты скорости ветра в приземном слое атмосферы.

Приведем два примера. 1) Пусть $f_x(t) = \exp(-\alpha t^2)$, где α — случайная величина, равномерно распределенная в интервале $(0, 1)$. Каждая из реализаций представляет собой гауссову кривую, резко отличающуюся по своему виду от функций, изображенных на рис. 1. Тем не менее в рассматриваемом примере мы имеем дело со случайной функцией. 2) Пусть совокупность возможных реализаций состоит из единственной функции, например, одной из функций, изображенных на рис. 1. В этом случае при проведении статистических испытаний мы будем получать всегда одну и ту же функцию и придем к выводу, что она, несмотря на свой сложный и «случайный» вид, в действительности является не случайной, а детерминированной.

Приведенные примеры были специально подобраны для иллюстрации того обстоятельства, что о случайном характере функции нельзя, вообще говоря, судить по сложности изображающей ее кривой. Совокупность возможных реализаций случайной функции, рассмотренная в примере 1, отличалась большой простотой,

так что для ее задания было достаточно одного параметра. Значительно чаще приходится сталкиваться с более богатой совокупностью возможных реализаций, для описания которой необходимо иметь очень большое (а обычно бесконечное) число параметров. При этом обычно вероятность получить достаточно гладкую функцию, подобную приведенной в примере 1, оказывается значительно меньшей, чем вероятность получения функции, имеющей сложный вид, подобный кривым на рис. 1. С этим обстоятельством и связано распространенное представление о случайной функции как о функции, имеющей вид, подобный изображенному на рис. 1.

В качестве параметров, определяющих совокупность возможных реализаций случайной функции, можно, например, выбрать коэффициенты разложения этих функций по некоторой ортогональной системе. Однако более распространенным является другой способ описания, к изложению которого мы сейчас переходим.

Пусть $f(t)$ — некоторая случайная функция времени. Ее значения в любой фиксированный момент t_1 могут быть различными в соответствии с ее случайным характером. Таким образом, для каждого момента времени t_1 должна быть задана плотность вероятности $P_{t_1}(f_1)$, определяющая вероятность события $|f(t_1) - f_1| \leq \frac{1}{2} df_1$:

$$\mathcal{P}\left(|f(t_1) - f_1| \leq \frac{1}{2} df_1\right) = P_{t_1}(f_1) df_1^* \quad (1)$$

Зная $P_{t_1}(f_1)$, мы можем находить статистические характеристики функции $f(t)$, относящиеся к моменту времени t_1 , например, среднее значение (операция усреднения будет обозначаться при помощи знака $\langle \rangle$)

$$\langle f(t_1) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_{t_1}(f_1) f_1 df_1 \quad (2)$$

или дисперсию

$$\sigma^2(t_1) = \langle [f(t_1) - \langle f(t_1) \rangle]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} P_{t_1}(f_1) [f_1 - \langle f(t_1) \rangle]^2 df_1 \quad (3)$$

Плотность вероятности $P_{t_1}(f_1)$ зависит, вообще говоря, от выбранного момента времени t_1 ; то же самое относится, разумеется, и к вычисленным при помощи P_{t_1} значениям $\langle f \rangle$, σ^2 и т. д. Изменение распределения вероятности во времени выражает нестационарность процесса и может быть связано, например, с суточным

* Запись $\mathcal{P}(|f(t_1) - f_1| \leq \frac{1}{2} df_1)$ обозначает вероятность того, что выполняется указанное в скобках неравенство.

или годовым ходом метеорологических элементов или с другими причинами.

Функция $P_{t_1}(f_1)$ (которую мы в дальнейшем будем называть одноточечной функцией распределения) позволяет определить лишь такие статистические характеристики, которые относятся к одному моменту времени. Зная $P_{t_1}(f_1)$, мы не можем, например, ответить на вопрос о том, какова вероятность того, что за время τ функция $f(t)$ изменилась на определенную величину, или какова вероятность для производной $f'(t)$ иметь определенное значение. Для того чтобы ответить на эти вопросы, необходимо знать двухточечную функцию распределения $P_{t_1, t_2}(f_1, f_2)$, определенную равенством

$$\mathcal{P}\left(|f(t_1) - f_1| \leq \frac{1}{2} df_1; |f(t_2) - f_2| \leq \frac{1}{2} df_2\right) = P_{t_1, t_2}(f_1, f_2) df_1 df_2 \quad (4)$$

и дающую вероятность того, что одновременно выполняются два условия: при $t = t_1$ функция $f(t)$ близка к значению f_1 , а при $t = t_2$ она близка к значению f_2 . Двухточечная функция распределения несет в себе значительно большую информацию относительно случайного процесса $f(t)$, чем функция $P_{t_1}(f_1)$, однако и она описывает $f(t)$ далеко не исчерпывающим образом.

Для полного описания случайного процесса $f(t)$ необходимо для любого наперед заданного числа n знать соответствующую n -точечную функцию распределения

$$\begin{aligned} \mathcal{P}\left(|f(t_1) - f_1| \leq \frac{1}{2} df_1; \dots; |f(t_n) - f_n| \leq \frac{1}{2} df_n\right) = \\ = P_{t_1, \dots, t_n}(f_1, \dots, f_n) df_1 \dots df_n, \quad (5) \end{aligned}$$

зависящую от как угодно выбранных моментов времени t_1, \dots, t_n .

Функции (5) позволяют ответить на вопрос о вероятности той или иной конкретной реализации случайного процесса $f(t)$. Однако в приложениях обычно бывает трудно определить все функции (5). Это оказывается возможным лишь для специальных типов случайных процессов (например, для гауссовских процессов). В связи с этим для описания случайных функций часто используются более простые характеристики, связанные с функцией $P_{t_1, t_2}(f_1, f_2)$.

В дальнейшем мы часто будем сталкиваться с комплексными случайными функциями $f(t) = \varphi(t) + i\psi(t)$. Для того чтобы задать распределение вероятностей комплексной случайной функции $f(t)$, необходимо знать совместные законы распределения вероятностей для пары функций $\{\varphi(t), \psi(t)\}$. Например, одно-

точечный закон распределения $f(t)$ определяется формулой

$$\mathcal{P}\left(|\varphi(t_1) - \varphi_1| \leq \frac{1}{2} d\varphi_1; |\psi(t_1) - \psi_1| \leq \frac{1}{2} d\psi_1\right) = P_{t_1}(\varphi_1, \psi_1) d\varphi_1 d\psi_1.$$

Аналогично строятся и многоточечные законы распределения вероятностей комплексных величин.

В том случае, если мы рассматриваем случайные функции координат, $f(x, y, z) = f(\mathbf{r})$ (обычно их называют случайными полями), законы распределения становятся функциями от \mathbf{r} . Так, вместо (1) и (4) мы будем иметь

$$\mathcal{P}\left(|f(\mathbf{r}_1) - f_1| \leq \frac{1}{2} df_1\right) = P_{\mathbf{r}_1}(f_1) df_1, \quad (6)$$

$$\mathcal{P}\left(|f(\mathbf{r}_1) - f_1| \leq \frac{1}{2} df_1; |f(\mathbf{r}_2) - f_2| \leq \frac{1}{2} df_2\right) = P_{\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2}(f_1, f_2) df_1 df_2. \quad (7)$$

В некоторых случаях мы будем рассматривать случайные функции, зависящие как от координат, так и от времени*): $f = f(\mathbf{r}, t)$; их законы распределения будут, вообще говоря, зависеть от \mathbf{r} , t . Например,

$$\mathcal{P}\left(|f(\mathbf{r}_1, t_1) - f_1| \leq \frac{1}{2} df_1; |f(\mathbf{r}_2, t_2) - f_2| \leq \frac{1}{2} df_2\right) = P_{\mathbf{r}_1, t_1; \mathbf{r}_2, t_2}(f_1, f_2) df_1 df_2. \quad (8)$$

§ 2. Стационарные случайные функции

Случайная функция $f(t)$ называется стационарной, если ее законы распределения (5.1) инвариантны относительно изменения начала отсчета времени:

$$P_{t_1, t_2, \dots, t_n}(f_1, \dots, f_n) = P_{t_1+T, t_2+T, \dots, t_n+T}(f_1, \dots, f_n). \quad (1)$$

Для случая $n = 1$ это означает

$$P_{t_1}(f_1) = P_{t_1+T}(f_1).$$

Положив здесь $T = -t_1$, получим

$$P_{t_1}(f_1) = P_0(f_1), \quad (2)$$

т. е. одноточечная функция распределения стационарного случайного процесса не зависит от времени. Для $n = 2$, полагая

* Слово «случайный» не всегда является вполне удачным, так как, например, «случайное» поле скорости в теории турбулентности удовлетворяет точным соотношениям — уравнениям гидродинамики. Быть может, лучше было бы говорить о «статистически определенных» функциях.

$T = -t_1$, получим

$$P_{t_1, t_2}(f_1, f_2) = P_{t_1+T, t_2+T}(f_1, f_2) = P_{0, t_2-t_1}(f_1, f_2), \quad (3)$$

т. е. двухточечная функция распределения стационарного случайного процесса зависит лишь от расстояния $t_2 - t_1$ между точками t_1 и t_2 *). Из формулы (2) следует, что такие характеристики процесса, как $\langle f(t) \rangle$, $\sigma^2(t)$ и т. д., не зависят от времени:

$$\langle f(t) \rangle = \text{const}, \quad \sigma^2(t) = \text{const}. \quad (4)$$

Важнейшей характеристикой случайной функции является ее корреляционная функция, которую иногда называют также ковариацией:

$$B(t_1, t_2) = \langle [f(t_1) - \langle f(t_1) \rangle] [f^*(t_2) - \langle f^*(t_2) \rangle] \rangle \quad (5)$$

(звездочка означает комплексное сопряжение). Полагая в (5) $t_1 = t_2$, получим

$$B(t, t) = \langle |f(t) - \langle f(t) \rangle|^2 \rangle = \sigma^2(t). \quad (6)$$

Для стационарных процессов $B(t_1 + T, t_2 + T) = B(t_1, t_2)$, откуда следует, что B зависит лишь от $\tau = t_1 - t_2$:

$$B(\tau) = \langle [f(t + \tau) - \langle f \rangle] [f^*(t) - \langle f^* \rangle] \rangle, \quad (7)$$

$$B(0) = \langle |f(t) - \langle f \rangle|^2 \rangle = \sigma^2. \quad (8)$$

Таким образом, значение корреляционной функции в нуле равно среднему квадрату флуктуаций. Если $f(t + \tau)$ и $f(t)$ статистически независимы (что обычно бывает при достаточно большом τ), то среднее значение произведения, входящего в правую часть (7), равно произведению средних значений, каждое из которых равно нулю. Таким образом, $B(\tau)$ характеризует статистическую связь между флуктуациями f в моменты времени $t + \tau$ и t .

Приведем некоторые свойства функции $B(\tau)$. Из (5) следует, что

$$B(t_2, t_1) = B^*(t_1, t_2), \quad (9)$$

а в случае стационарных процессов

$$B(-\tau) = B^*(\tau). \quad (10)$$

* Если условия (1) выполнены лишь при $n = 1, 2$, то функция $f(t)$ называется стационарной в широком смысле (так как при таком определении могут найтись такие функции, для которых условия (2) и (3) выполнены, но условие (1) при $n \geq 3$ не выполняется). Поскольку мы будем иметь дело лишь с двухточечными характеристиками процесса, то не будем различать этих определений.

Если же процесс $f(t)$ действительный, т. е. $f^* = f$, то

$$B(-\tau) = B(\tau) \quad (11)$$

Для стационарного случайного процесса имеет место неравенство

$$|B(\tau)| \leq B(0), \quad (12)$$

из которого следует, что функция $B(\tau)$ имеет максимум при $\tau = 0$.

Действительно, пусть $\langle f \rangle = 0$, тогда при любом комплексном числе λ выполняется неравенство

$$\langle [\lambda f(t_1) - f(t_2)] [\lambda^* f^*(t_1) - f^*(t_2)] \rangle \geq 0,$$

или

$$\lambda \lambda^* \sigma_1^2 - \lambda B(t_1, t_2) - \lambda^* B^*(t_1, t_2) + \sigma_2^2 \geq 0.$$

Положим $\lambda = \alpha B^*(t_1, t_2)$, где $\alpha = \alpha^*$. Тогда последнее неравенство превращается в

$$\alpha^2 \sigma_1^2 |B(t_1, t_2)|^2 - 2\alpha |B(t_1, t_2)|^2 + \sigma_2^2 \geq 0.$$

Но, как известно, условие неотрицательности квадратичного по α трехчлена заключается в неположительности его дискриминанта:

$$|B(t_1, t_2)|^4 - \sigma_1^2 \sigma_2^2 |B(t_1, t_2)|^2 \leq 0.$$

Отсюда следует неравенство

$$|B(t_1, t_2)|^2 \leq \sigma_1^2 \sigma_2^2,$$

которое в случае стационарных процессов приводит к условию (12).

Пусть $f(t)$ — стационарный случайный процесс со средним значением, равным нулю. Рассмотрим выражение

$$A = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-T}^T \varphi(t) f(t) dt,$$

где $\varphi(t)$ — произвольная комплексная функция. Очевидно, что $\langle |A|^2 \rangle \geq 0$, т. е.

$$\begin{aligned} \left\langle \left| \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-T}^T \varphi(t) f(t) dt \right|^2 \right\rangle &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T dt_1 \int_{-T}^T dt_2 \varphi(t_1) \varphi^*(t_2) \langle f(t_1) f^*(t_2) \rangle = \\ &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^T \int_{-T}^T B(t_1 - t_2) \varphi(t_1) \varphi^*(t_2) dt_1 dt_2 \geq 0. \end{aligned} \quad (13)$$

Условие (13) называется условием положительной определенности функции $B(\tau)$. Оно чрезвычайно важно, так как лишь функция $B(\tau)$, удовлетворяющая этому условию, может являться корреляционной. Положим в (13)

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t}.$$

Тогда (13) превращается в неравенство

$$\langle |A|^2 \rangle = \frac{1}{4\pi T} \int_{-T}^T dt_1 \int_{-T}^T dt_2 e^{-i\omega(t_1-t_2)} B(t_1-t_2) \geq 0. \quad (14)$$

Введем новые переменные интегрирования

$$\tau = t_1 - t_2 \quad \text{и} \quad t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2)$$

и произведем интегрирование по t ; в результате после несложных преобразований получаем

$$\langle |A|^2 \rangle = \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{2T} \left(1 - \frac{\tau}{2T}\right) e^{-i\omega\tau} B(\tau) d\tau + \int_{-2T}^0 \left(1 + \frac{\tau}{2T}\right) e^{-i\omega\tau} B(\tau) d\tau \right] \geq 0. \quad (15)$$

Перейдем в (15) к пределу при $T \rightarrow \infty$. В результате этого получаем условие

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} B(\tau) d\tau = W(\omega) \geq 0. \quad (16)$$

Появившаяся здесь функция $W(\omega)$ является преобразованием Фурье корреляционной функции $B(\tau)$. Согласно условию (16) она должна быть действительной и неотрицательной, в противном случае $B(\tau)$ не может являться корреляционной функцией. А. Я. Хинчин [6] доказал и обратное утверждение: если $W(\omega) \geq 0$, то функция

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{+i\omega\tau} W(\omega) d\omega \quad (17)$$

является корреляционной функцией некоторого стационарного случайного процесса. (Формула (17) является обратным преобразованием Фурье по отношению к (16)).

Если случайный процесс $f(t)$ действителен, то $B(\tau) = B(-\tau)$. В этом случае (16) и (17) можно записать также в виде

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau B(\tau) d\tau, \quad (16')$$

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau W(\omega) d\omega. \quad (17')$$

Из формулы (17) можно получить важное равенство, разъясняющее физический смысл функции $W(\omega)$. Полагая в (17) $\tau = 0$, получаем

$$\sigma^2 = \langle [f(t)]^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (18)$$

Пусть $f(t)$ представляет собой флуктуационный ток, протекающий по единичному сопротивлению. Тогда $f^2(t)$ есть мгновенная мощность. Среднее значение этой мощности

$$\langle f^2 \rangle = \sigma^2 = B(0).$$

Из формулы (18) в этом случае можно заключить, что $W(\omega)$ представляет собой мощность, приходящуюся на единицу полосы частот. В связи с этим в радиофизической литературе $W(\omega)$ называют спектром мощности шума.

В случае, когда $f(t)$ является модулем вектора скорости жидкости, $W(\omega)$ пропорциональна спектральной плотности энергии единицы массы жидкости. В литературе по теории турбулентности эту функцию называют спектральной плотностью распределения энергии. Важная роль, которую играет в теории стационарных процессов и ее приложениях корреляционная функция $B(\tau)$, связана также и с тем, что ее преобразование Фурье $W(\omega)$ играет роль спектра мощности (или энергии) процесса.

Подобно тому как корреляционная функция $B(\tau)$ стационарного случайного процесса $f(t)$ может быть представлена в виде интеграла Фурье (17), сама случайная функция $f(t)$ может быть представлена в виде стохастического интеграла Фурье — Стильтеса

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Z(d\omega) \quad (19)$$

(см., например, работу А. М. Яглома [1]). Функция Z является случайной функцией интервала $\Delta\omega$. Поскольку $\langle f(t) \rangle = 0$, $Z(\Delta\omega)$

должна удовлетворять такому же условию $\langle Z(\Delta\omega) \rangle = 0$. Используя (19), напишем выражение для корреляционной функции $B(t_1 - t_2) = \langle f(t_1) f^*(t_2) \rangle$:

$$B(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega t_1 - \omega' t_2)} \langle Z(d\omega) Z^*(d\omega') \rangle. \quad (20)$$

Так как левая часть (20) в случае стационарности процесса $f(t)$ зависит лишь от $t_1 - t_2$, подынтегральное выражение в (20) должно содержать множитель $\delta(\omega - \omega')$, обеспечивающий появление такой комбинации из t_1 и t_2 . Отсюда следует, что

$$\langle Z(d\omega) Z^*(d\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') F(d\omega, d\omega').$$

Используя последнее выражение, получим

$$B(t_1 - t_2) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - t_2)} F(d\omega, d\omega') \delta(\omega - \omega'). \quad (21)$$

Сравнивая это выражение с (17), убеждаемся в том, что должно иметь место равенство

$$F(d\omega, d\omega') = W(\omega) d\omega d\omega'.$$

В этом случае выражение (20) совпадает с формулой (17).

Итак, имеет место формула

$$\langle Z(d\omega) Z^*(d\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') W(\omega) d\omega d\omega'. \quad (22)$$

Из (22) следует некоррелированность спектральных амплитуд $Z(d\omega)$ при несовпадающих значениях частот.

Рассмотрим связь между спектральным разложением стационарного процесса и обычным интегралом Фурье (см., например, [165]). Функция $f(t)$ может быть разложена в интеграл Фурье, если сходится интеграл от $|f(t)|$, взятый в бесконечных пределах, и если $f(t)$ имеет лишь разрывы типа конечных скачков: $|f(t+0) - f(t-0)| < \infty$. Ясно, что стационарная случайная функция не удовлетворяет первому из этих условий и поэтому не может быть непосредственно разложена в интеграл Фурье. Рассмотрим функцию

$$f_T(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } |t| < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{T}{2}, \end{cases}$$

равную нулю вне интервала $(-\frac{T}{2}, \frac{T}{2})$ и совпадающую внутри этого интервала с непрерывной действительной стационарной

случайной функцией $f(t)$, для которой $\langle f(t) \rangle = 0$, $\langle f^2(t) \rangle < \infty$. Функция $f_T(t)$ в отличие от $f(t)$ может быть представлена в виде интеграла Фурье:

$$\left. \begin{aligned} f_T(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} \Phi_T(\omega) d\omega, \\ \Phi_T(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-T/2}^{T/2} e^{-i\omega t} f(t) dt. \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

Рассмотрим средний квадрат модуля $\Phi_T(\omega)$:

$$\begin{aligned} \langle |\Phi_T(\omega)|^2 \rangle &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega(t_2-t_1)} \langle f(t_1) f(t_2) \rangle dt_1 dt_2 = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{-T/2}^{T/2} \int_{-T/2}^{T/2} e^{i\omega(t_2-t_1)} B(t_2 - t_1) dt_1 dt_2. \end{aligned}$$

Вводя вместо t_1 новую переменную интегрирования τ согласно равенству $t_1 = t_2 + \tau$ и выполняя интегрирование по t_2 , получим после простых преобразований

$$\langle |\Phi_T(\omega)|^2 \rangle = \frac{T}{4\pi^2} \int_{-T}^T \cos \omega \tau B(\tau) d\tau = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^T \tau \cos \omega \tau B(\tau) d\tau.$$

Умножив это равенство на $2\pi/T$ и переходя к пределу при $T \rightarrow \infty$, получим, предполагая существование пределов в правой части равенства:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle |\Phi_T(\omega)|^2 \rangle}{T} &= \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau B(\tau) d\tau + \frac{1}{\pi} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tau \cos \omega \tau B(\tau) d\tau. \end{aligned}$$

Если выполняется условие

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \tau |B(\tau)| d\tau = 0 \quad (24)$$

(для его выполнения достаточно, например, чтобы функция $|B(\tau)|$ при $\tau \rightarrow \infty$ убывала быстрее, чем τ^{-1}), то второе слагаемое

обращается в нуль и мы получаем соотношение

$$W(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{2\pi \langle |\Phi_T(\omega)|^2 \rangle}{T}. \quad (25)$$

Из этой формулы ясно, что $\langle |\Phi_T(\omega)|^2 \rangle \sim T$, т. е. сама функция $\Phi_T(\omega)$ имеет порядок \sqrt{T} , так что переходить к пределу при $T \rightarrow \infty$ в формулах (23) нельзя. Поэтому обычную спектральную плотность $\Phi(\omega)$ для стационарной случайной функции $f(t)$ определить невозможно и существует лишь случайная спектральная амплитуда $Z(d\omega)$, удовлетворяющая условию (22). Тем не менее в физической литературе часто вместо разложения (19) используют обычный интеграл Фурье, подчиняя случайные спектральные плотности соотношению

$$\langle \Phi(\omega_1)\Phi^*(\omega_2) \rangle = W(\omega_1)\delta(\omega_1 - \omega_2), \quad (22')$$

и это приводит к правильным результатам. Смысл соотношения (22') можно уяснить на основании разложения (23). Если, используя (23), найти величину $\langle \Phi_T(\omega_1)\Phi_T^*(\omega_2) \rangle$, то при $T \rightarrow \infty$ вместо соотношения (22') мы получим формулу, содержащую не точное выражение для δ -функции, а функцию

$$\delta_T(\omega_1 - \omega_2) = \frac{\sin\left[\frac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)T\right]}{\pi(\omega_1 - \omega_2)}. \quad (26)$$

При $T \rightarrow \infty$ получим $\delta_T(\omega) \rightarrow \delta(\omega)$ (так как $\delta_T(0) = \frac{T}{2\pi} \rightarrow \infty$ и $\int_{-\infty}^{\infty} \delta_T(\omega) d\omega = 1$). При $\omega_1 = \omega_2$ в этом случае снова получается формула (25). Таким образом, формулу (22') следует понимать как предельное соотношение, получающееся из разложения (23) при $T \rightarrow \infty$.

Поскольку, однако, использование математически обоснованной формулы (19) не создает каких-либо дополнительных затруднений по сравнению с обычной формой интеграла Фурье, мы будем пользоваться формулой (19).

Приведем несколько примеров корреляционных функций и их спектральных плотностей.

1. В приложениях часто используется корреляционная функция

$$B(\tau) = a^2 \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right). \quad (27)$$

Соответствующая ей спектральная плотность $W(\omega)$ легко вычисляется:

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} a^2 e^{-\frac{|\tau|}{\tau_0}} d\tau = \frac{a^2 \tau_0}{\pi(1 + \omega^2 \tau_0^2)}. \quad (28)$$

Мы видим, что $W(\omega) > 0$, поэтому функция (27) действительно может являться корреляционной функцией стационарного случайного процесса.

2. Легко проверить, что если

$$B(\tau) = a^2 \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right), \quad (29)$$

то

$$W(\omega) = \frac{a^2 \tau_0}{2\sqrt{\pi}} \exp\left(-\frac{\omega^2 \tau_0^2}{4}\right) > 0. \quad (30)$$

3. Спектральной плотности

$$W(\omega) = A \frac{a^2 \tau_0}{(1 + \omega^2 \tau_0^2)^{\nu + \frac{1}{2}}} > 0, \quad \text{где } A = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)}, \quad (31)$$

соответствует корреляционная функция

$$B(\tau) = a^2 \frac{1}{2^{\nu-1} \Gamma(\nu)} \cdot \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \quad [B(0) = a^2], \quad (32)$$

где $K_{\nu}(x)$ — функция Бесселя второго рода от мнимого аргумента (функция Макдональда). Корреляционная функция типа (32) была предложена Карманом для аппроксимации корреляционных функций, возникающих в теории турбулентности. Корреляционные функции и соответствующие им спектральные плотности примеров 1, 2, 3 приведены на рис. 2 и 3.

Установим одно полезное соотношение между масштабами корреляционной и спектральной функций, которым мы часто будем пользоваться в дальнейшем. Характерным масштабом корреляционной функции $B(\tau)$ является так называемый интегральный масштаб τ_0 :

$$\tau_0 = \frac{1}{B(0)} \int_{-\infty}^{\infty} B(\tau) d\tau. \quad (33)$$

(Если построить прямоугольник с высотой $B(0)$ и основанием τ_0 , то его площадь будет равна площади, заключенной между корреляционной функцией и осью τ .)

Аналогичным образом вводится интегральный масштаб спектральной плотности $W(\omega)$, который мы обозначим через ω_0 :

$$\omega_0 = \frac{1}{W(0)} \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) d\omega. \quad (34)$$

(Это определение эффективно лишь в том случае, если $W(\omega) \ll \ll W(0)$.)

Используя формулы (16) и (17), получим

$$\tau_0 = \frac{1}{B(0)} 2\pi W(0), \quad \omega_0 = \frac{1}{W(0)} B(0),$$

откуда получаем соотношение

$$\omega_0 \tau_0 = 2\pi, \quad (35)$$

связывающее «ширину» спектра ω_0 с масштабом корреляции τ_0 .

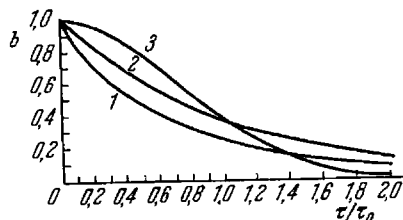


Рис. 2. Примеры нормированных корреляционных функций:

$$1 - b(\tau) = \exp\left(-\frac{|\tau|}{\tau_0}\right); \quad 2 - b(\tau) = 2^{-2/3} \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)\right]^{-1} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/3} K_{1/3}\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right);$$

$$3 - b(\tau) = \exp\left(-\frac{\tau^2}{\tau_0^2}\right).$$

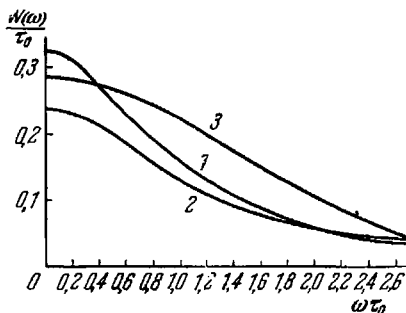


Рис. 3. Спектральные плотности $W(\omega)$, соответствующие корреляционным функциям, изображенным на рис. 2 (номера возле соответствующих кривых рис. 2 и 3 совпадают).

Заместим, что величины τ_0 и ω_0 , определяемые формулами (33) и (34), могут в некоторых случаях и не существовать (если соответствующий интеграл расходится). Однако если в этих случаях определить масштабы τ_0 и ω_0 каким-либо иным способом [например, определить τ_0 как точку, в которой $B(\tau_0) = 0,5 B(0)$], то соотношение типа (35) снова будет выполняться, но в нем может появиться численный коэффициент порядка единицы.

В заключение рассмотрим важный вопрос о практическом построении статистических характеристик случайного процесса. На практике мы обычно не располагаем достаточно обширной совокупностью реализаций случайного процесса, полученных при тождественных внешних условиях. Это не позволяет эффективно выполнить усреднение по ансамблю, и при построении статистических характеристик мы вынуждены производить усреднение по времени в пределах одной реализации случайного процесса.

Пусть $u(t)$ — величина, для которой мы хотим получить среднее значение путем усреднения по времени. Под u мы можем подразумевать как саму случайную функцию $f(t)$, так и ее квадрат, произведение $f(t)f(t+\tau)$ при фиксированном сдвиге τ и т. д. Будем предполагать, что $u(t)$ — стационарный случайный процесс, причем известна его корреляционная функция

$$B_u(t_1 - t_2) = \langle [u(t_1) - \langle u \rangle] [u(t_2) - \langle u \rangle] \rangle$$

(мы рассматриваем лишь действительные функции $u(t)$).

Введем в рассмотрение среднее по времени за интервал T значение случайной функции u :

$$\bar{u}(t) \equiv \frac{1}{T} \int_0^T u(t - \tau) d\tau.$$

Эта величина, так же как и u , является случайной. При повторном определении \bar{u} по различным участкам кривой $u(t)$ мы будем получать несколько различные значения. Вычислим средний квадрат разности между средним по времени \bar{u} и средним по ансамблю $\langle u \rangle$:

$$\sigma_u^2 \equiv \langle [\bar{u}(t) - \langle u \rangle]^2 \rangle.$$

Подставляя сюда выражение для \bar{u} , легко получим

$$\sigma_u^2 = \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T B_u(t_1 - t_2) dt_1 dt_2 = \frac{2}{T^2} \int_0^T dt \int_0^t B_u(\tau) d\tau.$$

Докажем теперь, что при выполнении условия

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T B_u(\tau) d\tau = 0 \quad (36)$$

будет выполняться соотношение

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \sigma_u^2 = 0 \quad (37)$$

(см., например, [2]). Действительно, из (36) следует, что для любого $\frac{\delta}{2} > 0$ найдется такое T_0 , при котором

$$\left| \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| < \frac{\delta t}{2} \text{ при } t > T_0.$$

С другой стороны, для любого t имеет место неравенство

$$\left| \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| < B_u(0) t,$$

так как $B_u(0) \geq B_u(t)$. Таким образом,

$$\left| \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| < \begin{cases} B_u(0) t & \text{при } t < T_0, \\ \frac{\delta}{2} t & \text{при } t > T_0. \end{cases}$$

Интегрируя это неравенство в пределах $(0, T)$, где $T > T_0$, получим

$$\left| \int_0^T dt \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| \leq \frac{B_u(0) T_0^2}{2} + \frac{\delta}{4} (T^2 - T_0^2).$$

Если $T > T_0 \sqrt{\frac{2B_u(0)}{\delta}}$, то первое слагаемое в правой части не превышает второго, а их сумма не больше $\delta T^2/2$; отсюда следует неравенство

$$\left| \int_0^T dt \int_0^t B_u(\tau) d\tau \right| \leq \frac{\delta}{2} T^2,$$

из которого немедленно вытекает (37). Таким образом, условие (36) обеспечивает возможность замены статистических средних на средние по времени.

Если существует интеграл

$$\tau_u = \frac{1}{B_u(0)} \int_0^\infty B_u(\tau) d\tau < \infty,$$

условие (36) всегда выполняется. В этом случае можно дать простую оценку дисперсии отклонения среднего по времени от среднего по ансамблю. Производя в выражении для σ_u^2 замену поряд-

ка интегрирования по переменным t и τ и выполняя интегрирование по t , получим

$$\sigma_u^2 = \frac{2}{T} \int_0^T \left(1 - \frac{\tau}{T}\right) B_u(\tau) d\tau.$$

В случае, если $T \gg \tau_u$, вторым слагаемым в скобках можно пренебречь по сравнению с единицей, а интеграл от первого слагаемого выразить через τ_u . В результате получаем приближенную формулу

$$\sigma_u^2 \approx \frac{2B_u(0)\tau_u}{T}, \quad (38)$$

которой удобно пользоваться для выбора необходимого интервала усреднения, исходя из заданной точности. Формула (38) была получена Тейлором при построении теории турбулентной диффузии.

§ 3. Случайные функции со стационарными приращениями

Реальные флуктуационные процессы очень часто могут с достаточной степенью точности описываться при помощи стационарных случайных функций. К таким процессам относится, например, флуктуационное напряжение, которое возникает на сопротивлении, находящемся в состоянии термодинамического равновесия с окружающей средой. Однако можно указать и на противоположные случаи, когда флуктуационные процессы не являются стационарными. В качестве примера можно указать на интеграл от стационарного процесса.

При рассмотрении нестационарных процессов необходимо иметь возможность воспроизведения внешних условий, при которых этот процесс протекает. Действительно, в этом случае единственная возможность нахождения статистических характеристик процесса заключается в усреднении по большому числу реализаций, получаемых в одинаковых условиях.

Кроме того, в случае нестационарных процессов необходимо иметь естественное начало отсчета времени при рассмотрении каждой из реализаций; в противном случае при нахождении статистических характеристик произойдет усреднение по времени и процесс невозможно будет отличить от стационарного.

Для устранения указанной трудности в теории турбулентности для описания более общих, чем стационарные, случайных функций вместо корреляционных функций (5.2) используют так называемые структурные функции, введенные впервые в работах А. Н. Колмогорова [10, 11]. Идея, лежащая в основе этого метода,

заключается в следующем. В случае, когда $f(t)$ представляет собой нестационарную случайную функцию, т. е. когда $\langle f(t) \rangle$ меняется с течением времени, можно вместо $f(t)$ рассматривать разность

$$F_T(t) = f(t + T) - f(t)$$

при некотором фиксированном значении T . При не слишком большом T низкочастотная компонента функции $f(t)$ не повлияет на значение этой разности и она может оказаться (хотя бы приближенно) стационарной функцией времени. В случае, когда $F_T(t)$ есть случайная стационарная функция t , функцию $f(t)$ называют случайной функцией со стационарными первыми приращениями, или просто случайной функцией со стационарными приращениями.

В качестве примера рассмотрим функцию следующего вида:

$$f(t) = at + \xi(t), \quad (1)$$

где a — действительная случайная величина, а $\xi(t)$ — стационарный случайный процесс, причем $\langle a\xi(t) \rangle = 0$. Очевидно, что если $\langle \xi \rangle = 0$, то

$$\langle f(t) \rangle = \langle a \rangle t. \quad (2)$$

Легко получить также формулу

$$B(t, t + \tau) = \langle [f(t) - \langle f(t) \rangle] [f^*(t + \tau) - \langle f^*(t + \tau) \rangle] \rangle = \\ = \sigma_a^2 t(t + \tau) + B_\xi(\tau), \quad (3)$$

где

$$\sigma_a^2 = \langle a^2 \rangle - \langle a \rangle^2 \quad \text{и} \quad B_\xi(\tau) = \langle \xi(t) \xi^*(t + \tau) \rangle.$$

Таким образом, процесс $f(t)$ не является стационарным, так как его среднее значение и корреляционная функция явно зависят от времени t .

Рассмотрим теперь

$$F_T(t) = aT + \xi(t + T) - \xi(t). \quad (4)$$

Очевидно, что

$$\langle F_T(t) \rangle = \langle a \rangle T = \text{const.}$$

Вычисляя $B_F(t, t + \tau)$, получим после простых выкладок

$$B_F(t, t + \tau) = \langle [F_T(t) - \langle F_T(t) \rangle] [F_T^*(t + \tau) - \langle F_T^*(t + \tau) \rangle] \rangle = \\ = \sigma_a^2 T^2 + 2B_\xi(\tau) - B_\xi(\tau - T) - B_\xi(\tau + T). \quad (5)$$

Таким образом, и среднее значение, и корреляционная функция процесса $F_T(t)$ не зависят от времени t (они, однако, зависят от выбранного постоянного сдвига по времени T).

Если бы мы рассмотрели случайную функцию типа

$$f(t) = at^2 + bt + c + \xi(t),$$

где снова $\xi(t)$ — стационарный процесс и a, b, c — случайные величины, то, как легко показать при помощи аналогичных рассуждений, в данном случае разность $F_T(t) = f(t+T) - f(t)$ уже не будет стационарной случайной функцией (ею окажется вторая разность $F_T(t+T_1) - F_T(t)$). Поэтому случайный процесс $f(t)$ будет процессом со стационарными первыми приращениями лишь в том случае, когда его среднее значение является линейной функцией времени. Поскольку, однако, для не очень больших промежутков времени любую функцию можно приближенно считать линейной (взяв ее первые члены разложения в ряд Тейлора), то использование процессов со стационарными первыми приращениями значительно расширит наши возможности описания реальных случайных процессов по сравнению со стационарными процессами.

Рассмотрим действительный случайный процесс $f(t)$ со стационарными первыми приращениями. Среднее значение $\langle f(t) \rangle$ такого процесса зависит, вообще говоря, от t . Введем новую величину

$$\xi(t) = f(t) - \langle f(t) \rangle,$$

для которой $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Случайный процесс $\xi(t)$ также является процессом со стационарными приращениями, так как его корреляционная функция может явно зависеть от t , несмотря на то, что $\langle \xi(t) \rangle = 0$. Рассмотрим теперь разность

$$F_T(t) = \xi(t+T) - \xi(t);$$

она является стационарным случайным процессом, и ее корреляционная функция B_F не должна явно зависеть от времени t . Вычислим $B_F(\tau)$:

$$\begin{aligned} B_F(\tau) &= \langle F_T(t+\tau) F_T(t) \rangle = \\ &= \langle [\xi(t+T) - \xi(t)] [\xi(t+\tau+T) - \xi(t+\tau)] \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Применив алгебраическое тождество

$$(a-b)(c-d) = \frac{1}{2} [(a-d)^2 + (b-c)^2 - (a-c)^2 - (b-d)^2],$$

получим

$$B_F(\tau) = \frac{1}{2} \{ \langle [\xi(t+T) - \xi(t+\tau)]^2 \rangle + \langle [\xi(t+\tau+T) - \xi(t)]^2 \rangle - \langle [\xi(t+T) - \xi(t+\tau+T)]^2 \rangle - \langle [\xi(t+\tau) - \xi(t)]^2 \rangle \}. \quad (7)$$

Обозначим через $D_f(t_1, t_2)$ величину

$$D_f(t_1, t_2) = \langle [\xi(t_1) - \xi(t_2)]^2 \rangle, \quad (8)$$

которая называется структурной функцией процесса $f(t)$. Тогда (7) запишется как

$$B_F(\tau) = \frac{1}{2} D_f(t+T, t+\tau) + \frac{1}{2} D_f(t+\tau+T, t) - \frac{1}{2} D_f(t+\tau+T, t+T) - \frac{1}{2} D_f(t+\tau, t). \quad (9)$$

Так как мы предположили, что $f(t)$ — процесс со стационарными приращениями и, следовательно, $F_T(t)$ — стационарный процесс, то B_F не должно зависеть от t и может зависеть лишь от τ и T . Это условие будет выполнено, если $D_f(t_1, t_2)$ зависит лишь от $t_1 - t_2$, т. е. если

$$\langle [\xi(t+\tau) - \xi(t)]^2 \rangle = D_f(\tau). \quad (10)$$

В этом случае формула (9) принимает вид

$$B_F(\tau) = \frac{1}{2} D_f(\tau+T) + \frac{1}{2} D_f(\tau-T) - D_f(\tau). \quad (11)$$

Подставив в формулу (10) $\xi(t) = f(t) - \langle f(t) \rangle$, получим

$$D_f(\tau) = \langle \{ [f(t+\tau) - f(t)] - \langle f(t+\tau) - f(t) \rangle \}^2 \rangle. \quad (12)$$

Так как левая часть (12) зависит лишь от τ , то и $\langle f(t+\tau) - f(t) \rangle$ должно зависеть только от τ и не должно зависеть от t . Но отсюда следует, что $\langle f(t) \rangle$ есть линейная функция

$$\langle f(t) \rangle = a + bt \quad \text{и} \quad \langle f(t+\tau) - f(t) \rangle = b\tau. \quad (13)$$

Очень часто приходится иметь дело с процессами со стационарными приращениями, для которых среднее значение $\langle f(t) \rangle$ постоянно (к этому типу будут относиться локально изотропные случайные поля, рассматриваемые ниже). В этом случае формула (12) упрощается и принимает вид

$$D_f(\tau) = \langle [f(t+\tau) - f(t)]^2 \rangle. \quad (14)$$

Структурная функция является основной характеристикой случайного процесса со стационарными приращениями, заменяю-

щей понятие корреляционной функции. Грубо говоря, значение $D_f(\tau)$ характеризует интенсивность тех флуктуаций $f(t)$, периоды которых меньше или сравнимы с τ . Действительно, медленные по сравнению с τ изменения функции $f(t)$ не влияют на разность $f(t + \tau) - f(t)$ и поэтому не дают вклада в $D_f(\tau)$. Разумеется, функция $D_f(\tau)$ может быть построена и для обычных стационарных случайных функций, являющихся частным случаем функций со стационарными приращениями. Если $f(t)$ — стационарная случайная функция со средним значением, равным нулю, то

$$D_f(\tau) = \langle [f(t + \tau) - f(t)]^2 \rangle = \\ = \langle [f(t + \tau)]^2 \rangle + \langle [f(t)]^2 \rangle - 2 \langle f(t + \tau) f(t) \rangle.$$

Из стационарности $f(t)$ следует, что

$$\langle [f(t)]^2 \rangle = \langle [f(t + \tau)]^2 \rangle = B_f(0).$$

Таким образом, для стационарного процесса

$$D_f(\tau) = 2 [B_f(0) - B_f(\tau)]. \quad (15)$$

В том случае, когда $B_f(\infty) = 0$ (а на практике это условие почти всегда выполняется), $D_f(\infty) = 2B_f(0)$. Указанное соотношение позволяет выразить корреляционную функцию $B_f(\tau)$ через структурную функцию $D_f(\tau)$:

$$B_f(\tau) = \frac{1}{2} D_f(\infty) - \frac{1}{2} D_f(\tau). \quad (16)$$

Таким образом, в случае стационарных случайных процессов структурные функции $D_f(\tau)$ могут использоваться наряду с корреляционными; в некоторых отношениях их использование даже более целесообразно. Действительно, приступая к изучению какого-либо случайного процесса, в стационарности которого мы заранее не уверены, более целесообразно строить его структурную, а не корреляционную функцию. Практическое построение структурной функции к тому же всегда более надежно, поскольку на значение $D_f(\tau)$ не оказывают влияния ошибки в определении среднего значения $\langle f(t) \rangle$. В случае, если построенная структурная функция при больших τ оказывается постоянной, по формуле (16) можно найти и $B_f(\tau)$.

Выше приводилась формула (17.2), представляющая корреляционную функцию действительного стационарного случайного процесса в виде интеграла Фурье. Предполагая, что процесс $f(t)$ стационарный и для него существует как корреляционная, так и структурная функция, мы можем на основании формулы (15) получить спектральное разложение структурной функции $D(\tau)$

(в дальнейшем индекс f в выражениях D_f и B_f опускаем). Подставляя (17'.2) в (15), получим формулу

$$D(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \omega \tau] W(\omega) d\omega, \quad (17)$$

связывающую введенную выше спектральную плотность энергии $W(\omega)$ со структурной функцией $D(\tau)$.

Сравним условия, которые следует налагать на спектральную плотность $W(\omega)$ для того, чтобы существовала корреляционная функция $B(\tau)$, выраженная интегралом (17'.2), и для того, чтобы существовала структурная функция $D(\tau)$, выражаемая интегралом (17). Для сходимости интеграла (17.2) при $\tau = 0$ необходимо, чтобы функция $W(\omega)$ росла в нуле медленнее, чем ω^{-1} , убывала на бесконечности быстрее, чем ω^{-1} , т. е. чтобы выполнялись условия

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [\omega W(\omega)] = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\omega W(\omega)] = 0. \quad (18)$$

В то же время для сходимости интеграла (17) при $\omega \rightarrow 0$ требуется менее жесткое условие, так как $1 - \cos \omega \tau \sim \omega^2$ при $\omega \rightarrow 0$. При $\omega \rightarrow \infty$ условие сходимости интеграла (17) такое же, как и прежде. Следовательно, (17) сходится, если

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} [\omega^3 W(\omega)] = 0, \quad \lim_{\omega \rightarrow \infty} [\omega W(\omega)] = 0. \quad (19)$$

Условия (19) значительно менее жесткие, чем условия (18). Они, в частности, допускают, чтобы функция $W(\omega)$ имела в нуле степенную особенность $W(\omega) \sim \omega^{-\mu}$, где $\mu < 3$. При этом структурная функция $D(\tau)$, вычисленная по формуле (17), будет иметь смысл, в то время как корреляционная функция $B(\tau)$ уже не будет существовать. Это обстоятельство наводит на мысль, что спектральное разложение (17), полученное нами из спектрального разложения (17'.2) для корреляционной функции, выполняется и тогда, когда разложение (17'.2) уже не справедливо. Как показано в работе А. М. Яглома [1], это действительно так.

Таким образом, процессы со стационарными приращениями отличаются от стационарных процессов в двух отношениях: их среднее значение может быть линейной функцией времени, а спектр может иметь особенность в нуле.

То обстоятельство, что при использовании структурных функций мы получаем возможность описывать процессы, имеющие особенность спектра в нуле (т. е. обладающие бесконечной «энергией» в области низких частот), представляет большие удобства

для приложений, где такие процессы встречаются довольно часто.

Сравнивая методы описания стационарных случайных процессов и процессов со стационарными приращениями, можно также заметить, что их описание при помощи спектральных функций $W(\omega)$ имеет преимущества перед описанием при помощи корреляционных и структурных функций. Это преимущество заключается в том, что, используя функцию $W(\omega)$, можно не заботиться о том, является ли процесс стационарным или обладает лишь стационарными приращениями, — в обоих случаях функция $W(\omega)$ существует и имеет тот же самый физический смысл спектральной плотности энергии. И лишь на окончательном этапе вычислений, когда мы хотим найти $B(\tau)$ или $D(\tau)$, мы пользуемся формулой (17.2) или (17) в зависимости от того, имеет $W(\omega)$ интегрируемую особенность в нуле или нет. Второе преимущество спектрального описания заключается в том, что функция $W(\omega)$ имеет более прямой физический смысл, чем $B(\tau)$ или $D(\tau)$.

Получим теперь соотношения, выражающие $W(\omega)$ через $D(\tau)$. Дифференцируя формулу (17) и учитывая четность функции $W(\omega)$, мы получим интеграл типа интеграла Фурье, который может быть обращен. В результате этого получаем формулу

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega} \int_0^{\infty} D'(\tau) \sin \omega\tau \, d\tau, \quad (20)$$

которой можно пользоваться, если интеграл справа сходится.

При $\omega \neq 0$ для сходимости интеграла достаточны условия:

а) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} D'(\tau) = 0$;

б) существует такое число $\alpha < 1$, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^{1+\alpha} D'(\tau) = \text{const} < \infty. \quad (21)$$

Условие (б) может быть заменено на более жесткое, но более удобное условие

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 D'(\tau) = 0.$$

Двукратное дифференцирование формулы (17) также дает интеграл Фурье, который после обращения принимает вид

$$W(\omega) = \frac{1}{2\pi\omega^2} \int_0^{\infty} D''(\tau) \cos \omega\tau \, d\tau. \quad (22)$$

При $\omega \neq 0$ формула (22) справедлива, если выполняются условия:

а) $\lim_{\tau \rightarrow \infty} D^n(\tau) = 0$;

б) существует такое $\alpha < 1$, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^\alpha D^n(\tau) = \text{const} < \infty \quad (23)$$

или более жесткое условие

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau D^n(\tau) = 0.$$

Заметим, что условия (21) и (23), вообще говоря, различны и для вычисления $W(\omega)$ требуется их предварительная проверка с целью выбора той или иной формулы (см. примеры).

Подобно тому как сам стационарный случайный процесс $f(t)$ может быть представлен в виде стохастического интеграла Фурье — Стильтьеса (19.2), процесс со стационарными приращениями также может быть представлен в виде спектрального разложения. Проще всего это разложение можно получить, используя то обстоятельство, что производная $\xi(t) = \frac{df(t)}{dt}$ от процесса со стационарными приращениями $f(t)$ сама является стационарным случайным процессом. Следовательно, $\xi(t)$ можно представить в виде разложения (19.2):

$$\xi(t) = \frac{df(t)}{dt} = \xi_0 + \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} Z_1(d\omega), \quad (24)$$

где ξ_0 — среднее значение процесса $\xi(t)$ и $Z_1(d\omega)$ обладает свойствами

$$\begin{aligned} \langle Z_1(d\omega) \rangle &= 0, \\ \langle Z_1(d\omega) Z_1^*(d\omega') \rangle &= \delta(\omega - \omega') W_1(\omega) d\omega d\omega'. \end{aligned} \quad (25)$$

Проинтегрировав разложение (24) в пределах $(0, t)$, получим

$$f(t) = f(0) + \xi_0 t + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega t} - 1] \frac{Z_1(d\omega)}{i\omega}, \quad (26)$$

где $f(0)$ — некоторая случайная величина.

Введем функцию $Z(d\omega) = \frac{1}{i\omega} Z_1(d\omega)$. Очевидно, что

$$\langle Z(d\omega) \rangle = 0 \text{ и } \langle Z(d\omega) Z^*(d\omega') \rangle = \frac{1}{\omega^2} W_1(\omega) \delta(\omega - \omega') d\omega d\omega'. \quad (27)$$

Если вместо спектральной плотности $W_1(\omega)$ производной $\frac{df}{dt}$ ввести спектральную плотность

$$W(\omega) = \frac{1}{\omega^2} W_1(\omega)$$

самого процесса $f(t)$, то формулы (26), (27) принимают вид

$$f(t) = f(0) + \xi_0 t + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega t} - 1] Z(d\omega), \quad (28)$$

где

$$\langle Z(d\omega) \rangle = 0, \quad \langle Z(d\omega) Z^*(d\omega') \rangle = \delta(\omega - \omega') W(\omega) d\omega d\omega'. \quad (29)$$

Формулы (28), (29) и дают искомое разложение процесса со стационарными приращениями. В указанном выше частном случае, когда $\langle f(t) \rangle$ не зависит от t , формула (28) принимает вид

$$f(t) = f(0) + \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i\omega t} - 1] Z(d\omega). \quad (30)$$

Легко проверить, что, подставляя разложение (28) в формулу (12), мы получим формулу (17), выражающую $D(\tau)$ через $W(\omega)$ (при этом надо помнить, что $f^*(t) = f(t)$).

Рассмотрим два примера.

1) Построим структурную функцию стационарного случайного процесса, рассмотренного в примере 3 предыдущего параграфа. Воспользовавшись формулой $D(\tau) = 2B(0) - 2B(\tau)$, получим

$$D(\tau) = 2a^2 \left[1 - \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right)^\nu K_\nu \left(\frac{\tau}{\tau_0} \right) \right]. \quad (31)$$

При $\tau \ll \tau_0$ можно воспользоваться первыми двумя членами разложения в ряд функции $K_\nu(x)$. В результате простых выкладок получаем

$$D(\tau) \approx 2a^2 \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{\tau}{2\tau_0} \right)^{2\nu}, \quad (32)$$

т. е. $D(\tau) \sim \tau^{2\nu}$. При $\tau \gtrsim \tau_0$ рост функции $D(\tau)$ замедляется и она стремится к постоянной величине $2a^2$. Спектральная плотность, соответствующая (31), та же, что и в рассмотренном выше

примере:

$$W(\omega) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \frac{a^2 \tau_0}{(1 + \omega^2 \tau_0^2)^{\nu + \frac{1}{2}}}. \quad (33)$$

При $\omega \gg \frac{1}{\tau_0}$ получаем отсюда

$$W(\omega) \approx \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \frac{a^2}{\tau_0^{2\nu} |\omega|^{2\nu+1}}. \quad (34)$$

Обозначая

$$\frac{2a^2 \Gamma(1-\nu)}{(2\tau_0)^{2\nu} \Gamma(1+\nu)} = C^2,$$

мы можем записать (32) и (34) в виде

$$D(\tau) \approx C^2 \tau^{2\nu},$$

$$W(\omega) \approx \frac{2^{2\nu-1} \Gamma(1+\nu) \Gamma\left(\frac{1}{2} + \nu\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu)} C^2 |\omega|^{-(1+2\nu)}.$$

Воспользовавшись известными формулами

$$2^{2\nu-1} \Gamma(\nu) \Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \Gamma(2\nu),$$

$$\Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu) = \frac{\pi}{\sin \pi \nu},$$

приведем последнее выражение к виду

$$W(\omega) \approx \frac{\nu}{\pi} \Gamma(2\nu) \sin(\pi \nu) C^2 |\omega|^{-(1+2\nu)}.$$

Если обозначить $2\nu = \mu$, то мы получаем окончательно следующие асимптотические формулы:

$$D(\tau) \approx C^2 \tau^\mu, \quad (35)$$

$$W(\omega) \approx \frac{1}{2\pi} \Gamma(\mu + 1) \sin \frac{\pi \mu}{2} C^2 |\omega|^{-(\mu+1)}. \quad (36)$$

Формулы (35) и (36) являются асимптотическим видом выражений (31) и (33), которые при $\tau \rightarrow \infty$ и $\omega \rightarrow 0$ стремятся к постоянным значениям. Поэтому при больших τ и малых ω формулы (35) и (36) сильно отличаются от исходных формул (31) и (33).

2) Рассмотрим теперь структурную функцию

$$D(\tau) = C^2 |\tau|^\mu \quad (0 < \mu < 2). \quad (37)$$

Выражение (37) будем считать справедливым не при $\tau \ll \tau_0$, как в предыдущем примере, а при всех $0 < \tau < \infty$. Найдем

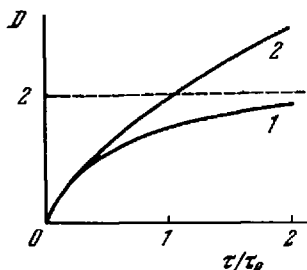


Рис. 4. Примеры структурных функций:

$$1 - D(\tau) = 2 \left[1 - 2^{2/3} \times \right. \\ \left. \times \left[\Gamma\left(\frac{1}{3}\right) \right]^{-1} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{1/3} K\left(\frac{\tau}{\tau_0}\right) \right]; \\ 2 - D(\tau) = 2^{1/2} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \times \\ \times \left[\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \right]^{-1} \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{2/3}.$$

соответствующую (37) спектральную плотность $W(\omega)$. Дифференцируя (37), получим

$$D'(\tau) = \mu C^2 \tau^{\mu-1}.$$

В случае, если $\mu < 1$,

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} D'(\tau) = 0.$$

Условие

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \tau^2 D'(\tau) = 0$$

выполняется при всех $\mu > -1$, т. е. и при $\mu > 0$, как в нашем примере. Подставляя $D'(\tau)$ в формулу (20), после вычисления известного интеграла получаем формулу

$$W(\omega) = \frac{C^2}{2\pi} \Gamma(\mu + 1) \sin \frac{\pi\mu}{2} |\omega|^{-(\mu+1)}. \quad (38)$$

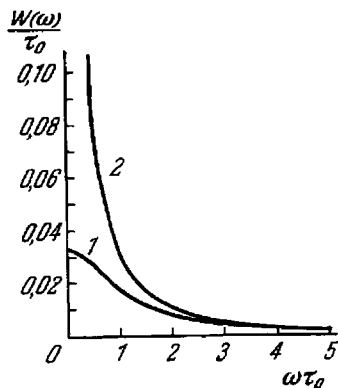


Рис. 5. Спектральные плотности $W(\omega)$, соответствующие структурным функциям, изображенным на рис. 4 (номера возле соответствующих кривых рис. 4 и 5 совпадают).

В случае, если $1 < \mu < 2$, условие $\lim_{\tau \rightarrow \infty} D'(\tau) = 0$ уже не выполняется, но зато выполняются условия

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} D''(\tau) = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow 0} \tau D''(\tau) = 0$$

и можно применить для вычисления $W(\omega)$ формулу (22). Выполняя интегрирование, мы получаем ту же формулу (38), которая, таким образом, справедлива не только при $0 < \mu < 1$, но и при всех μ из интервала $0 < \mu < 2$.

Вид структурных функций и их спектров из примеров 1), 2) приведен на рис. 4, 5.

Сравнивая рассмотренные примеры, мы видим, что структурная функция вида (37), которая в первом примере являлась асимптотическим видом структурной функции (31) стационарного случайного процесса, сама может являться структурной функцией процесса со стационарными приращениями. В теории турбулентности мы имеем дело как раз с таким случаем, когда нам известен лишь асимптотический вид структурных функций для достаточно малых значений аргумента τ и неизвестно поведение этих функций при больших τ . В таких случаях оказывается целесообразным рассматривать случайный процесс как процесс со стационарными приращениями и в тех случаях, когда это допустимо, распространять асимптотический вид структурных функций, известный лишь при малых τ , на весь интервал значений τ .

§ 4. Однородные и изотропные случайные поля

Перейдем теперь к случайным функциям трех переменных (случайным полям). Понятие случайного поля вполне аналогично понятию случайного процесса. Примерами случайных полей служат поле скорости ветра в турбулентной атмосфере (векторное случайное поле, объединяющее три случайные компоненты скорости), поля температуры, влажности или диэлектрической проницаемости (скалярные). Для случайного поля $f(\mathbf{r})$ также могут быть определены среднее значение $\langle f(\mathbf{r}) \rangle$ и корреляционная функция:

$$B_f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [f(\mathbf{r}_1) - \langle f(\mathbf{r}_1) \rangle] [f^*(\mathbf{r}_2) - \langle f^*(\mathbf{r}_2) \rangle] \rangle. \quad (1)$$

Обобщением понятия стационарности для случайных полей является понятие однородности. Случайное поле называется однородным, если его среднее значение постоянно, а корреляционная функция не меняется при одновременном смещении пары точек \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 в одном и том же направлении, на одну и ту же величину, т. е. если

$$\langle f(\mathbf{r}) \rangle = \text{const}, \quad B_f(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_f(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_0, \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_0). \quad (2)$$

Выбирая в последней формуле $r_0 = -r_2$, получим, что в однородном поле $B_f(r_1, r_2) = B_f(r_1 - r_2, 0)$, т. е. корреляционная функция однородного случайного поля зависит лишь от $r_1 - r_2$,

$$B_f(r_1, r_2) = B_f(r_1 - r_2).$$

Однородное случайное поле называется изотропным, если $B_f(r)$ зависит лишь от $r = |r|$, т. е. только от расстояния между точками наблюдения. Например, поле, у которого корреляционная функция имеет вид

$$B_f(r_1 - r_2) = B_f[\alpha(x_1 - x_2) + \beta(y_1 - y_2) + \gamma(z_1 - z_2)],$$

является однородным, но не изотропным.

Если в однородном и изотропном случайном поле выделить какую-либо прямую линию и значения поля рассматривать лишь на этой прямой, то в результате получим случайную функцию одного переменного x . К ней можно применять все результаты, относящиеся к стационарным случайным функциям. В частности, можно записать разложение корреляционной функции в интеграл Фурье:

$$B_f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\kappa x) V(\kappa) d\kappa. \quad (3)$$

Однако более естественно пользоваться трехмерными разложениями. Однородное случайное поле может быть представлено в виде трехмерного стохастического интеграла Фурье — Стильтьеса

$$f(r) = \int \int \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa r} Z(d^3\kappa), \quad (4)$$

где

$$d^3\kappa = d\kappa_1 d\kappa_2 d\kappa_3,$$

причем «амплитуды» $Z(d^3\kappa)$ удовлетворяют соотношению

$$\langle Z(d^3\kappa_1) Z^*(d^3\kappa_2) \rangle = \delta(\kappa_1 - \kappa_2) \Phi(\kappa_1) d^3\kappa_1 d^3\kappa_2, \quad (5)$$

где

$$\Phi(\kappa) \geq 0, \quad \delta(\kappa_1 - \kappa_2) = \delta(\kappa_{1x} - \kappa_{2x}) \delta(\kappa_{1y} - \kappa_{2y}) \delta(\kappa_{1z} - \kappa_{2z}).$$

Подставляя разложение (4) в формулу

$$B_f(r_1 - r_2) = \langle f(r_1) f^*(r_2) \rangle$$

(предполагаем, что $\langle f(\mathbf{r}) \rangle = 0$) и учитывая соотношение (5), получим

$$B_j(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int e^{i\mathbf{x} \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \Phi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (6)$$

Поскольку для действительных случайных полей

$$B(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = B(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(-\mathbf{x}),$$

то формулу (6) можно в этом случае записать также в форме

$$B_j(r) = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{r} \Phi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (7)$$

Функция $\Phi(\mathbf{x})$ может быть выражена через $B_j(r)$:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \int_{-\infty}^{\infty} \int \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{r} B_j(r) d^3r. \quad (8)$$

Таким образом, функции $B_j(r)$ и $\Phi(\mathbf{x})$ сопряжены по Фурье.

Если случайное поле $f(\mathbf{r})$ является изотропным, функция $B_j(r)$ зависит лишь от r . Тогда в интеграле (8) можно ввести сферические координаты и произвести интегрирование по угловым переменным. В результате получаем выражение

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi^2\kappa} \int_0^{\infty} r B_j(r) \sin \kappa r dr, \quad (9)$$

где $\kappa = |\mathbf{x}|$.

Таким образом, в изотропном случайном поле спектральная плотность $\Phi(\mathbf{x})$ является функцией лишь одной переменной — модуля вектора \mathbf{x} . Это позволяет для случая изотропного поля упростить выражение (7). Вводя в пространстве вектора \mathbf{x} сферические координаты и производя интегрирование по угловым переменным, получим соотношение

$$B_j(r) = \frac{4\pi}{r} \int_0^{\infty} \kappa \Phi(\kappa) \sin \kappa r d\kappa. \quad (10)$$

Выведем полезную формулу, связывающую трехмерную спектральную плотность $\Phi(\mathbf{x})$ изотропного случайного поля с его одномерной спектральной плотностью $V(\kappa)$. Обращая формулу (3),

получим, учитывая четность функции $B_f(r)$:

$$V(\kappa) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_f(r) \cos \kappa r \, dr. \quad (11)$$

Дифференцируя это соотношение, найдем

$$\frac{dV(\kappa)}{d\kappa} = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} B_f(r) \sin(\kappa r) r \, dr. \quad (12)$$

Сравнивая (12) с формулой (9), получаем соотношение

$$\Phi(\kappa) = -\frac{1}{2\pi\kappa} \frac{dV(\kappa)}{d\kappa}. \quad (13)$$

Формула (13) позволяет находить выражение для трехмерной спектральной плотности изотропного случайного поля, если известна его одномерная спектральная плотность $V(\kappa)$.

Приведем несколько примеров пространственных корреляционных функций и их спектров.

$$1) \quad B_f(r) = a^2 e^{-\left|\frac{r}{r_0}\right|}. \quad (14)$$

Воспользовавшись результатами примера 1) на стр. 20 и тем обстоятельством, что разложение (3) совершенно аналогично разложению (17'.2) для стационарного случайного процесса, можно сразу же написать одномерную спектральную плотность $V(\kappa)$

$$V(\kappa) = \frac{a^2 r_0}{\pi(1 + \kappa^2 r_0^2)}. \quad (15)$$

Воспользуемся формулой (13) и определим $\Phi(\kappa)$:

$$\Phi(\kappa) = \frac{a^2 r_0^3}{\pi^2 (1 + \kappa^2 r_0^2)^2}. \quad (16)$$

2) Аналогичным образом для корреляционной функции

$$B_f(r) = a^2 e^{-\left(\frac{r}{r_0}\right)^2} \quad (17)$$

получим

$$V(\kappa) = \frac{a^2 r_0}{2\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\kappa^2 r_0^2}{4}}, \quad \Phi(\kappa) = \frac{a^2 r_0^3}{8\pi\sqrt{\pi}} e^{-\frac{\kappa^2 r_0^2}{4}}. \quad (18)$$

3) Наконец, для корреляционной функции

$$B_f(r) = \frac{a^2}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^{\nu} K_{\nu}\left(\frac{r}{r_0}\right) \quad (19)$$

имеем

$$V(x) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \frac{a^2 r_0}{(1 + x^2 r_0^2)^{\nu + \frac{1}{2}}},$$

$$\Phi(x) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\pi\sqrt{\pi}\Gamma(\nu)} \frac{a^2 r_0^3}{(1 + x^2 r_0^2)^{\nu + \frac{3}{2}}}. \quad (20)$$

§ 5. Локально однородные и изотропные случайные поля

Следует заметить, что реальные метеорологические поля можно рассматривать как однородные и изотропные случайные поля лишь в грубом приближении. Например, статистические характеристики атмосферной турбулентности обычно являются функцией высоты над поверхностью земли. Поэтому, так же как и при рассмотрении нестационарных случайных процессов, при анализе пространственной структуры метеорологических и некоторых других полей целесообразно применять метод структурных функций.

Действительно, на разность значений поля $f(\mathbf{r})$ в двух точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 основное влияние оказывают лишь те неоднородности поля f , размеры которых не превосходят расстояния $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Если это расстояние не очень велико, то наибольшие неоднородности не оказывают влияния на $f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_2)$, и поэтому структурная функция (которую мы будем рассматривать лишь для действительных случайных полей)

$$D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \{ [f(\mathbf{r}_1) - \langle f(\mathbf{r}_1) \rangle] - [f(\mathbf{r}_2) - \langle f(\mathbf{r}_2) \rangle] \}^2 \rangle \quad (1)$$

может оказаться зависящей лишь от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. В то же время на значение корреляционной функции $B(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ оказывают влияние неоднородности всех масштабов и она может зависеть от каждого аргумента в отдельности*, а не только от разности $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Мы

* Например, корреляционные функции метеорологических полей в атмосфере обычно зависят не только от взаимного расстояния двух точек наблюдения, но и от их средней высоты над поверхностью земли, т. е. фактически от координат обеих точек наблюдения.

приходим, таким образом, к понятию локальной однородности [10].

Случайное поле $f(\mathbf{r})$ называется локально однородным, если функции распределения случайной величины $f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_2)$ инвариантны относительно сдвигов пары точек $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$.

Таким образом, среднее значение $\langle f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_2) \rangle$ и структурная функция (1) локально однородного случайного поля зависят лишь от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$:

$$D(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}, \mathbf{r}_1) = D(\mathbf{r}).$$

Локально однородное случайное поле называется локально изотропным, если функции распределения величины $f(\mathbf{r}_1) - f(\mathbf{r}_2)$ инвариантны относительно вращений и зеркальных отражений вектора $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Структурная функция локально изотропного случайного поля зависит лишь от $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$:

$$D(\mathbf{r}) = D(r). \quad (2)$$

Локально однородное случайное поле может быть представлено в виде спектрального разложения, аналогичного разложению процесса со стационарными приращениями (28.3):

$$f(\mathbf{r}) = f(0) + \mathbf{a}\mathbf{r} + \iiint_{-\infty}^{\infty} [e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} - 1] Z(d^3\mathbf{x}), \quad (3)$$

где $f(0)$ — случайная величина и \mathbf{a} — случайный вектор. В случае, если поле f локально изотропно, не существует выделенного направления, от которого оно может зависеть. В этом случае вектор \mathbf{a} имеет изотропный закон распределения и $\langle \mathbf{a} \rangle = 0$. В большинстве случаев можно считать, что и сам вектор \mathbf{a} равен нулю; в этом случае спектральное разложение локально изотропного поля имеет вид

$$f(\mathbf{r}) = f(0) + \iiint_{-\infty}^{\infty} [e^{i\mathbf{x}\mathbf{r}} - 1] Z(d^3\mathbf{x}). \quad (4)$$

Функция $Z(d^3\mathbf{x})$ удовлетворяет прежним соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \langle Z(d^3\mathbf{x}) \rangle &= 0, \\ \langle Z(d^3\mathbf{x}) Z^*(d^3\mathbf{x}') \rangle &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Phi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}', \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

где $\Phi \geq 0$ — спектральная плотность поля.

Подставляя (3) в формулу (1), можно получить разложение

$$D(r) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \mathbf{x}r] \Phi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (6)$$

В случае локально изотропного поля, как следует из (4), $\langle f(r) \rangle = \text{const}$ и формула (1) упрощается:

$$D(r) = \langle [f(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - f(\mathbf{r}')]^2 \rangle. \quad (7)$$

В этом случае спектральная плотность $\Phi(\mathbf{x})$ зависит лишь от модуля вектора \mathbf{x} :

$$\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x).$$

Вводя в (6) сферические координаты в пространстве \mathbf{x} и производя интегрирование по угловым переменным, получим формулу

$$D(r) = 8\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r}\right) \Phi(\kappa) \kappa^2 d\kappa. \quad (8)$$

Выпишем формулы обращения для преобразования (6). Взяв градиент от (6) и обращая получающийся после этого интеграл Фурье, можно получить формулу

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x}}{16\pi^3 x^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} \sin \mathbf{x}r \text{grad } D(r) d^3r. \quad (9)$$

В случае, если поле $f(r)$ является локально изотропным и $D(\mathbf{r}) = D(r)$, формула (9) упрощается. В этом случае

$$\mathbf{x} \nabla D(r) = \frac{\mathbf{x}r}{r} D'(r).$$

Вводя сферические координаты и выполняя интегрирование по угловым переменным, получим формулу

$$\Phi(x) = \frac{1}{4\pi^2 x^3} \int_0^{\infty} D'(r) [\sin \kappa r - \kappa r \cos \kappa r] dr. \quad (10)$$

Интеграл в (10) сходится (при $x \neq 0$), если выполнены условия:

а) $\lim_{r \rightarrow \infty} r D'(r) = 0$;

б) существует такое $\alpha < 1$, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{3+\alpha} D'(r) = \text{const} < \infty \quad (11)$$

или выполняется более жесткое условие

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^4 D'(r) = 0.$$

Применив к (6) оператор Лапласа, можно получить другую формулу обращения:

$$\Phi(\kappa) = \frac{1}{16\pi^2 \kappa^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \cos \kappa r \Delta D(r) d^3 r,$$

которая для локально изотропных полей принимает вид

$$\Phi(\kappa) = \frac{1}{4\pi^2 \kappa^2} \int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa r}{\kappa r} \frac{d}{dr} [r^2 D'(r)] dr. \quad (12)$$

Интеграл в (12) сходится (при $\kappa \neq 0$), если:

а) $\lim_{r \rightarrow \infty} r^{-1} \frac{d}{dr} [r^2 D'(r)] = 0;$

б) существует такое $\alpha < 1$, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^\alpha \frac{d}{dr} [r^2 D'(r)] = \text{const} < \infty \quad (13)$$

или выполняется более жесткое условие

$$\lim_{r \rightarrow 0} r \frac{d}{dr} [r^2 D'(r)] = 0.$$

Так же как и в случае процессов со стационарными приращениями, условия (11) и (13) различны, и поэтому формулы (10) и (12) следует применять лишь после проверки выполнения этих условий.

В случае локально изотропного поля можно ввести также одномерное спектральное разложение, подобно тому как это делается в (3.4):

$$D(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \kappa r] V(\kappa) d\kappa. \quad (14)$$

Формула обращения для (14) аналогична соответствующей формуле для процессов со стационарными приращениями (20.3) и имеет вид

$$V(\kappa) = \frac{1}{2\pi\kappa} \int_0^{\infty} \sin \kappa r D'(r) dr. \quad (15)$$

Формула (15) справедлива при следующих условиях:

а) $\lim_{r \rightarrow \infty} D'(r) = 0$;

б) существует такое $\alpha < 1$, что

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^{1+\alpha} D'(r) = \text{const} < \infty$$

или выполняется более жесткое условие

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^2 D'(r) = 0. \quad (16)$$

Дифференцируя (15) и сравнивая получающийся после этого результат с формулой (10), получаем соотношение между $\Phi(\kappa)$ и $\dot{V}(\kappa)$, аналогичное (13.4):

$$\Phi(\kappa) = -\frac{1}{2\pi\kappa} \frac{dV(\kappa)}{d\kappa}. \quad (17)$$

Та же формула может быть получена и из (12). Таким образом, соотношение между одномерной и трехмерной спектральными плотностями локально изотропного случайного поля такое же, как и в случае изотропного поля.

Как следует из спектрального разложения (6), фигурирующий в нем интеграл сходится при выполнении условий:

а) существует такое $\alpha < 1$, что

$$\lim_{\kappa \rightarrow 0} \kappa^{1+\alpha} \Phi(\kappa) = 0; \quad (18a)$$

б) существует такое $\beta > 1$, что

$$\lim_{\kappa \rightarrow \infty} \kappa^{2+\beta} \Phi(\kappa) = 0. \quad (18b)$$

Первое из этих условий допускает наличие у функции $\Phi(\kappa)$ степенной особенности в нуле типа $\kappa^{-\mu}$, где $\mu < 5$.

Таким образом, используя аппарат локально однородных случайных полей, мы получаем возможность описывать случайные поля, имеющие бесконечную «энергию» в области крупных масштабов.

Помимо разложений случайного локально изотропного поля и его структурной функции в трехмерные интегралы Фурье, будем использовать также двумерные разложения в плоскости $x = \text{const}$:

$$f(x, y, z) = f(x, 0, 0) + \iint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] u(d\kappa_2, d\kappa_3, x). \quad (19)$$

Здесь $f(x, 0, 0)$ — случайная функция, а $u(d\kappa_2, d\kappa_3, x)$ удовлетворяет соотношению

$$\langle u(d\kappa_2, d\kappa_3, x) u^*(d\kappa'_2, d\kappa'_3, x') \rangle = \\ = \delta(\kappa_2 - \kappa'_2) \delta(\kappa_3 - \kappa'_3) F(\kappa_2, \kappa_3, x - x') d\kappa_2 d\kappa_3 d\kappa'_2 d\kappa'_3, \quad (20)$$

причем

$$F(\kappa_2, \kappa_3, x) = F(\kappa_2, \kappa_3, -x).$$

Рассмотрим разность значений $f(x, y, z)$ в двух точках плоскости $x = \text{const}$. Используя разложение (19), получим

$$f(x, y, z) - f(x, y', z') = \iint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - e^{i(\kappa_2 y' + \kappa_3 z')}] u(d\kappa_2, d\kappa_3, x).$$

Вычислим корреляционную функцию двух таких разностей, взятых в плоскостях x и x' :

$$\langle [f(x, y, z) - f(x, y', z')] [f^*(x', y, z) - f^*(x', y', z')] \rangle = \\ = \iiint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - e^{i(\kappa_2 y' + \kappa_3 z')}] [e^{-i(\kappa'_2 y + \kappa'_3 z)} - e^{-i(\kappa'_2 y' + \kappa'_3 z')}] \times \\ \times \langle u(d\kappa_2, d\kappa_3, x) u^*(d\kappa'_2, d\kappa'_3, x') \rangle.$$

Используя формулу (20), получим

$$\langle [f(x, y, z) - f(x, y', z')] [f^*(x', y, z) - f^*(x', y', z')] \rangle = \quad (21) \\ = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \{1 - \cos[\kappa_2(y - y') + \kappa_3(z - z')]\} F(\kappa_2, \kappa_3, x - x') d\kappa_2 d\kappa_3.$$

В случае локально изотропного поля корреляция между разностями

$$f(x, y, z) - f(x, y', z') \text{ и } f^*(x', y, z) - f^*(x', y', z')$$

обусловлена, очевидно, лишь такими неоднородностями, размеры которых превышают расстояние $|x - x'|$, т. е. $l \geq |x - x'|$.

Поскольку масштабу l соответствует волновое число $\kappa \sim \frac{2\pi}{l}$, то корреляция между указанными разностями обусловлена лишь той частью спектра, для которой волновые числа удовлетворяют условию $\kappa |x - x'| \leq 1$. Следовательно, функция $F(\kappa_2, \kappa_3, x - x')$, являющаяся спектральной плотностью величины

$$\langle [f(x, y, z) - f(x, y', z')] [f^*(x', y, z) - f^*(x', y', z')] \rangle,$$

быстро убывает при $\kappa |x - x'| > 1$. Воспользовавшись алгебраическим тождеством

$$(a - b)(c - d) = \frac{1}{2} [(a - d)^2 + (b - c)^2 - (a - c)^2 - (b - d)^2],$$

левую часть уравнения (21) можно выразить через структурную функцию поля f , в результате чего формула приобретает следующий вид:

$$\begin{aligned} D_f(x - x', y - y', z - z') - D_f(x - x', 0, 0) = \\ = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} \{1 - \cos[\kappa_2(y - y') + \kappa_3(z - z')]\} F(\kappa_2, \kappa_3, x - x') d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (22)$$

Положив здесь $\xi = x - x' = 0$, $y - y' = \eta$, $z - z' = \zeta$, получим

$$D_f(0, \eta, \zeta) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\kappa_2\eta + \kappa_3\zeta)] F(\kappa_2, \kappa_3, 0) d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (23)$$

т. е. функция $F(\kappa_2, \kappa_3, 0)$ является двумерной спектральной плотностью величины $D(0, \eta, \zeta)$. В случае локальной изотропности в плоскости $x = \text{const}$ функция $F(\kappa_2, \kappa_3, |x|)$ зависит лишь от $\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}$, и тогда

$$D_f(\rho) = 4\pi \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa\rho)] F(\kappa, 0) \kappa d\kappa. \quad (24)$$

Здесь

$$\rho^2 = \eta^2 + \zeta^2 \quad \text{и} \quad F(\kappa_2, \kappa_3, 0) = F(\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}, 0).$$

Найдем связь между функциями $\Phi(\mathbf{x})$ и $F(\kappa_2, \kappa_3, x)$. Подставляя спектральное разложение (6) в левую часть формулы (22), получим

$$\begin{aligned} 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [\cos \kappa_1 \xi - \cos(\kappa_1 \xi + \kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)] \Phi(\mathbf{x}) d^3 \kappa = \\ = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)] F(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (25)$$

Подставляя $\cos \kappa_1 \xi - \cos(\kappa_1 \xi + \kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta) = \cos \kappa_1 \xi - \cos \kappa_1 \xi \times \cos(\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta) + \sin \kappa_1 \xi \sin(\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)$ и учитывая, что

интеграл от произведения

$$\sin \kappa_1 \xi \sin (\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta) \Phi(\mathbf{x})$$

равен нулю в силу нечетности этой функции по \mathbf{x} , получим формулу

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos (\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)] d\kappa_2 d\kappa_3 \int_{-\infty}^{\infty} \cos (\kappa_1 \xi) \Phi(\mathbf{x}) d\kappa_1 = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos (\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)] F(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\kappa_2 d\kappa_3, \end{aligned} \quad (26)$$

из которой следует, что

$$F(\kappa_2, \kappa_3, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos (\kappa_1 \xi) \Phi(\mathbf{x}) d\kappa_1. \quad (27)$$

Обращая этот интеграл Фурье, найдем также

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos (\kappa_1 \xi) F(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi. \quad (28)$$

Воспользовавшись последней формулой, можно получить спектральные разложения $D(r)$, выраженные через $F(\kappa_2, \kappa_3, \xi)$. Подставляя (28) в (6), после несложных преобразований, использующих формулу

$$\delta(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \cos \kappa \xi d\kappa,$$

можно получить разложение

$$\begin{aligned} D(x, y, z) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_2, \kappa_3, 0) d\kappa_2 d\kappa_3 - \\ - 2 \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_2, \kappa_3, x) \cos (\kappa_2 y + \kappa_3 z) d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (29)$$

В случае, если случайное поле локально изотропно,

$$F(\kappa_2, \kappa_3, x) = F(\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}, x).$$

Вводя новые переменные интегрирования

$$\kappa_2 = \kappa \cos \varphi, \quad \kappa_3 = \kappa \sin \varphi$$

и обозначая

$$y = \rho \cos \alpha, \quad z = \rho \sin \alpha, \quad \text{где } \rho^2 = y^2 + z^2,$$

после выполнения интегрирования с учетом известной формулы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos [\kappa \rho \cos (\varphi - \alpha)] d\varphi = 2\pi J_0(\kappa \rho)$$

получим

$$D(r) = 4\pi \int_0^{\infty} F(\kappa, 0) \kappa d\kappa - 4\pi \int_0^{\infty} F(\kappa, x) J_0(\kappa \rho) \kappa d\kappa, \quad (30)$$

где $r^2 = x^2 + \rho^2$. В частном случае $x = 0$ формула (30) переходит в выведенную выше формулу (24).

Если поле $f(r)$ является однородным и для него существует корреляционная функция $B(r)$, ее можно выразить через $F(\kappa_2, \kappa_3, x)$ при помощи легко доказываемой формулы

$$B(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \cos(\kappa_2 y + \kappa_3 z) F(\kappa_2, \kappa_3, x) d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (31)$$

В случае, если поле $f(r)$ изотропно в плоскости $x = \text{const}$, мы получаем отсюда

$$B(r) = 2\pi \int_0^{\infty} F(\kappa, x) J_0(\kappa \rho) \kappa d\kappa. \quad (32)$$

Мы будем в дальнейшем часто пользоваться формулой, получаемой отсюда при $x = 0$ для корреляционной функции в плоскости, перпендикулярной оси x :

$$B(\rho) = 2\pi \int_0^{\infty} F(\kappa, 0) J_0(\kappa \rho) \kappa d\kappa. \quad (33)$$

Рассмотрим примеры.

1) Структурная функция однородного и изотропного случайного поля, рассмотренного в примере 3) предыдущего параграфа, может быть выражена через его корреляционную функцию

при помощи формулы

$$D(r) = 2B(0) - 2B(r).$$

Подставляя сюда

$$B(r) = \frac{a^2}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{r}{r_0}\right),$$

получим

$$D(r) = 2a^2 \left[1 - \frac{1}{2^{\nu-1}\Gamma(\nu)} \left(\frac{r}{r_0}\right)^\nu K_\nu\left(\frac{r}{r_0}\right) \right]. \quad (34)$$

Спектральная плотность, соответствующая (34), равна

$$\Phi(\kappa) = \frac{\Gamma\left(\nu + \frac{3}{2}\right)}{\pi \sqrt{\pi} \Gamma(\nu)} \frac{a^2 r_0^3}{(1 + \kappa^2 r_0^2)^{\nu + \frac{3}{2}}}. \quad (35)$$

При $r \ll r_0$

$$D(r) \approx 2a^2 \frac{\Gamma(1-\nu)}{\Gamma(1+\nu)} \left(\frac{r}{2r_0}\right)^{2\nu}, \text{ т. е. } D(r) \sim r^{2\nu}.$$

2) Рассмотрим структурную функцию

$$D(r) = C^2 r^\mu \quad (0 < \mu < 2). \quad (36)$$

Одномерная спектральная плотность, соответствующая этой функции (см. (38.3)), равна

$$V(\kappa) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi} \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) C^2 \kappa^{-(\mu+1)}. \quad (37)$$

Воспользуемся соотношением (17) и найдем трехмерную спектральную плотность $\Phi(\kappa)$:

$$\Phi(\kappa) = \frac{\Gamma(\mu+2)}{4\pi^2} \sin\left(\frac{\pi\mu}{2}\right) C^2 \kappa^{-(\mu+3)}. \quad (38)$$

Вычислим также двумерную спектральную плотность $F(\kappa, x)$, соответствующую структурной функции $C^2 r^\mu$. Подставляя выражение (38) в правую часть формулы (27) и производя интегрирование, получим

$$F(\kappa, x) = \frac{C^2}{\pi^2} \sin\frac{\pi\mu}{2} \cdot 2^{\frac{\mu}{2}-1} \Gamma\left(1 + \frac{\mu}{2}\right) \frac{(\kappa x)^{1 + \frac{\mu}{2}} K_{1 + \frac{\mu}{2}}(\kappa x)}{\kappa^{\mu+2}}. \quad (39)$$

Так как при $z \gg 1$

$$K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z},$$

то функция (39) при $\kappa x \gg 1$ быстро стремится к нулю, что соответствует указанному выше общему свойству функции $F(\kappa, x)$.

Рассмотренная в предыдущем примере структурная функция при

$$\nu = \frac{\mu}{2} \quad \text{и} \quad \frac{a^2}{r_0^{2\nu}} = \frac{2^{2\nu-1} \Gamma(1+\nu)}{\Gamma(1-\nu)} C^2$$

совпадает при $r \ll r_0$ со структурной функцией $C^2 r^\mu$. Спектры этих функций совпадают при $\kappa r_0 \gg 1$ (см. рис. 4, 5).

§ 6. Пространственно-временные случайные поля

Реальные метеорологические поля являются случайными функциями как во времени, так и в пространстве. Мы кратко остановимся на их описании, которое во многом подобно описанию рассмотренных выше вопросов.

Если действительное поле $f(\mathbf{r}, t)$ является стационарным во времени и однородным в пространстве, то для его описания может быть использована пространственно-временная корреляционная функция

$$B(\mathbf{r}, \tau) = \langle f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1, t + \tau) f(\mathbf{r}_1, t) \rangle \quad (1)$$

(предполагается, что $\langle f \rangle = 0$). $B(\mathbf{r}, \tau)$ четна как по \mathbf{r} , так и по τ , и удовлетворяет соотношению

$$|B(\mathbf{r}, \tau)| \leq B(0, 0)$$

и условию положительной определенности. $B(\mathbf{r}, \tau)$ может быть представлена в виде интеграла Фурье

$$B(\mathbf{r}, \tau) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \cos(\boldsymbol{\kappa} \mathbf{r} + \omega \tau) u(\boldsymbol{\kappa}, \omega) d^3 \boldsymbol{\kappa} d\omega, \quad (2)$$

где $u(\boldsymbol{\kappa}, \omega) \geq 0$ — четырехмерная (пространственно-временная) спектральная плотность. Положив в (2) $\tau = 0$, получим

$$B(\mathbf{r}, 0) = B(\mathbf{r}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \cos \boldsymbol{\kappa} \mathbf{r} \left[\int_{-\infty}^{\infty} u(\boldsymbol{\kappa}, \omega) d\omega \right] d^3 \boldsymbol{\kappa}. \quad (3)$$

Сравнивая (3) с формулой (7.4), получаем

$$\Phi(\mathbf{x}) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{x}, \omega) d\omega. \quad (4)$$

Аналогично, полагая в (2) $r = 0$, найдем

$$B(0, \tau) = B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \cos \omega \tau \left[\iiint_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{x}, \omega) d^3\mathbf{x} \right] d\tau, \quad (5)$$

откуда получаем соотношение

$$W(\omega) = \iiint_{-\infty}^{\infty} u(\mathbf{x}, \omega) d^3\mathbf{x}. \quad (6)$$

Само случайное поле $f(\mathbf{r}, t)$ в случае его стационарности и однородности представляется при помощи стохастического интеграла Фурье — Стильтьеса

$$f(\mathbf{r}, t) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mathbf{x}\mathbf{r} + \omega t)} Z(d^3\mathbf{x}, d\omega), \quad (7)$$

причем функция Z удовлетворяет условиям

$$\begin{aligned} \langle Z(d^3\mathbf{x}, d\omega) \rangle &= 0, \\ \langle Z(d^3\mathbf{x}, d\omega) Z^*(d^3\mathbf{x}', d\omega') \rangle &= \\ &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \delta(\omega - \omega') u(\mathbf{x}, \omega) d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}' d\omega d\omega'. \end{aligned} \quad (8)$$

В этом случае подстановка (7) в формулу (1) приводит к (2).

В качестве важного примера рассмотрим случай, когда все временные изменения $f(\mathbf{r}, t)$ связаны с переносом пространственного распределения поля с постоянной скоростью \mathbf{v} , причем перенос происходит без какой-либо эволюции («замороженное поле»). В этом случае

$$f(\mathbf{r}, t + t') = f(\mathbf{r} - \mathbf{v}t', t).$$

Подставляя эту формулу в (1), получим

$$\begin{aligned} B(\mathbf{r}, \tau) &= \langle f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1, t + \tau) f(\mathbf{r}_1, t) \rangle = \\ &= \langle f(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{v}t - \mathbf{v}\tau, 0) f(\mathbf{r}_1 - \mathbf{v}t, 0) \rangle = B(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau), \end{aligned}$$

т. е. для «замороженного» поля, перемещающегося со скоростью \mathbf{v} , выполняется соотношение

$$B(\mathbf{r}, \tau) = B(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau). \quad (9)$$

Легко проверить, что формула (9) эквивалентна соотношению

$$u(\mathbf{x}, \omega) = \delta(\omega + \mathbf{xv}) \Phi(\mathbf{x}) \quad (10)$$

между спектральными плотностями. Действительно, подставляя (10) в (2), получим (9).

Предположим, что поле $f(\mathbf{r}, t)$ статистически изотропно. В этом случае $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x)$. Введем в пространстве сферические координаты с полярной осью, направленной по вектору \mathbf{v} , и подставим (10) в (6):

$$W(\omega) = \int_0^{\infty} \kappa^2 d\kappa \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \delta(\kappa v \cos \theta + \omega) \Phi(\kappa). \quad (11)$$

Выполняя интегрирование по φ и вводя новую переменную $\cos \theta = \xi$, запишем (11) как

$$W(\omega) = 2\pi \int_0^{\infty} \kappa^2 \Phi(\kappa) d\kappa \int_{-1}^1 \delta(\kappa v x + \omega) dx. \quad (12)$$

Замечая, что

$$\delta(\kappa v x + \omega) = \frac{1}{\kappa v} \delta\left(x + \frac{\omega}{\kappa v}\right),$$

получим

$$\int_{-1}^1 \delta(\kappa v x + \omega) dx = \frac{1}{\kappa v} \int_{-1}^1 \delta\left(x + \frac{\omega}{\kappa v}\right) dx = \begin{cases} \frac{1}{\kappa v} & \text{при } \left|\frac{\omega}{\kappa v}\right| < 1, \\ 0 & \text{при } \left|\frac{\omega}{\kappa v}\right| > 1. \end{cases}$$

Подставляя это выражение в (12), найдем

$$W(\omega) = \frac{2\pi}{v} \int_{|\omega|/v}^{\infty} \Phi(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (13)$$

Дифференцируя (13), можно получить также соотношение

$$\Phi(\kappa) = -\frac{v^2}{2\pi\kappa} W'(\kappa v). \quad (14)$$

Формулы (13) и (14) связывают пространственный и временной (частотный) спектры изотропного «замороженного» случайного поля. Условия, при которых реальные поля в турбулентной среде можно считать замороженными, будут рассмотрены в разделе Б.

В случае, если поле $f(\mathbf{r}, t)$ является локально однородным по \mathbf{r} и обладает стационарными приращениями, оно описывается

структурной функцией

$$D(\mathbf{r}, \tau) = \langle \{ [f(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + \tau) - f(\mathbf{r}', t)] - \\ - \langle f(\mathbf{r} + \mathbf{r}', t + \tau) - f(\mathbf{r}', t) \rangle \}^2 \rangle. \quad (15)$$

$D(\mathbf{r}, \tau)$ может быть представлена разложением

$$D(\mathbf{r}, \tau) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\mathbf{xr} + \omega\tau)] u(\mathbf{x}, \omega) d^3\mathbf{x} d\omega. \quad (16)$$

Соотношения (4) и (6) остаются в силе и в этом случае. Само поле $f(\mathbf{r}, t)$ в этом случае представляется в виде стохастического интеграла Фурье — Стильтьеса

$$f(\mathbf{r}, t) = f(0, 0) + \mathbf{ar} + bt + \iiint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\mathbf{xr} + \omega t)} - 1] Z(d^3\mathbf{x}, d\omega), \quad (17)$$

причем $Z(d^3\mathbf{x}, d\omega)$ удовлетворяет соотношениям (8).

В случае локально изотропного поля со стационарными вращениями $\mathbf{a} = 0$ (см. § 5).

В случае «замороженного» локально изотропного случайного поля соотношение (9) заменяется на

$$D(\mathbf{r}, \tau) = D(\mathbf{r} - \mathbf{v}\tau), \quad (18)$$

а соотношения между спектрами (10), (13) и (14) не изменяются*).

§ 7. Локально однородные поля с плавно меняющимися средними характеристиками

До сих пор мы рассматривали локально однородные случайные поля, для которых структурная функция $D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ внутри некоторой области G с размерами порядка L_0 удовлетворяла условию $D(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = D(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$. В теории турбулентности мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что при $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \ll L_0$ структурные функции случайных полей имеют универсальный характер, т. е. одинаково зависят от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, независимо от того, в какой части турбулентной области помещаются точки $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$, если только эти точки достаточно близки друг к другу. При переходе к другой области G' в турбулентной среде, также имеющей размер порядка L_0 и удаленной от G на расстоянии порядка L_0 , вид

* Интересный пример случайного поля, пространственные и временные характеристики которого связаны ограничениями, вытекающими из волнового уравнения, рассмотрен в работе [12].

зависимости структурной функции от $r_1 - r_2$ не изменяется, однако может измениться общая интенсивность флуктуаций, т. е. численный коэффициент в $D(r_1, r_2)$. Мы приходим, таким образом, к формуле типа

$$D(r_1, r_2) = C^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) D_0(r_1 - r_2). \quad (1)$$

Здесь функция $C^2(R)$ описывает плавные изменения интенсивности флуктуаций при переходе от одной части турбулентной области к другой; она заметно меняется лишь при изменении R на величину порядка L_0 . Функция $D_0(r_1 - r_2)$ описывает локальную структуру случайного поля и одинакова во всех областях G, G', \dots . Функция $D_0(r)$ имеет смысл лишь при $r \ll L_0$. Однако, если чисто формально распространить функцию $D_0(r)$ и на большие значения аргумента, мы получим возможность написать спектральное разложение этой функции

$$D_0(r) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \kappa r] \Phi_0(\kappa) d^3\kappa. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), получим

$$D(r_1, r_2) = 2C^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \kappa (r_1 - r_2)] \Phi_0(\kappa) d^3\kappa. \quad (3)$$

Эту формулу можно записать в виде

$$D(r_1, r_2) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \kappa (r_1 - r_2)] \Phi \left(\kappa, \frac{r_1 + r_2}{2} \right) d^3\kappa, \quad (4)$$

где

$$\Phi \left(\kappa, \frac{r_1 + r_2}{2} \right) = C^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) \Phi_0(\kappa). \quad (5)$$

Таким образом, относительное распределение флуктуаций величины f по спектру одинаково во всех областях G, G', \dots и описывается функцией $\Phi_0(\kappa)$; от области к области меняется лишь общая интенсивность флуктуаций, выражаемая величиной

$$C^2 \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right).$$

Можно, как и выше, ввести двумерную спектральную плотность

$$F_f \left(\kappa_2, \kappa_3, x - x', \frac{r + r'}{2} \right),$$

связанную с функциями

$$D_f(r, r') \text{ и } \Phi_f\left(x, \frac{r+r'}{2}\right)$$

соотношениями, аналогичными (22.5) — (28.5):

$$\begin{aligned} F_f\left(x_2, x_3, x-x', \frac{r+r'}{2}\right) &= \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cos [x_1(x-x')] \Phi_f\left(x_1, x_2, x_3, \frac{r+r'}{2}\right) dx. \end{aligned} \quad (6)$$

(В (4)—(6) мы пренебрегаем различием между значениями $C_f^2\left(\frac{r_1+r_2}{2}\right)$ в двух близких точках, удаленных друг от друга на расстояние $|r_1 - r_2| \ll L_0$, поскольку эта функция заметно меняется лишь при изменении ее аргумента на величину порядка L_0 .)

Остановимся кратко на спектральном разложении самого случайного поля $f(r)$. Для простоты рассмотрим пример, когда существует корреляционная функция флуктуаций f вида

$$B_f(r, r') = \sigma_f^2 \left(\frac{r+r'}{2}\right) b_f(|r-r'|).$$

(Подобные вопросы рассматривались Сильверманом [166].)

Пусть $f(r)$ выражается стохастическим интегралом Фурье — Стильтьеса

$$f(r) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa r} Z(d^3\kappa) \quad (7)$$

(предполагается, что $\langle f \rangle = 0$).

Рассмотрим выражение $\langle f(r) f(r') \rangle = B_f(r, r')$:

$$\langle f(r) f^*(r') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa r - \kappa' r')} \langle Z(d^3\kappa) Z^*(d^3\kappa') \rangle. \quad (8)$$

Введем координаты

$$\rho = r - r', \quad R = \frac{1}{2}(r + r').$$

Тогда

$$\kappa r - \kappa' r' = (\kappa - \kappa') R + \frac{1}{2}(\kappa + \kappa') \rho$$

и

$$\langle f(\mathbf{r}) f^*(\mathbf{r}') \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \cdot \mathbf{R}} e^{i \frac{\mathbf{x}+\mathbf{x}'}{2} \cdot \rho} \langle Z(d^3 \mathbf{x}) Z^*(d^3 \mathbf{x}') \rangle. \quad (9)$$

Согласно предположению

$$\langle f(\mathbf{r}) f^*(\mathbf{r}') \rangle = \sigma_f^2(\mathbf{R}) b_f(\rho).$$

Отсюда следует, что

$$\langle Z(d^3 \mathbf{x}) Z^*(d^3 \mathbf{x}') \rangle = M(\mathbf{x} - \mathbf{x}') \Phi_f^{(0)}\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}'}{2}\right) d^3 \mathbf{x} d^3 \mathbf{x}', \quad (10)$$

причем, очевидно, $M(0) \geq 0$ и $\Phi_f^{(0)}(\mathbf{x}) \geq 0$. Подставляя это выражение в (9) и производя замену переменных, получим

$$\sigma_f^2(\mathbf{R}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} M(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}} d^3 \mathbf{x}, \quad (11)$$

$$b_f(\rho) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_f^{(0)}(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x} \cdot \rho} d^3 \mathbf{x}. \quad (12)$$

В случае, когда $\sigma_f^2 = \text{const}$, $M(\mathbf{x} - \mathbf{x}') = \sigma_f^2 \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ и формула (10) переходит в (5.5). Как следует из (10), в случае переменного σ_f^2 появляется корреляция между близкими спектральными компонентами $Z(d^3 \mathbf{x})$ и $Z^*(d^3 \mathbf{x}')$: если $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \lesssim L_0^{-1}$, то $\langle Z(d^3 \mathbf{x}) Z^*(d^3 \mathbf{x}') \rangle \neq 0$. (Как следует из (11), функция $M(\mathbf{x})$ заметно отлична от нуля на интервале порядка L_0^{-1} , поскольку $\sigma_f(\mathbf{R})$ заметно меняется на интервале порядка L_0 .)

§ 8. Векторные случайные поля

В дальнейшем мы часто будем иметь дело с векторными случайными полями, такими как поле скоростей в турбулентном потоке, электромагнитное поле, распространяющееся в турбулентной среде, и т. д.

Описание статистической структуры векторного случайного поля во многом аналогично описанию скалярного поля. Можно было бы ввести корреляционные или структурные функции для каждой из компонент векторного поля. Однако такие корреляционные функции не позволят описывать связь между различными компонентами поля и необходимо рассмотреть также взаимные корреляции между различными компонентами. Таким обра-

зом, мы приходим к необходимости рассмотреть корреляционный тензор

$$B_{ik}(\mathbf{r}) = \langle [v_i(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) - \langle v_i(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) \rangle] [v_k(\mathbf{r}_1) - \langle v_k(\mathbf{r}_1) \rangle] \rangle. \quad (1)$$

В дальнейшем мы будем считать $\langle v_k \rangle = 0$, т. е. будем рассматривать отклонения поля от своего среднего значения. Для описания локально изотропных полей будем употреблять структурный тензор

$$D_{ik}(\mathbf{r}) = \langle [v_i(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) - v_i(\mathbf{r}_1)] [v_k(\mathbf{r} + \mathbf{r}_1) - v_k(\mathbf{r}_1)] \rangle. \quad (2)$$

Для статистически однородного поля B_{ik} и D_{ik} связаны соотношением

$$D_{ik}(\mathbf{r}) = 2B_{ik}(0) - 2B_{ik}(\mathbf{r}). \quad (3)$$

Рассмотрим статистически изотропное (локально изотропное) векторное поле.

В изотропном скалярном поле величина $\langle f(\mathbf{r}_1) f(\mathbf{r}_2) \rangle$ не зависит от ориентации вектора $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. В случае же векторных полей понятие изотропности является несколько более сложным. Рассмотрим, например, величину $B_{11}(\mathbf{r}) = \langle v_1(\mathbf{r}_1) v_1(\mathbf{r}_2) \rangle$. Здесь $v_1(\mathbf{r}_k)$ — проекция вектора $\mathbf{v}(\mathbf{r}_k)$ на ось x_1 . Пусть точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 расположены вдоль оси x_1 . Тогда B_{11} представляет собой корреляцию продольных (по отношению к вектору $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$) компонент вектора \mathbf{v} . Повернем теперь вектор \mathbf{r} вокруг точки \mathbf{r}_1 на угол $\pi/2$, так чтобы точки \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 расположились вдоль оси x_2 . В этом случае $v_1(\mathbf{r}_1)$ и $v_1(\mathbf{r}_2)$ по-прежнему являются проекциями \mathbf{v} на направления оси x_1 . Но теперь вектор \mathbf{r} перпендикулярен этой оси, так что $B_{11}(\mathbf{r})$ уже представляет собой корреляцию поперечных (по отношению к \mathbf{r}) компонент вектора \mathbf{v} . Ясно, что в рассмотренных двух случаях величины B_{11} не должны совпадать между собой, так как взаимное расположение рассматриваемых компонент вектора \mathbf{v} относительно вектора \mathbf{r} изменилось. Поэтому в статистически изотропном векторном поле каждая компонента $B_{jk}(\mathbf{r})$ должна зависеть от ориентации вектора \mathbf{r} .

Пусть теперь в точке \mathbf{r}_1 задан единичный произвольно ориентированный вектор \mathbf{l} , а в точке \mathbf{r}_2 — единичный вектор \mathbf{m} . Ориентацию вектора \mathbf{r} будем характеризовать единичным вектором \mathbf{n} , направленным вдоль \mathbf{r} , т. е. $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r}$, где $r = |\mathbf{r}|$. Рассмотрим корреляцию проекций $\mathbf{l}\mathbf{v}(\mathbf{r}_1)$ и $\mathbf{m}\mathbf{v}(\mathbf{r}_2)$ поля \mathbf{v} в этих двух точках на направления \mathbf{l} и \mathbf{m} соответственно:

$$\begin{aligned} B &= \langle (\mathbf{l}\mathbf{v}(\mathbf{r}_1)) \cdot (\mathbf{m}\mathbf{v}(\mathbf{r}_2)) \rangle = \langle l_k v_k(\mathbf{r}_1) m_j v_j(\mathbf{r}_2) \rangle = \\ &= l_k m_j \langle v_k(\mathbf{r}_1) v_j(\mathbf{r}_2) \rangle = l_k m_j B_{kj}(\mathbf{r}). \end{aligned}$$

Повернем теперь одновременно все три вектора \mathbf{n} , \mathbf{l} , \mathbf{m} при фиксированном r как жесткое целое на произвольный угол. При этом взаимная ориентация векторов \mathbf{n} , \mathbf{l} , \mathbf{m} не меняется, т. е. сохраняются скалярные произведения $\mathbf{n}\mathbf{l}$, $\mathbf{n}\mathbf{m}$, $\mathbf{l}\mathbf{m}$. Ясно, что если поле $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ статистически изотропно, то величина B в результате поворота не изменится. Требование инвариантности выражения

$$B = l_k m_j B_{kj}(\mathbf{r})$$

относительно одновременного поворота всех трех векторов \mathbf{n} , \mathbf{l} , \mathbf{m} и является определением статистически изотропного векторного поля.

Так как при повороте сохраняются лишь величины r , $\mathbf{n}\mathbf{l}$, $\mathbf{m}\mathbf{n}$, $\mathbf{l}\mathbf{m}$, то B может зависеть только от них:

$$l_k m_j B_{kj}(\mathbf{r}) = B(r, \mathbf{l}\mathbf{n}, \mathbf{m}\mathbf{n}, \mathbf{l}\mathbf{m}).$$

Но левая часть равенства линейна как по компонентам вектора \mathbf{l} , так и по компонентам вектора \mathbf{m} . Поэтому правая часть этого равенства может содержать $\mathbf{l}\mathbf{m}$ лишь линейно, а величины $\mathbf{l}\mathbf{n}$, $\mathbf{m}\mathbf{n}$ — только в виде их произведения. Следовательно, B должно иметь вид

$$\begin{aligned} B(r, \mathbf{l}\mathbf{n}, \mathbf{m}\mathbf{n}, \mathbf{l}\mathbf{m}) &= P(r)(\mathbf{l}\mathbf{m}) + Q(r)(\mathbf{l}\mathbf{n})(\mathbf{m}\mathbf{n}) = \\ &= P(r)l_j m_j + Q(r)l_k n_k m_j n_j = l_k m_j [P(r)\delta_{kj} + Q(r)n_k n_j]. \end{aligned}$$

Сравнивая это выражение с формулой $B = l_k m_j B_{kj}(\mathbf{r})$ и учитывая произвольность l_k, m_j , получаем формулу

$$B_{kj}(\mathbf{r}) = P(r)\delta_{kj} + Q(r)n_k n_j, \quad (4)$$

которая дает общий вид изотропного тензора второго ранга. Аналогичные рассуждения можно применить и к структурному тензору поля \mathbf{v} (здесь придется рассматривать не значения поля \mathbf{v} в точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , а разности полей в этих точках). Поэтому для D_{jk} получим

$$D_{jk}(\mathbf{r}) = R(r)\delta_{jk} + S(r)n_j n_k. \quad (5)$$

Другой, более формальный вывод выражений (4) и (5) основан на том, что в случае изотропного поля \mathbf{v} выражение для $B_{ik}(\mathbf{r})$ может содержать лишь единичный вектор вдоль направления \mathbf{r} и единственный изотропный тензор δ_{jk} и не может содержать никакого другого вектора или тензора, так как с ними было бы связано выделение некоторого направления в пространстве, что противоречит предположению об изотропности. Единственное же выражение для тензора второго ранга, содержащее только n_j и δ_{jk} , имеет вид (4). Функции $P(r)$, $Q(r)$, $R(r)$, $S(r)$, входя-

щие в формулы (4), (5), являются скалярными функциями скалярного аргумента $r = |\mathbf{r}|$.

Таким образом, если в общем случае тензор второго ранга имеет девять независимых компонент, а симметричный тензор — шесть компонент, то условия изотропности сводят число независимых компонент до двух.

Направим ось $z = x_3$ системы координат вдоль вектора \mathbf{n} . Тогда компоненты вектора \mathbf{n} будут равны $\{0, 0, 1\}$. Полагая в формулах (4), (5) индексы j, k равными одновременно 1 или 2, получим

$$B_{11} = B_{22} = P, \quad D_{11} = D_{22} = R.$$

При $j = k = 3$ будем иметь

$$B_{33} = P + Q, \quad D_{33} = R + S.$$

Поперечные компоненты B_{11}, B_{22} равны между собой. Обычно они обозначаются символами

$$B_{11} = B_{22} = B_{tt}, \quad D_{11} = D_{22} = D_{tt}.$$

Продольная компонента B_{33}, D_{33} обычно обозначается символом B_{rr}, D_{rr} . Выражая функции P, R, Q, S через $B_{rr}, B_{tt}, D_{rr}, D_{tt}$ и подставляя эти выражения в (4), (5), получим формулы

$$B_{ik}(\mathbf{r}) = B_{tt}(r) \delta_{ik} + [B_{rr}(r) - B_{tt}(r)] n_i n_k, \quad (4')$$

$$D_{ik}(\mathbf{r}) = D_{tt}(r) \delta_{ik} + [D_{rr}(r) - D_{tt}(r)] n_i n_k. \quad (5')$$

Как известно из теории векторных полей, всякое достаточно гладкое векторное поле может быть разложено на потенциальную и соленоидальную части. Аналогичное разложение существует и для случайных полей. Рассмотрим сначала соленоидальное векторное поле. Примером такого поля может служить поле скоростей в несжимаемой жидкости или поле магнитной индукции. Соленоидальное поле удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\partial v_i(\mathbf{r})}{\partial x_i} = 0. \quad (6)$$

(В дальнейшем мы не будем ставить знак суммирования по дважды повторяющимся тензорным индексам, который всегда подразумевается, если это не оговорено специально. Так, $\operatorname{div} \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i}$ в тензорной записи имеет вид $\frac{\partial v_i}{\partial x_i}$. Индексы в выражениях $B_{rr}, B_{tt}, D_{rr}, D_{tt}$ не являются тензорными и по ним суммирование не проводится.)

Продифференцируем выражение

$$B_{ik}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle v_i(\mathbf{r}_1) v_k(\mathbf{r}_2) \rangle$$

(напоминаем, что $\langle v \rangle = 0$) по координатам точки $(\mathbf{r}_1)_j$, а затем произведем суммирование (свертывание) по индексам i, j . Учитывая условие соленоидальности (6), получим

$$\frac{\partial B_{ik}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial x_{1i}} = \left\langle \frac{\partial v_i(\mathbf{r}_1)}{\partial x_{1i}} v_k(\mathbf{r}_2) \right\rangle = 0.$$

Но дифференцирование выражения $B_{ik}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$ по координатам \mathbf{r}_1 эквивалентно дифференцированию по $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$. Поэтому корреляционный тензор соленоидального векторного поля удовлетворяет условию:

$$\frac{\partial B_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial B_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_k} = 0. \quad (7)$$

Аналогичному условию удовлетворяет и структурный тензор локально однородного случайного поля. Проще всего его можно получить, дифференцируя соотношение (3) и подставляя в него (7):

$$\frac{\partial D_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_i} = 0, \quad \frac{\partial D_{ik}(\mathbf{r})}{\partial x_k} = 0. \quad (8)$$

Условие (8) получено для структурного тензора статистически однородного поля, но оно выполняется и в случае локально однородного поля, когда корреляционный тензор уже не существует.

Воспользовавшись условиями (7) и (8), мы можем в случае статистически изотропных (локально изотропных) полей установить связь между поперечными и продольными компонентами тензоров B_{ik} , D_{ik} . Дифференцируя соотношения (4') и (5') и учитывая формулы

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial x_i} &= \frac{\partial \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}}{\partial x_i} = \frac{x_i}{r} = n_i, \\ \frac{\partial n_k}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{x_k}{r} \right) = \frac{\delta_{ik}}{r} - \frac{x_k}{r^2} n_i = \frac{\delta_{ik} - n_i n_k}{r}, \\ \frac{\partial n_i}{\partial x_i} &= \frac{\delta_{ii} - n_i n_i}{r} = \frac{3 - 1}{r} = \frac{2}{r}, \\ n_i \frac{\partial n_k}{\partial x_i} &= n_i \frac{\delta_{ik} - n_i n_k}{r} = \frac{n_k - n_k}{r} = 0, \end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_i} = B'_{ii} n_k + [B'_{rr} - B'_{ii}] n_k + [B_{rr} - B_{ii}] \frac{2}{r} n_k.$$

Отсюда следует, что

$$B'_{rr} + \frac{2}{r} B_{rr} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 B_{rr}) = \frac{2}{r} B_{tt}$$

или

$$B_{tt}(r) = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 B_{rr}). \quad (9)$$

Аналогичная связь имеется и между компонентами структурного тензора

$$D_{tt}(r) = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 D_{rr}). \quad (10)$$

Соотношения (9), (10), полученные впервые Карманом, позволяют выразить поперечную компоненту корреляционного (структурного) тензора соленоидального статистически однородного и изотропного (локально однородного и изотропного) векторного поля через его продольную компоненту и сводят, таким образом, число независимых компонент до одной.

Рассмотрим совокупность соленоидального векторного статистически однородного и изотропного поля (или локально изотропного поля) и скалярного однородного и изотропного поля (локально изотропного поля) $A(\mathbf{r})$. Рассмотрим корреляционную функцию

$$B_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle v_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1) A(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (11)$$

Так как в случае изотропных полей не существует никакого выделенного направления в пространстве, то вектор $B_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ может быть направлен лишь вдоль векторного аргумента рассматриваемой корреляционной функции \mathbf{r} . Таким образом,

$$B_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = B(r) n_{\mathbf{k}},$$

где $B(r)$ является скалярной функцией скалярного аргумента r . Дифференцируя равенство (11) и учитывая условие соленоидальности (6), получаем

$$\frac{\partial B_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial x_{k1}} = \frac{\partial B_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})}{\partial x_{\mathbf{k}}} = 0.$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial B_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})}{\partial x_{\mathbf{k}}} &= B'(r) n_{\mathbf{k}} n_{\mathbf{k}} + B(r) \frac{\partial n_{\mathbf{k}}}{\partial x_{\mathbf{k}}} = B'(r) + \frac{2}{r} B(r) = \\ &= \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^2 B(r)] = 0. \end{aligned}$$

Интегрируя последнее уравнение, получаем $r^2 B(r) = \text{const}$, откуда

$$B_k(r) = \frac{\text{const}}{r^2} n_k.$$

Очевидно, что при $r = 0$ функция $B_k(r)$ должна оставаться конечной. Отсюда вытекает, что константа в выражении для B_k должна быть равна нулю, т. е. выполняется соотношение

$$B_k(r_1 - r_2) = \langle v_k(r_1) A(r_2) \rangle = 0. \quad (12)$$

Таким образом, статистически изотропные скалярное поле и соленоидальное векторное поле обладают равным нулю взаимным коэффициентом корреляции. Аналогичное равенство может быть установлено и для локально изотропных полей

$$D_k(r_1 - r_2) = \langle [v_k(r_1) - v_k(r_2)] [A(r_1) - A(r_2)] \rangle = 0. \quad (13)$$

Рассмотрим теперь статистически однородное и изотропное потенциальное векторное поле. Примером такого поля, рассмотрением которого мы и ограничимся, является градиент скалярного статистически однородного и изотропного поля. Пусть

$$u_k(r) = \frac{\partial A(r)}{\partial x_k},$$

где $A(r)$ — однородное и изотропное скалярное поле с корреляционной функцией

$$\langle A(r_1) A(r_2) \rangle = R(|r_1 - r_2|) \quad (\langle A \rangle = 0).$$

Дифференцируя это равенство по координатам точек r_1 и r_2 , получим

$$\left\langle \frac{\partial A(r_1)}{\partial x_{i1}} \frac{\partial A(r_2)}{\partial x_{k2}} \right\rangle = \langle u_i(r_1) u_k(r_2) \rangle = \frac{\partial^2 R(|r_1 - r_2|)}{\partial x_{i1} \partial x_{k2}} = - \frac{\partial^2 R(r)}{\partial x_i \partial x_k},$$

т. е.

$$B_{ik}(r) = - \frac{\partial^2 R(r)}{\partial x_i \partial x_k}.$$

Выполняя дифференцирование, будем иметь

$$B_{ik}(r) = - \left(R'' - \frac{R'}{r} \right) n_i n_k - \frac{R'}{r} \delta_{ik}.$$

С другой стороны, тензор B_{ik} должен иметь вид (4'); сравнивая эти выражения, найдем

$$B_{ii} = - \frac{R'}{r}, \quad B_{rr} = - R''.$$

Исключая отсюда функцию R , получим соотношение между поперечной и продольной составляющими корреляционного тензора потенциального однородного и изотропного векторного поля

$$B_{rr}(r) = \frac{d[rB_{tt}(r)]}{dr}. \quad (14)$$

Аналогично

$$D_{rr}(r) = [rD_{tt}(r)]'.$$

Соотношение (14) получено А. М. Обуховым [2].

Формулы (9) и (14) позволяют произвести разложение статистически однородного и изотропного векторного поля, корреляционные функции которого убывают на бесконечности, на потенциальную и соленоидальную части. Пусть B_{rr} , B_{tt} — продольная и поперечная корреляционные функции исходного поля. Положим

$$\left. \begin{aligned} B_{rr}(r) &= B_{rr}^{(p)}(r) + B_{rr}^{(s)}(r), \\ B_{tt}(r) &= B_{tt}^{(p)}(r) + B_{tt}^{(s)}(r), \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

где индексами p и s отмечены потенциальная и соленоидальная составляющие. Согласно (9) и (14) они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} B_{tt}^{(s)}(r) &= \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} [r^2 B_{rr}^{(s)}(r)], \\ B_{rr}^{(p)}(r) &= \frac{d}{dr} [r B_{tt}^{(p)}(r)]. \end{aligned}$$

Вместе с соотношениями (15) эти уравнения достаточны для нахождения по заданным $B_{rr}(r)$ и $B_{tt}(r)$ четырех функций $B_{tt}^{(s)}$, $B_{rr}^{(s)}$, $B_{tt}^{(p)}$, $B_{rr}^{(p)}$. При выполнении условий $B_{tt}(r)$, $B_{rr}(r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$ рассматриваемая система уравнений имеет единственное решение [2]. Потенциальная и соленоидальная компоненты поля оказываются некоррелированными друг с другом, так как имеет место общая теорема о некоррелированности статистически однородных и изотропных соленоидального и потенциального полей. Действительно, если $v_k(r)$ — соленоидальное поле и $u_k(r) = \frac{\partial A(r)}{\partial x_k}$ — потенциальное поле, то согласно (12)

$$\langle v_k(r_1) u_j(r_2) \rangle = \left\langle v_k(r_1) \frac{\partial A(r_2)}{\partial x_{2j}} \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_{2j}} \langle v_k(r_1) A(r_2) \rangle = 0,$$

т. е.

$$\langle v_k(r_1) u_j(r_2) \rangle = 0. \quad (16)$$

Рассмотрим теперь спектральные разложения корреляционных и структурных функций для однородных и изотропных (локально однородных и изотропных) векторных полей. Они определяются формулами

$$B_{ik}(r) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{r} \Phi_{ik}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \quad (17)$$

$$D_{ik}(r) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \mathbf{x} \cdot \mathbf{r}] \Phi_{ik}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (18)$$

Поскольку в пространстве волновых чисел в случае изотропных полей нет никакого выделенного направления, то Φ_{ik} имеет вид

$$\Phi_{ik}(\mathbf{x}) = F(x) \delta_{ik} + G(x) x_i x_k, \quad (19)$$

где F и G — скалярные функции скалярного аргумента x . Найдем вид спектрального тензора для соленоидального поля. Подставляя (19) в (7), получим уравнение

$$\frac{\partial B_{ik}(r)}{\partial x_k} = - \iiint \sin(\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}) x_k \Phi_{ik}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = 0,$$

из которого следует, что должно выполняться равенство

$$x_k \Phi_{ik}(\mathbf{x}) = 0. \quad (20)$$

Такое же равенство получается и при подстановке (18) в (8). Подставим (19) в уравнение (20):

$$x_i F + x_i x^2 G = 0.$$

Из этого равенства мы можем выразить функцию G через F , и в результате выражение для Φ_{ik} приобретает вид

$$\Phi_{ik}(\mathbf{x}) = \left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{x^2} \right) F(x). \quad (21)$$

Тензор $\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{x^2}$ представляет собой оператор проектирования на направление, перпендикулярное вектору \mathbf{x} .

Корреляционный тензор потенциального векторного поля удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial B_{ik}(r)}{\partial x_j} - \frac{\partial B_{ij}(r)}{\partial x_k} = 0, \quad (22)$$

которое может быть легко получено из условия потенциальности случайного поля $\text{rot } \mathbf{u} = 0$, подобно тому как уравнение (7) было выведено из (6). Подставляя (17) в уравнение (22), получим

$$\kappa_j \Phi_{ik}(\mathbf{x}) - \kappa_k \Phi_{ij}(\mathbf{x}) = 0. \quad (23)$$

Если использовать теперь выражение (19), то условие (23) приводит к равенству $F = 0$. Таким образом, спектральный тензор потенциального однородного и изотропного векторного поля имеет вид

$$\Phi_{ik}(\mathbf{x}) = \kappa_i \kappa_k G(\mathbf{x}). \quad (24)$$

Рассмотрим теперь спектральные разложения продольной и поперечной структурных функций. Свертывая (5') по индексам i, k , получим

$$D_{ii} = 2D_{tt} + D_{rr}.$$

Свертывание формулы (18) приводит к выражению

$$D_{ii}(\mathbf{r}) = 2D_{tt}(\mathbf{r}) + D_{rr}(\mathbf{r}) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \mathbf{xr}] \Phi_{ii}(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}.$$

Но след тензора спектральной плотности $\Phi_{ii}(\mathbf{x})$ является функцией лишь от модуля волнового числа \mathbf{x} . Поэтому в интеграле можно ввести сферические координаты и выполнить в явном виде интегрирование по угловым переменным. В результате получаем

$$D_{ii}(\mathbf{r}) = 2D_{tt}(\mathbf{r}) + D_{rr}(\mathbf{r}) = 8\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \mathbf{xr}}{\mathbf{xr}}\right) \Phi_{ii}(\mathbf{x}) \mathbf{x}^2 d\mathbf{x}. \quad (25)$$

Дальнейшие вычисления проведем отдельно для соленоидальных и потенциальных полей.

1) **Соленоидальные поля.** В этом случае D_{tt} и D_{rr} связаны соотношением (10). Следовательно,

$$D_{ii}(\mathbf{r}) = D_{rr} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} [r^2 D_{rr}] = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} [r^3 D_{rr}(\mathbf{r})].$$

Интегрируя это дифференциальное уравнение и учитывая, что $D_{rr}(0) = 0$, получим

$$D_{rr}(\mathbf{r}) = \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho^2 D_{ii}(\rho) d\rho. \quad (26)$$

Подставим в правую часть (26) спектральное разложение (25), изменим порядок интегрирования по ρ и \mathbf{x} и выполним

интегрирование по ρ . В результате получаем формулу

$$\begin{aligned} D_{rr}(r) &= 8\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{3} + \frac{\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3} \right] \Phi_{ii}(\kappa) \kappa^2 d\kappa = \\ &= 16\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{3} + \frac{\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3} \right] F(\kappa) \kappa^2 d\kappa, \end{aligned} \quad (27)$$

причем в последнем равенстве было использовано вытекающее из (21) соотношение $\Phi_{ii} = 2F$. Спектральное разложение функции $D_{ii}(r)$ можно получить, взяв полуразность выражений (25) и (27):

$$\begin{aligned} D_{ii}(r) &= 4\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{2}{3} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r} - \frac{\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} + \frac{\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3} \right] \Phi_{ii}(\kappa) \kappa^2 d\kappa = \\ &= 8\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{2}{3} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r} - \frac{\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} + \frac{\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3} \right] F(\kappa) \kappa^2 d\kappa. \end{aligned} \quad (28)$$

Заметим, что при $\kappa r \rightarrow 0$ выражение в квадратных скобках в (27) приблизительно равно $\frac{1}{30} \kappa^2 r^2$, а соответствующее выражение в (28) равно $\frac{4}{30} \kappa^2 r^2$. Поэтому интегралы в (27) и (28) сходятся в нуле даже в тех случаях, когда функция $F(\kappa)$ имеет в нуле степенную особенность типа $\kappa^{-\alpha}$, где $\alpha < 5$.

2) **Потенциальные поля.** В этом случае аналогичные вычисления приводят к формулам

$$D_{ii}^{(p)}(r) = \frac{1}{r^3} \int_0^r \rho^2 D_{ii}(\rho) d\rho, \quad (29)$$

$$D_{ii}^{(p)}(r) = 8\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{3} + \frac{\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3} \right] \Phi_{ii}(\kappa) \kappa^2 d\kappa, \quad (30)$$

$$D_{rr}^{(p)}(r) = 8\pi \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{3} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r} - \frac{2\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} + \frac{2\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3} \right] \Phi_{ii}(\kappa) \kappa^2 d\kappa. \quad (31)$$

При $\kappa r \rightarrow 0$ выражение в квадратных скобках в последней формуле стремится к нулю как $\frac{1}{10} \kappa^2 r^2$.

Б. МИКРОСТРУКТУРА ТУРБУЛЕНТНОГО ПОТОКА

Как известно, при больших числах Рейнольдса $Re = \frac{vl}{\nu}$ (v — характерная скорость, l — характерный масштаб потока и ν — кинематическая вязкость жидкости или газа) движение имеет турбулентный характер. В отличие от ламинарного потока, где скорость движения является детерминированной функцией, в турбулентном потоке скорость является случайной функцией координат и времени. Это означает, что при многократном повторении (при фиксированных внешних условиях) экспериментов с турбулентным течением мы каждый раз будем получать новые реализации поля скоростей.

Турбулентное течение жидкости или газа описывается при помощи уравнений гидродинамики: уравнения Навье — Стокса и уравнения неразрывности. С большой точностью для описания турбулентного движения можно использовать модель несжимаемой жидкости (это допустимо в случае, если скорости движения малы по сравнению со скоростью звука c и отношение характерного масштаба, на котором происходит заметное изменение скорости, ко времени, за которое происходит это изменение, также мало по сравнению с c).

В некоторых простейших случаях на основании этих уравнений удастся решить задачу об устойчивости движения и найти значение критического числа Рейнольдса (см., например, [164]).

При возникновении турбулентного движения в результате дробления вихрей на все более и более мелкие происходит перераспределение кинетической энергии движения — она передается от крупномасштабных компонент движения мелкомасштабным. А. Н. Колмогоровым была высказана гипотеза о том, что структура движения в малых масштабах обладает важным свойством — локальной однородностью и изотропностью. Эта гипотеза позволила в значительной степени упростить описание мелкомасштабной турбулентности и привела к существенному продвижению теории.

§ 9. Структурные и спектральные функции поля скоростей в турбулентном потоке

Как уже отмечалось, турбулентное движение с большой степенью точности можно считать несжимаемым при тех реальных скоростях и периодах движений, которые наблюдаются в атмосфере. Кроме того, согласно гипотезе Колмогорова поле скоростей в области малых масштабов можно считать локально однородным и изотропным.

Из условия несжимаемости

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

следует, что поле скоростей является соленоидальным случайным полем. Поэтому для его описания можно применить развитый в предыдущем параграфе аппарат. Для структурных функций поля скоростей справедливы формулы (5'), (8), (10), (18), (21), (27) и (28) предыдущего параграфа.

Остановимся более подробно на связи спектральной плотности поля скоростей с кинетической энергией турбулентности. Предположим на время, что турбулентность однородна и изотропна. Тогда наряду со структурными функциями поля скоростей существуют и корреляционные функции. Формула, аналогичная (25.8) для следа корреляционного тензора поля скоростей, принимает вид

$$B_{ii}(\mathbf{r}) = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin \kappa r}{\kappa r} 2F(\kappa) \kappa^2 d\kappa.$$

Положив здесь $r = 0$, получим

$$B_{ii}(0) = 8\pi \int_0^{\infty} F(\kappa) \kappa^2 d\kappa.$$

Но при $r = 0$ имеет место равенство

$$B_{ii}(0) = \langle v_1^2 \rangle + \langle v_2^2 \rangle + \langle v_3^2 \rangle = \langle v^2 \rangle.$$

Обозначим через T среднюю кинетическую энергию единицы массы жидкости (в системе координат, движущейся вместе со средней скоростью потока). Тогда мы получаем разложение

$$T = \int_0^{\infty} 4\pi \kappa^2 F(\kappa) d\kappa.$$

Обычно в теории турбулентности вводят спектральную плотность средней кинетической энергии единицы массы жидкости согласно формуле

$$T = \int_0^{\infty} E(\kappa) d\kappa. \quad (2)$$

Выражая функцию F через E , получим

$$F(\kappa) = \frac{E(\kappa)}{4\pi \kappa^2}.$$

Спектральный тензор поля скоростей связан с $E(\kappa)$ формулой

$$\Phi_{ik}(\kappa) = \frac{1}{4\pi\kappa^2} \left(\delta_{ik} - \frac{\kappa_i\kappa_k}{\kappa^2} \right) E(\kappa), \quad (3)$$

а продольная и поперечная структурные функции выражаются через $E(\kappa)$ при помощи соотношений

$$D_{rr}(r) = 4 \int_0^\infty \left[\frac{1}{3} + \frac{\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3} \right] E(\kappa) d\kappa, \quad (4)$$

$$D_{ii}(r) = 2 \int_0^\infty \left[\frac{2}{3} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r} - \frac{\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} + \frac{\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3} \right] E(\kappa) d\kappa. \quad (5)$$

§ 10. Диссипация энергии в турбулентном потоке

Важной характеристикой турбулентного движения является величина энергии ε , переходящая в тепло за счет вязкости в единицу времени в единице массы жидкости. Эта величина равна (см. [13])

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \left[\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right]^2 = \nu \left[\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right].$$

Нас будет интересовать среднее значение скорости диссипации энергии $\langle \varepsilon \rangle$, которое мы также будем обозначать в дальнейшем через ε , опуская знак усреднения. Усредняя выражение для ε , получим

$$\varepsilon = \nu \left[\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle + \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right\rangle \right]. \quad (1)$$

Стоящие справа величины можно выразить через производные в нуле от структурных функций D_{ik} . Для этого запишем

$\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle$ в виде

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle = \lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0} \left\langle \frac{\partial v_i(\mathbf{r}_1)}{\partial x_{k1}} \frac{\partial v_i(\mathbf{r}_2)}{\partial x_{k2}} \right\rangle. \quad (2)$$

Преобразуем величину в правой части, используя однородность:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial v_i(\mathbf{r}_1)}{\partial x_{k1}} \frac{\partial v_i(\mathbf{r}_2)}{\partial x_{k2}} \right\rangle &= \frac{\partial}{\partial x_{k1}} \frac{\partial}{\partial x_{k2}} \langle v_i(\mathbf{r}_1) v_i(\mathbf{r}_2) \rangle = \\ &= \frac{\partial^2 B_{ii}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial x_{k1} \partial x_{k2}} = - \frac{\partial^2 B_{ii}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{\partial x_{k1} \partial x_{k1}} = - \frac{\partial^2 B_{ii}(r)}{\partial x_k^2}. \end{aligned} \quad (3)$$

Учитывая, что $\frac{\partial^2}{\partial x_k^2} = \Delta$ (оператор Лапласа) и равенство $\Delta B_{ii} = -\frac{1}{2} \Delta D_{ii}$, следующее из (3.8), получим

$$\left\langle \left(\frac{\partial v_i(\mathbf{r})}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle = \frac{1}{2} [\Delta D_{ii}(\mathbf{r})]_{r=0} = \frac{1}{2} \Delta D_{ii}(0). \quad (4)$$

Аналогично преобразуем и второе слагаемое в (1):

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right\rangle &= \lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0} \left\langle \frac{\partial v_i(\mathbf{r}_1)}{\partial x_{k_1}} \frac{\partial v_k(\mathbf{r}_2)}{\partial x_{i_2}} \right\rangle = \\ &= \lim_{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2| \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial x_{k_1}} \frac{\partial}{\partial x_{i_2}} B_{ik}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = 0 \quad (4') \end{aligned}$$

в силу уравнения $\frac{\partial B_{ik}}{\partial x_i} = 0$. Поэтому мы имеем окончательно

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \Delta D_{ii}(0). \quad (5)$$

Функция $D_{ii}(r)$ обладает свойствами $D_{ii}(0) = 0$ и $D'_{ii}(0) = 0$ (первое следует из определения структурной функции, а второе — из ее четности). Поэтому разложение в ряд Тейлора функции $D_{ii}(r)$ при малых r начинается с квадратичного члена:

$$D_{ii}(r) = ar^2 + \dots \quad (6)$$

Вычисляя $\Delta D_{ii} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dD_{ii}}{dr} \right)$, получим $\Delta D_{ii} = 6a + \dots$ и, следовательно, $\Delta D_{ii}(0) = 6a$. Подставляя это значение в (5), получим $\varepsilon = 3\nu a$, откуда $a = \frac{\varepsilon}{3\nu}$ и

$$D_{ii}(r) = \frac{\varepsilon}{3\nu} r^2 + \dots \quad (7)$$

Воспользуемся теперь формулой (26.8), выражающей D_{rr} через $D_{ii}(r)$. Подставляя в нее разложение (7) и производя интегрирование, получим

$$D_{rr}(r) = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2 + \dots \quad (8)$$

При помощи соотношения (10.8) связывающего D_{ii} и D_{rr} , найдем также разложение

$$D_{ii}(r) = \frac{2}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2 + \dots \quad (9)$$

Таким образом, вид структурных функций поля скорости при малых значениях r определяется скоростью диссипации кинетической энергии турбулентности ε и вязкостью ν .

Установим также связь между введенной в § 9 спектральной плотностью энергии $E(\kappa)$ и величиной ε . Дважды дифференцируя (7) и полагая затем $r = 0$, после чего все остальные (невыписанные в (7)) члены разложения обращаются в нуль, получаем

$$D_{ii}''(0) = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\nu}.$$

Воспользуемся теперь формулой (25.8). Разлагая $1 - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r}$ в ряд и подставляя $\Phi_{ii} = \frac{E(\kappa)}{2\pi\kappa^2}$, найдем

$$D_{ii}(r) = 4 \int_0^{\infty} \left(\frac{\kappa^2 r^2}{6} + \dots \right) E(\kappa) d\kappa.$$

Двакратно дифференцируя это выражение и полагая затем $r = 0$, имеем

$$D_{ii}''(0) = \frac{4}{3} \int_0^{\infty} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa = \frac{2}{3} \frac{\varepsilon}{\nu}.$$

Отсюда мы получаем важную формулу

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^{\infty} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa, \quad (10)$$

выражающую ε через $E(\kappa)$. Тот факт, что $D_{rr}(r) \sim r^2$ при малых r , эквивалентен сходимости интеграла (10). Так как в этом интеграле содержится быстро растущий множитель κ^2 , то для его сходимости необходимо, чтобы при больших κ функция $E(\kappa)$ убывала достаточно быстро (быстрее, чем κ^{-3}). Более подробное обсуждение смысла формулы (10) будет проведено ниже (см. § 12).

§ 11. Уравнение Колмогорова

Все сформулированные выше результаты были получены на основании соображений об изотропности и несжимаемости турбулентности и формулы для ε . Уравнение же Навье — Стокса

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta v_i, \quad (1)$$

где p — давление, ρ — плотность, не использовалось. Можно попытаться использовать это уравнение для того, чтобы получить дополнительное уравнение для структурной функции $D_{rr}(r)$. Это можно сделать, умножая (1) на $v_l(\mathbf{r})$ и затем усредняя получающееся уравнение. При этом члены $\langle v_l(\mathbf{r}') \frac{\partial v_i(\mathbf{r}')}{\partial t} \rangle$ и $\langle v_l(\mathbf{r}') \Delta v_i(\mathbf{r}') \rangle$ могут быть преобразованы в $\frac{\partial D_{il}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ и $\Delta D_{il}(\mathbf{r}, t)$. Однако нелинейный член уравнения $v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ после умножения на $v_l(\mathbf{r}')$ будет содержать выражение типа $\langle v_l(\mathbf{r}') v_k(\mathbf{r}') v_i(\mathbf{r}') \rangle$.

Введем тензор

$$D_{ikl}(\mathbf{r}) = \langle [v_i(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - v_i(\mathbf{r}')] [v_k(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - v_k(\mathbf{r}')] \times \\ \times [v_l(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - v_l(\mathbf{r}')] \rangle. \quad (2)$$

Точно так же как тензор $D_{ik}(\mathbf{r})$ при помощи уравнения несжимаемости и условия изотропности был выражен через единственную скалярную функцию $D_{rr}(\mathbf{r})$, тензор (2) может быть выражен через продольную функцию:

$$D_{rrr}(\mathbf{r}) = \langle \{n [v(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - v(\mathbf{r}')] \}^3 \rangle, \quad (3)$$

где $n = \frac{r}{r'}$.

Таким образом, умножая (1) на $v_l(\mathbf{r}')$ и производя усреднение, мы можем выразить все величины входящие, в получающееся после этого уравнение, через $D_{rr}(\mathbf{r})$ и $D_{rrr}(\mathbf{r})$. В результате после довольно громоздких преобразований можно получить уравнение

$$-\frac{2}{3} \varepsilon - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{rr}}{\partial t} = \frac{1}{6r^4} \frac{\partial (r^4 D_{rrr})}{\partial r} - \frac{\nu}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^4 \frac{\partial D_{rr}}{\partial r} \right). \quad (4)$$

Уравнение (4) описывает процесс вырождения турбулентности. Действительно, уравнение (1) не содержит внешних сил, которые могли бы быть источником энергии. В то же время в (1) присутствует вязкий член $\nu \Delta v_i$, обуславливающий диссипацию энергии турбулентности. Поэтому решение уравнения (1) должно затухать со временем. То же относится и к возможным решениям уравнения (4).

Можно, однако, видоизменить постановку задачи. Если ввести посторонние источники энергии с мощностью ε на каждую единицу массы жидкости, то они скомпенсируют диссипацию энергии за счет вязкости, в результате чего установится стационарный режим. В этом случае в уравнении (4) член $\frac{\partial D_{rr}}{\partial t}$ будет

равен нулю, а величина ε должна рассматриваться как внешний параметр, равный величине той мощности, которая затрачивается источниками для компенсации диссипации энергии. Уравнение для стационарной турбулентности приобретает, следовательно, вид

$$-\frac{2}{3}\varepsilon = \frac{1}{r^4} \left[\frac{1}{6} \frac{d(r^4 D_{rrr})}{dr} - \nu \frac{d}{dr} \left(r^4 \frac{dD_{rr}}{dr} \right) \right]. \quad (5)$$

Умножая (5) на r^4 и интегрируя по r , получим с учетом обращения в нуль структурных функций при $r = 0$

$$D_{rrr}(r) = -\frac{4}{5}\varepsilon r + 6\nu \frac{dD_{rr}}{dr}. \quad (6)$$

Уравнение (6), связывающее функции D_{rrr} и D_{rr} , было получено А. Н. Колмогоровым.

То обстоятельство, что в уравнении (6), помимо функции $D_{rr}(r)$, появилась новая неизвестная функция $D_{rrr}(r)$, не позволяет проинтегрировать это уравнение. При попытке получить дополнительное уравнение для функции D_{rrr} мы столкнемся с аналогичной трудностью: в уравнение для D_{rrr} войдут новые неизвестные функции — моменты четвертого порядка разности скоростей. Таким образом, попытки получить замкнутую систему уравнений для определения структурных функций наталкиваются на принципиальные затруднения. В связи с этим все дальнейшие результаты теории турбулентности связаны с применением дополнительных гипотез, основанных на тех или иных соображениях физического характера.

§ 12. Структура мелкомасштабной турбулентности при очень больших числах Рейнольдса

Выше были получены формулы

$$T = \int_0^{\infty} E(\kappa) d\kappa, \quad (1)$$

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^{\infty} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa, \quad (2)$$

выражающие кинетическую энергию T и скорость диссипации энергии турбулентности ε (обе величины относятся к единице массы жидкости) через спектральную плотность энергии $E(\kappa)$. Из экспериментальных данных известно, что функция $E(\kappa)$ имеет максимальное значение в области малых κ (крупных масштабов) и довольно быстро спадает при увеличении κ . В области

вблизи некоторого максимального числа $\kappa = \kappa_m$ функции $E(\kappa)$ начинает убывать сильнее и быстро стремится к нулю. Примерный вид функции $E(\kappa)$ приведен на рис. 6. Основное значение интеграла, выражающего T через $E(\kappa)$, получается при интегрировании по области малых значений κ (на рис. 6 соответствующий участок I оси κ отмечен жирной линией). Этот интервал волновых чисел носит название энергетического интервала. Величина κ_m , характеризующая волновые числа, соответствующие минимальным по размерам неоднородностям поля скорости, зависит от числа Рейнольдса Re потока и возрастает вместе с ростом Re .

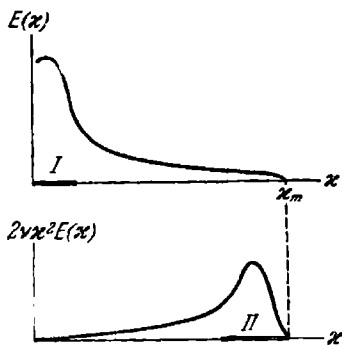


Рис. 6. Примерный вид спектральной плотности энергии турбулентности $E(\kappa)$ (верхняя кривая) и спектральной плотности скорости диссипации энергии турбулентности $2\nu\kappa^2 E(\kappa)$ (нижняя кривая).

Участок I оси волновых чисел соответствует энергетическому интервалу спектра турбулентности, участок II — вязкому интервалу (интервалу диссипации), участок между ними — инерционный интервал волновых чисел.

Примерный вид функции $2\nu\kappa^2 E(\kappa)$ также приведен на рис. 6. Область вблизи $\kappa = \kappa_m$, интегрирование по которой дает основной вклад в ϵ , носит название интервала диссипации, или вязкого интервала (на рис. 6 соответствующий участок II оси κ отмечен жирной линией). Тот факт, что диссипация энергии связана в основном с областью больших волновых чисел, следует из того, что ϵ пропорциональна квадрату градиента скорости (см. формулу (1.10)), максимальное значение которого связано с наименьшими по размерам неоднородностями поля скоростей. Так как между масштабом неоднородностей l и соответствующими волновыми числами κ имеет место соотношение $\kappa l \sim 2\pi$ (см. (35.2)), то это и означает, что ϵ связано с наибольшими волновыми числами в спектре турбулентности.

В случае, если число Рейнольдса достаточно велико, интервал диссипации, расположенный вблизи точки κ_m , отделен от энер-

гетического интервала. Величина κ_m , характеризующая волновые числа, соответствующие минимальным по размерам неоднородностям поля скорости, зависит от числа Рейнольдса Re потока и возрастает вместе с ростом Re .

Рассмотрим теперь функцию $2\nu\kappa^2 E(\kappa)$, интеграл от которой определяет величину ϵ . За счет множителя κ^2 , обращающегося в нуль при $\kappa = 0$ и малого при малых значениях κ , произведение $\kappa^2 E(\kappa)$ мало в энергетическом интервале и имеет максимум в области больших волновых чисел. Согласно экспериментальным данным функция $E(\kappa)$ убывает в области $\kappa \ll \kappa_m$ быстрее, чем возрастает функция κ^2 , и поэтому максимум функции $\kappa^2 E(\kappa)$ расположен вблизи точки κ_m , где $E(\kappa)$ быстро обращается в нуль.

гетического интервала некоторой областью волновых чисел, называемой инерционным интервалом. Инерционный интервал имеет тем большую величину, чем больше число Рейнольдса Re (отношение размеров наиболее крупных неоднородностей к размерам наиболее мелких неоднородностей имеет порядок $Re^{3/4}$ [13]).

Рассмотрим режим стационарной турбулентности. В этом случае, как мы отмечали в предыдущем параграфе, необходимо каким-либо способом передавать турбулентному движению энергию от внешних источников, причем для того, чтобы скомпенсировать диссипацию энергии, происходящую в вязком интервале волновых чисел, мощность источников энергии должна равняться ε на каждую единицу массы жидкости. Эти источники передают энергию турбулентному движению в том же энергетическом интервале, где сосредоточена основная часть энергии турбулентности.

В то же время весь расход энергии сосредоточен в интервале диссипации, отделенном от энергетического интервала инерционным интервалом волновых чисел (см. рис. 6). Следовательно, практически вся расходуемая мощность ε без сколько-нибудь существенных потерь передается через инерционный интервал от энергетического к вязкому интервалу. Процесс передачи энергии по спектру от малых волновых чисел к большим, т. е. от крупномасштабных неоднородностей (вихрей) к малым, можно наглядно представить себе как дробление вихрей. Если число Рейнольдса исходного потока велико, то он теряет устойчивость и при этом образуются вихри с размерами порядка размеров исходного потока L_0 . Число Рейнольдса, характеризующее движение этих вихрей, уже меньше, чем число Рейнольдса исходного потока, но все еще достаточно велико, так что и возникшие вихри также являются неустойчивыми и дробятся на более мелкие. В процессе такого дробления энергия от крупного расщепившегося вихря переходит к более мелким, т. е. переходит от малых волновых чисел к большим.

При каждом акте дробления число Рейнольдса возникающих вихрей уменьшается. Процесс дробления будет продолжаться до тех пор, пока не образуются вихри с числом Рейнольдса, меньшим критического. Такие вихри уже являются устойчивыми и не распадаются на более мелкие. Ясно, что количество последовательных актов дробления тем больше, чем больше число Рейнольдса Re исходного потока. Поэтому размеры наименьших вихрей, возникающих в результате всех актов дробления, тем меньше, чем больше Re . Это эквивалентно тому, что максимальное волновое число k_m , характеризующее размеры минимальных вихрей, возрастает вместе с Re . Для существования

инерционного интервала необходимо, чтобы вязкий интервал был отделен от энергетического. Это возможно, таким образом, при условии $Re \gg Re_k$ (где Re_k — критическое число Рейнольдса). Практически для существования инерционного интервала необходимо, чтобы было $Re > 10^5 \div 10^7$.

Из проведенного рассмотрения следует, что структура турбулентности в инерционном интервале волновых чисел целиком определяется величиной передаваемой по спектру энергии ϵ , а в вязком интервале — величинами ϵ и ν . Последнее подтверждается формулами (8.10) и (9.10) для функций D_{rr} и D_{ii} . Дополнительным аргументом в пользу этих предположений является то, что в уравнение Колмогорова входят лишь величины ϵ и ν .

Совокупность инерционного и вязкого интервалов спектра турбулентности носит название интервала равновесия. Введем характерный масштаб L_0 , имеющий порядок наиболее крупномасштабных неоднородностей поля скоростей, принадлежащих к энергетическому интервалу. Обычно величина L_0 , называемая внешним масштабом турбулентности, имеет порядок расстояния, на котором заметно меняется средняя скорость потока. Масштабы r , принадлежащие интервалу равновесия, малы по сравнению с L_0 , т. е. $r \ll L_0$.

А. Н. Колмогоров в 1941 г. выдвинул гипотезу, согласно которой структура турбулентности в интервале равновесия при очень больших числах Рейнольдса определяется лишь параметрами ϵ и ν , а в инерционной подобласти интервала равновесия зависит лишь от ϵ и не зависит от ν . Эти гипотезы позволяют установить вид функции $D_{rr}(r)$ в инерционном интервале.

Согласно первой гипотезе при всех $r \ll L_0$ функция $D_{rr}(r)$ имеет вид

$$D_{rr}(r) = D_{rr}(\epsilon, \nu, r). \quad (3)$$

Из величин ϵ и ν можно составить единственную комбинацию, имеющую размерность длины *)

$$l_0 = \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\epsilon}}, \quad (4)$$

и единственную величину, имеющую размерность скорости

$$v_0 = \sqrt[4]{\epsilon \nu}. \quad (5)$$

Величина l_0 носит название внутреннего масштаба турбулентности.

*) Напомним, что ϵ имеет размерность $см^2 \cdot сек^{-3}$ в системе CGS или $вт/кг$ в системе СИ. ν имеет размерность $см^2 \cdot сек^{-1}$.

Поскольку в величины l_0 и v_0 входит вязкость ν , то отсюда становится ясным, что l_0 и v_0 характеризуют масштабы и скорости наименьших неоднородностей (вихрей) в турбулентном потоке. Это ясно и из того, что величина $l_0 v_0 / \nu$ (число Рейнольдса для движений с масштабом l_0 и характерной скоростью v_0) равна, как легко проверить, единице.

Единственной безразмерной комбинацией из величин ε , ν и l_0 является отношение r/l_0 . Отсюда согласно известной П-теореме теории размерностей (см. [14]) следует, что D_{rr} , имеющая размерность квадрата скорости, может быть представлена в виде

$$D_{rr}(r) = v_0^2 f\left(\frac{r}{l_0}\right) \quad \text{при} \quad r \ll L_0, \quad (6)$$

где $f(x)$ — некоторая безразмерная функция безразмерного аргумента. Вторая гипотеза Колмогорова позволяет установить асимптотический вид функции $f(x)$ при $x \gg 1$, т. е. при $r \gg l_0$. В этом случае из формулы (6) должна выпасть вязкость ν . Записывая (6) как

$$D_{rr}(r) = \varepsilon^{1/2} \nu^{1/2} f\left(\frac{\varepsilon^{1/4} r}{\nu^{3/4}}\right),$$

мы видим, что для того, чтобы это выражение не зависело от ν , необходимо, чтобы $f(x)$ имела вид $f(x) = C^2 x^{3/4}$. В этом случае мы получаем

$$D_{rr}(r) = C^2 \varepsilon^{3/8} r^{3/4} \quad \text{при} \quad l_0 \ll r \ll L_0 \quad (7)$$

— «закон 2/3» Колмогорова — Обухова *). В области $r \ll l_0$ вид функции D_{rr} был установлен выше: $D_{rr}(r) = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2$. Точка пересечения кривых, изображаемых этими двумя асимптотическими формулами, находится при $r = l_1 = (15 C^2)^{4/5} l_0$. Точный вид функции $D_{rr}(r)$ вблизи точки $r = l_1$ на основании сформулированных гипотез установить не удастся. Однако следует отметить, что от деталей поведения функции $D_{rr}(r)$ вблизи этой точки в сильной степени зависит вид спектральной функции $E(\kappa)$ вблизи точки $\kappa = \kappa_m$.

Воспользовавшись формулой (10.8) $D_{tt} = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} (r^2 D_{rr})$, можно найти вид функции D_{tt} в инерционном интервале:

$$D_{tt}(r) = \frac{4}{3} C^2 \varepsilon^{3/8} r^{3/4} \quad \text{при} \quad l_0 \ll r \ll L_0.$$

*) Этот же закон был найден другим путем А. М. Обуховым в 1941 г. (см. [15, 16]). Позднее к аналогичным результатам пришли также Л. Онзегер, К. Вейцэкер, В. Гейзенберг [167—169].

Подставляя (7) в уравнение Колмогорова (6.11), получим соотношение

$$D_{rrr}(r) = -\frac{4}{5} \varepsilon r + 4C^2 v \varepsilon^{1/2} r^{-1/2} = -\frac{4}{5} \varepsilon r \left[1 - 5C^2 \left(\frac{l_0}{r} \right)^{4/3} \right]. \quad (8)$$

Так как в рассматриваемой области $\frac{l_0}{r} \ll 1$, то вторым членом в квадратной скобке можно пренебречь и мы получаем

$$D_{rrr}(r) = -\frac{4}{5} \varepsilon r \quad \text{при} \quad l_0 \ll r \ll L_0. \quad (9)$$

Из формулы (9) следует, что третий момент продольной разности скоростей Δv_r отрицателен. Отсюда и из того факта, что среднее значение продольной разности скоростей равно нулю, следует, что эта разность скоростей Δv_r большую часть времени является небольшой положительной величиной (т. е. частицы расходятся с небольшой скоростью) и лишь изредка наблюдаются большие по абсолютной величине отрицательные значения Δv_r (т. е. сравнительно редкие, но более интенсивные сближения частиц).

Важной характеристикой распределения вероятностей продольной разности скоростей является асимметрия S этого распределения, определяемая как

$$S = \frac{D_{rrr}(r)}{[D_{rr}(r)]^{3/2}}. \quad (10)$$

Подставляя сюда формулы (7) и (9), получим

$$S = -\frac{4}{5C^3}. \quad (11)$$

Таким образом, в инерционном интервале асимметрия S постоянна и входящая в (7) константа C^2 выражается через нее при помощи формулы

$$C^2 = \left(\frac{4}{5|S|} \right)^{3/2}. \quad (12)$$

Установим теперь вид функции $E(\kappa)$, эквивалентный выражению (7) для $D_{rr}(r)$. Проще всего это можно сделать, вычислив след тензора D_{ik} .

Как следует из формулы (18.8), функция $D_{ii}(r)$ разлагается в интеграл того же типа, что и структурная функция скалярного поля (см. (6.5)):

$$D_{ii}(r) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \kappa r] \frac{E(\kappa)}{2\pi\kappa^2} d^3\kappa,$$

причем роль функции $\Phi(\kappa)$ играет $E(\kappa)/2\pi\kappa^2$. $D_{ii}(r)$ можно разложить и в одномерный интеграл

$$D_{ii}(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \kappa r] V(\kappa) d\kappa,$$

причем согласно (15.5)

$$V(\kappa) = \frac{1}{2\pi\kappa} \int_0^{\infty} \sin \kappa r D'_{ii}(r) dr$$

и $\Phi(\kappa) = \frac{E(\kappa)}{2\pi\kappa^2}$ выражается через $V(\kappa)$ при помощи формулы (17.5):

$$\Phi(\kappa) = -\frac{1}{2\pi\kappa} \frac{dV(\kappa)}{d\kappa}.$$

Используя эти формулы, получаем соотношение

$$E(\kappa) = -\frac{\kappa}{2\pi} \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{1}{\kappa} \int_0^{\infty} \sin \kappa r D'_{ii}(r) dr \right], \quad (13)$$

позволяющее вычислить $E(\kappa)$ по известной функции $D_{ii}(r)$.

Функция $D_{ii}(r) = 2D_{ii} + D_{rr}$ в инерционном интервале равна

$$D_{ii}(r) = \frac{11}{3} C^2 \varepsilon^{2/3} r^{5/3}, \quad l_0 \ll r \ll L_0. \quad (14)$$

Мы предположим сначала, что функция $D_{ii}(r)$ выражается формулой (14) не только при указанных значениях r , но при всех r ($0 \leq r \leq \infty$). Затем мы укажем, какие изменения в функции $E(\kappa)$ следует ввести, чтобы учесть, что $D_{ii} \sim r^2$ при $r \ll l_0$. Подставляя (14) в (13) и вычисля известный интеграл, получим после простых выкладок формулу

$$E(\kappa) = \frac{55}{27\pi} \Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \cos \frac{\pi}{6} C^2 \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} = 0,76 C^2 \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}. \quad (15)$$

Отметим, что трехмерная спектральная плотность $F(\kappa)$, соответствующая «закону 2/3», равна

$$F(\kappa) = \frac{E(\kappa)}{4\pi\kappa^2} = 0,061 C^2 \varepsilon^{2/3} \kappa^{-11/3}. \quad (16)$$

Если, пользуясь выражением (15), попытаться вычислить величину

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^{\infty} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa,$$

то мы получим бесконечность, так как интеграл расходится в области больших значений κ . Это связано с тем, что мы распространили выражение (14), справедливое в области $r \gg l_0$, на все значения $r > 0$. Для того чтобы устранить эту расходимость, необходимо учесть, что в области $\kappa \sim \kappa_m = \frac{2\pi}{l_0}$ вид функции $E(\kappa)$ уже не соответствует формуле (15) и $E(\kappa)$ убывает при $\kappa \gg \kappa_m$ быстрее, чем κ^{-3} , что должно обеспечить сходимость интеграла, представляющего ε через $E(\kappa)$. Однако установить вид функции $E(\kappa)$ в интервале диссипации на основании простых гипотез Колмогорова уже не удается. В связи с этим в работах многих авторов был принят целый ряд попыток получить вид функции $E(\kappa)$ в интервале диссипации на основании дополнительных гипотез.

В качестве иллюстрации мы опишем одну из таких работ [17], отличающуюся сравнительной простотой. Как мы установили выше, в инерционном интервале асимметрия S распределения вероятностей для продольной разности скоростей постоянна. Ясно также, что величина S постоянна при малых r (в вязком интервале). Действительно, $D_{rr} \sim r^2$ при $r \ll l_0$, что означает линейную зависимость разности скоростей от r . Но в таком случае величина $D_{rrr}(r)$ должна быть пропорциональна r^3 , а отношение $D_{rrr}(r)/[D_{rr}(r)]^{3/2}$ не должно зависеть от r . В связи с этим в работе [17] было сделано предположение, что величина S постоянна не только в инерционном интервале, но и при всех $r \ll L_0$. Таким образом, было предположено, что

$$S = \frac{D_{rrr}(r)}{[D_{rr}(r)]^{3/2}} = \text{const} \quad \text{при} \quad r \ll L_0.$$

Это соотношение позволяет выразить величину $D_{rrr}(r)$ через $D_{rr}(r)$:

$$D_{rrr}(r) = S [D_{rr}(r)]^{3/2}.$$

Подставляя последнее выражение в уравнение Колмогорова, мы получим обыкновенное дифференциальное уравнение для определения функции $D_{rr}(r)$:

$$6\nu \frac{dD_{rr}}{dr} - S [D_{rr}]^{3/2} + \frac{4}{5} \varepsilon r = 0.$$

Вместе с начальным условием $D_{rr}(0) = 0$ это уравнение определяет единственную функцию $D_{rr}(r)$, которая была вычислена в указанной работе при помощи численного интегрирования. Однако, как было показано в работе [18], если, основываясь на полученном решении, вычислить функцию $E(\kappa)$ (это можно сделать, например, при помощи формулы (13)), то при некоторых значе-

ниях κ функция $E(\kappa)$ становится отрицательной. Этот факт говорит о том, что гипотеза о постоянстве S при всех r из инерционного и вязкого интервалов неудовлетворительна.

В ряде работ (см., например, [20]) делались другие предположения, позволяющие получить замкнутую систему уравнений для определения функции $E(\kappa)$ или $D_{rr}(r)$. Однако все эти предположения наталкивались на определенные трудности, о которых мы не будем здесь говорить.

Следует отметить работу Е. А. Новикова [21], где предпринята интересная попытка установить вид функции $E(\kappa)$ в интервале диссипации. Им была получена формула

$$E(\kappa) = C_1 \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} (\kappa l_0)^{2k - \frac{4}{3}} \exp(-a l_0^2 \kappa^2), \quad (17)$$

где k — некоторое число из интервала

$$0,5 < k < 2 \text{ и } a \approx 2(k^2 - k + 1)^{1/2}.$$

Формула (17) справедлива в области $\kappa l_0 \gg 1$. Если, однако, предположить, что при $\kappa l_0 < 1$ она должна переходить в выражение (15), справедливое в инерционном интервале, то величина k должна быть выбрана равной $2/3$. В этом случае формула (17) принимает вид

$$E(\kappa) = \frac{a^{2/3}}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)} \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \exp(-a l_0^2 \kappa^2). \quad (18)$$

Значение константы C_1 выбрано так, чтобы (18) удовлетворяло условию нормировки

$$2\nu \int_0^{\infty} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa = \varepsilon.$$

Выражение (18) удовлетворяет условию $E(\kappa) > 0$. Кроме того, оно обладает тем преимуществом, что в модели со спектральной плотностью (18) сходятся все интегралы типа $\int_0^{\infty} \kappa^{2n} E(\kappa) d\kappa$, что означает конечность средних квадратов от производных поля скоростей любого порядка.

Воспользовавшись формулой (4.9), можно вычислить продольную структурную функцию $D_{rr}(r)$, соответствующую спектральной плотности (18). Интегрирование можно провести, разлагая функцию

$$\frac{1}{3} + \frac{\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3}$$

в степенной ряд. В результате может быть получена формула

$$D_{rr}(r) = 2a(l_0\varepsilon)^{1/3} \left[{}_1F_1 \left(-\frac{1}{3}, \frac{5}{2}, -\frac{r^2}{4al_0^2} \right) - 1 \right], \quad (19)$$

где

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \frac{z}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \frac{z^2}{2!} + \dots = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+\gamma)} \frac{z^n}{n!}$$

— вырожденная гипергеометрическая функция. Воспользовавшись этим разложением, из (19) при $r \ll l_0$ можно получить формулу

$$D_{rr}(r) = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2 + \dots$$

При $r \gg l_0$ можно воспользоваться асимптотическим разложением

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} (-z)^{-\alpha} G(\alpha, \alpha-\gamma+1, -z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha-\gamma} G(\gamma-\alpha, 1-\alpha, z), \quad (20)$$

где

$$G(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!z} + \frac{\alpha(\alpha-1)\beta(\beta-1)}{2!z^2} + \dots$$

Так как в нашем случае $z = -\frac{r^2}{4al_0^2} < 0$, то можно отбросить экспоненциально малое второе слагаемое асимптотического разложения. Ограничиваясь первым членом в формуле для G (т. е. полагая $G \approx 1$) и пренебрегая единицей по сравнению с $\left(\frac{r}{l_0}\right)^{1/3}$, получим асимптотическое выражение

$$D_{rr}(r) \approx \frac{\sqrt[3]{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} a^{1/3}\varepsilon^{1/3}\nu^{1/3}. \quad (21)$$

Сравнивая это выражение с формулой (7), можно найти соотношение между константами C^2 и a :

$$C^2 = \frac{\sqrt[3]{2}\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} a^{1/3} \approx 0.972a^{1/3}. \quad (22)$$

Таким образом, выражение (19) удовлетворяет необходимым требованиям при $r \ll l_0$ и $r \gg l_0$ и позволяет определить вид $D_{rr}(r)$ и при промежуточных значениях r .

В настоящее время уже имеется богатый экспериментальный материал, подтверждающий, что $E(\kappa)$ в инерционном интервале пропорциональна $\varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3}$. В появившейся сравнительно недавно работе [22] экспериментально исследована спектральная плотность $E(\kappa)$ и в вязком интервале (см. раздел В). Результаты этой работы указывают на то, что в области $\kappa \gg l_0^{-1}$ функция $E(\kappa)$ убывает с ростом κ медленнее, чем $\exp(-a l_0^2 \kappa^2)$. Полученные в ней спектры с высокой степенью точности аппроксимируются формулой

$$E(\kappa) = \frac{3\alpha^{4/3}}{20\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} e^{-V\sqrt{2l_0}\kappa}, \quad (23)$$

где численный множитель выбран так, чтобы удовлетворялось условие

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^{\infty} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa.$$

Численное значение величины $3\alpha^{4/3}/20\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)$, полученное в этой работе, равно $1,35 \pm 0,06$, что соответствует $\alpha = 4,78 \pm 0,17$.

Выражение (23), как и (18), убывает достаточно быстро, так что интегралы типа $\int_0^{\infty} \kappa^{2n} E(\kappa) d\kappa$ сходятся при сколь угодно больших n , но в отличие от (18) лучше согласуются с пока еще немногочисленными экспериментальными данными.

Вычисляя при помощи формул (23) и (25.9) функцию $D_{rr}(r)$, можно убедиться в том, что при $r \ll l_0$ выполняется соотношение

$$D_{rr} = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2 + \dots,$$

а при $r \gg l_0$ будет $D_{rr} = C^2 \varepsilon^{2/3} r^{5/3}$, причем C^2 и α связаны соотношением (его можно получить, сравнивая (23) и (15))

$$\alpha^{4/3} = \frac{550\sqrt{3}}{54\pi} \left[\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \right]^2 C^2 = 4,58 C^2. \quad (24)$$

(Значению $\alpha = 4,78 \pm 0,17$ соответствует $C^2 = 1,77 \pm 0,08$.)

В дальнейшем мы будем пользоваться выражением (18), рассматривая его как удобную аппроксимацию для $E(\kappa)$.

§ 13. Микроструктура температурного поля в турбулентном потоке

В турбулентном потоке не только сама скорость движения v является случайной функцией координат и времени. Такие величины, как температура, влажность, давление, диэлектрическая проницаемость и т. п. характеристики воздуха, также испытывают флуктуации, обусловленные турбулентностью.

Мы рассмотрим сейчас микроструктуру температурного поля в турбулентной среде. Возникновение температурных флуктуаций легко понять, исходя из физической картины явления. Представим себе, что в среде, в которой происходит турбулентное движение, имеется зависимость среднего значения температуры от координат (например, от высоты над землей). Так как при турбулентном движении происходит перемешивание жидкости, то отдельные порции ее, характеризуемые некоторым значением T температуры, в результате этого перемешивания окажутся в точке, где до этого находилась жидкость с другим значением температуры T' . Таким образом, в каждой точке среды возникают температурные флуктуации. Микроструктура температурного поля была рассмотрена в работах А. М. Обухова [23], А. М. Яглома [24], Корзина [25] и некоторых других.

Здесь мы изложим этот вопрос, следуя работам [23, 24]. Распределение температуры в движущейся среде описывается уравнением теплопроводности

$$\frac{dT}{dt} = \frac{\partial T}{\partial t} + v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} = \chi \Delta T,$$

где $\frac{d}{dt}$ — полная производная по времени, χ — коэффициент температуропроводности среды, T — отклонение температуры от среднего значения $\langle T \rangle$, которое предполагается в этом параграфе постоянным, и v_k — флуктуационная скорость. Учитывая несжимаемость жидкости $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$ и считая $\chi = \text{const}$, запишем это уравнение в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(T v_k - \chi \frac{\partial T}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (1)$$

Обозначим через T' значение температуры в другой точке с координатами x'_i . Умножим уравнение (1) на T' и внесем значение T' , не зависящее от x_k , под знак производной $\frac{\partial}{\partial x_k}$:

$$T' \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_k T T' - \chi \frac{\partial T T'}{\partial x_k} \right) = 0. \quad (2)$$

Запишем такое же уравнение, поменяв местами точки x_k и x'_k . При этом T и T' поменяются местами, а вместо v_k и $\frac{\partial}{\partial x_k}$ войдут v'_k и $\frac{\partial}{\partial x'_k}$:

$$T \frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(v'_k T' T - \chi \frac{\partial T T'}{\partial x'_k} \right) = 0. \quad (3)$$

Сложим уравнения (2) и (3). Учитывая, что

$$T' \frac{\partial T}{\partial t} + T \frac{\partial T'}{\partial t} = \frac{\partial T T'}{\partial t},$$

получим

$$\frac{\partial T T'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(v_k T T' - \chi \frac{\partial T T'}{\partial x_k} \right) + \frac{\partial}{\partial x'_k} \left(v'_k T' T - \chi \frac{\partial T T'}{\partial x'_k} \right) = 0. \quad (4)$$

Усредним уравнение (4). Вводя корреляционную функцию температурного поля и предполагая его статистическую однородность, получим

$$B_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \langle T T' \rangle \quad (5)$$

и

$$\frac{\partial B_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle v_k T T' \rangle + \frac{\partial}{\partial x'_k} \langle v'_k T' T \rangle - \chi \Delta B_T - \chi \Delta' B_T = 0, \quad (6)$$

где $\Delta' = \frac{\partial^2}{\partial x'^2_k}$ — оператор Лапласа в точке \mathbf{r}' . Выразим члены уравнения (6) через структурную функцию

$$D_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \langle (T - T')^2 \rangle. \quad (6')$$

Раскрывая правую часть (6'), имеем

$$D_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \langle T^2(\mathbf{r}, t) \rangle + \langle T^2(\mathbf{r}', t) \rangle - 2B_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t). \quad (7)$$

Так как мы предположили статистическую однородность температурного поля, то $\langle T^2 \rangle = \langle T'^2 \rangle$ и

$$D_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = 2 \langle T^2(\mathbf{r}, t) \rangle - 2B_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t). \quad (8)$$

Продифференцируем равенство (8) по времени:

$$\frac{\partial D_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t} = 2 \frac{\partial \langle T^2(\mathbf{r}, t) \rangle}{\partial t} - 2 \frac{\partial B_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t}. \quad (9)$$

По аналогии со скоростью диссипации энергии ϵ введем величину

$$N = - \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle T^2 \rangle}{2} \right). \quad (10)$$

Тогда из (9) мы получим

$$\frac{\partial B_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t} = -2N - \frac{1}{2} \frac{\partial D_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t)}{\partial t}. \quad (11)$$

Возьмем теперь лапласиан от обеих частей равенства (8). Учитывая, что в силу однородности $\langle T^2 \rangle$ не зависит от \mathbf{r} , получим

$$\Delta D_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = -2\Delta B_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t). \quad (12)$$

Но так как B_T зависит лишь от $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$, то $\Delta' B_T = \Delta B_T$ и (12) можно записать также в виде

$$\Delta B_T + \Delta' B_T = -\Delta D_T(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t), \quad (13)$$

где в правой части можно считать $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial (x_k - x'_k)^2}$.

Итак, мы выразили первый и два последних члена уравнения (6) через $D_T(\mathbf{r}, t)$. Чтобы выразить величины $\langle v_k T T' \rangle$ и $\langle v_k T'^2 \rangle$ через разностные характеристики полей v и T , введем величину

$$D_{kTT}(\mathbf{r} - \mathbf{r}', t) = \langle [v_k(\mathbf{r}, t) - v_k(\mathbf{r}', t)] [T(\mathbf{r}, t) - T(\mathbf{r}', t)]^2 \rangle. \quad (14)$$

Раскрывая произведение в правой части (14), получим

$$D_{kTT} = \langle v_k T^2 \rangle - 2 \langle v_k T T' \rangle + \langle v_k T'^2 \rangle - \langle v_k'^2 T^2 \rangle + 2 \langle v_k' T' T \rangle - \langle v_k' T'^2 \rangle. \quad (15)$$

В силу статистической однородности полей v_k и T величина $\langle v_k T^2 \rangle$ не зависит от координат и поэтому $\langle v_k T^2 \rangle = \langle v_k' T'^2 \rangle$, так что первый и последний члены в (15) взаимно уничтожаются.

Рассмотрим теперь величину $\langle v_k T'^2 \rangle$. Она представляет собой корреляцию скорости в точке \mathbf{r} с квадратом температуры в точке \mathbf{r}' . Но согласно общей теореме, доказанной в § 8, соленоидальное поле скорости (несжимаемое движение) не коррелировано ни с каким скалярным полем, в частности с T^2 , если поля v_k и T являются статистически однородными и изотропными. Следовательно,

$$\langle v_k T'^2 \rangle = \langle v_k' T^2 \rangle = 0. \quad (16)$$

Учитывая это равенство, можно записать (15) в виде

$$D_{kTT} = 2 \langle v_k' T' T \rangle - 2 \langle v_k T T' \rangle. \quad (17)$$

Заметим теперь, что $\langle v_k T T' \rangle$ зависит лишь от $\rho = r - r' = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$ и поэтому

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x_k} \langle v_k T T' \rangle &= \frac{\partial}{\partial \xi_k} \langle v_k T T' \rangle, \\ \frac{\partial}{\partial x_k} \langle v'_k T' T \rangle &= - \frac{\partial}{\partial \xi_k} \langle v'_k T' T \rangle.\end{aligned}$$

Дифференцируя (17) по ξ_k и учитывая эти соотношения, получим

$$- \frac{1}{2} \frac{\partial D_{kTT}(\rho, t)}{\partial \xi_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \langle v'_k T' T \rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle v_k T T' \rangle. \quad (18)$$

Подставим соотношения (11), (13) и (18) в уравнение (6):

$$- 2N - \frac{1}{2} \frac{\partial D_T(\rho, t)}{\partial t} - \frac{1}{2} \frac{\partial D_{kTT}(\rho, t)}{\partial \xi_k} + \chi \Delta D_T(\rho, t) = 0. \quad (19)$$

Величина $D_{kTT} = \langle [v_k - v'_k] [T - T']^2 \rangle$ является вектором. Так как мы рассматриваем статистически изотропную модель, то этот вектор может быть направлен лишь по вектору $n = \rho/\rho$, т. е.

$$D_{kTT} = n_k D_{rTT}(\rho), \quad (20)$$

где $D_{rTT}(\rho)$ — скалярная функция скалярного аргумента ρ , представляющая собой среднее значение произведения квадрата разности температур в точках r , и $r + \rho$ на разность продольных компонент скорости в этих же точках. Дифференцируя (20), получим

$$\frac{\partial D_{kTT}}{\partial \xi_k} = \frac{2}{\rho} D_{rTT} + D'_{rTT} = \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} [\rho^2 D_{rTT}(\rho)].$$

Подставляя это выражение в (19) и учитывая, что

$$\Delta D_T = \frac{1}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^2 \frac{dD_T}{d\rho} \right],$$

получим уравнение

$$- 2N - \frac{1}{2} \frac{\partial D_T}{\partial t} - \frac{1}{2\rho^2} \frac{d}{d\rho} [\rho^2 D_{rTT}] + \frac{\chi}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left[\rho^2 \frac{dD_T}{d\rho} \right] = 0. \quad (21)$$

Уравнение (21) аналогично уравнению (4.11) для поля скоростей. Подобно тому как входящая в (4.11) величина ε была связана со средним квадратом поля скоростей, величина N может быть выражена через среднее значение квадрата градиента температуры. Чтобы получить эту связь, умножим уравнение (1) на T ,

взятое в той же точке r , и произведем усреднение:

$$\left\langle T \frac{\partial T}{\partial t} \right\rangle + \left\langle T \frac{\partial T v_k}{\partial x_k} \right\rangle - \chi \left\langle T \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\rangle = 0. \quad (22)$$

Используя уравнение несжимаемости, второй член в (22) запишем в виде

$$\left\langle T \frac{\partial T v_k}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle T v_k \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\rangle = \left\langle v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{T^2}{2} \right) \right\rangle = \frac{\partial}{\partial x_k} \left\langle \frac{T^2 v_k}{2} \right\rangle.$$

Последнее слагаемое в (22) можно записать в форме

$$- \chi \left\langle T \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\rangle = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\chi \left\langle T \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\rangle \right] + \chi \left\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle.$$

Используя эти выражения, представим уравнение (22) в виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{T^2}{2} \right\rangle + \chi \left\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{1}{2} \langle v_k T^2 \rangle - \chi \left\langle T \frac{\partial T}{\partial x_k} \right\rangle \right] = 0. \quad (23)$$

Но, согласно теореме о некоррелированности поля скоростей со скалярным полем, первый член под знаком дивергенции равен нулю. Второй член можно представить в виде $\frac{1}{2} \frac{\partial \langle T^2 \rangle}{\partial x_k}$, откуда следует, что он равен нулю в силу однородности флуктуаций температуры ($\langle T^2 \rangle = \text{const}$). Таким образом, имеет место уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{T^2}{2} \right\rangle + \chi \left\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle = 0 \quad (24)$$

или

$$N = \chi \left\langle \left(\frac{\partial T}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle. \quad (25)$$

Вернемся к уравнению (21). Это уравнение описывает процесс затухания со временем температурных флуктуаций, так как исходное уравнение (1) не содержало источников тепла и процесс теплопроводности со временем должен привести к полному выравниванию температуры.

Можно, как и в случае уравнения (4.11), видоизменить постановку задачи. Введем внешние источники тепла с интенсивностью $N = \chi \langle (\text{grad } T)^2 \rangle$, которые скомпенсируют процесс выравнивания температуры. В этом случае мы получим некоторое статистически стационарное состояние, при котором величина D_T уже не будет зависеть от времени. Величину же N в этом случае следует рассматривать как некоторый внешний параметр, определяющий интенсивность флуктуаций. В этом случае уравнение (21)

принимает вид

$$-2N - \frac{1}{2\rho^2} \frac{d}{d\rho} (\rho^2 D_{rTT}) + \frac{\chi}{\rho^2} \frac{d}{d\rho} \left(\rho^2 \frac{dD_T}{d\rho} \right) = 0. \quad (26)$$

Умножим (26) на ρ^2 и проинтегрируем по ρ от 0 до r :

$$-2N \frac{r^3}{3} - \frac{1}{2} r^2 D_{rTT}(r) + \chi r^2 \frac{dD_T(r)}{dr} = 0,$$

в результате чего приходим к уравнению, полученному А. М. Ягломом [24],

$$D_{rTT} = -\frac{4}{3} Nr + 2\chi D_T'(r), \quad (27)$$

и аналогичному уравнению Колмогорова для поля скорости.

Рассмотрим малые по сравнению с внутренним масштабом турбулентности l_0 расстояния r . Для этих расстояний $T - T' \sim r$ и $D_T(r) \sim r^2$, так что правая часть (27) пропорциональна r . В то же время $D_{rTT} \sim r^3$. Поэтому для $r \ll l_0$ можно пренебречь величиной D_{rTT} и $D_T'(r) = \frac{2}{3\chi} Nr$. Интегрируя это уравнение, получим

$$D_T(r) = \frac{1}{3} \frac{N}{\chi} r^2 + \dots, \quad r \ll l_0. \quad (28)$$

Отсюда можно получить также формулу

$$D_T''(0) = \frac{2}{3} \frac{N}{\chi}. \quad (29)$$

Формула (28) аналогична формуле $D_{rr}(r) = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2 + \dots$ для поля скоростей. Однако, так же как и уравнение Колмогорова, уравнение (27) недостаточно для определения функции $D_T(r)$, так как в него входит новая неизвестная функция D_{rTT} . Для того чтобы получить возможность найти функцию $D_T(r)$, необходимо, как и в случае поля скоростей, ввести в теорию дополнительные гипотезы.

Одна из таких гипотез, примененная в работе А. М. Обухова [23], заключалась в предположении, что при $r \ll L_0$ функция $D_T(r)$ зависит от N , χ , r и от единственной величины ε , определяющей структуру мелкомасштабной турбулентности. В области же $l_0 \ll r \ll L_0$ функция $D_T(r)$ не должна зависеть от χ . Из величин N , χ , ε можно составить единственную величину

$$T_0 = \sqrt[4]{\frac{\chi N^2}{\varepsilon}}, \quad (30)$$

имеющую размерность температуры, и единственную величину

$$l_0 = \sqrt[4]{\frac{\chi^3}{\varepsilon}}, \quad (31)$$

имеющую размерность длины. Так как в (30) и (31) входит температуропроводность χ , то эти величины характеризуют наиболее мелкомасштабные неоднородности температурного поля. Функция $D_T(r) = D_T(N, \chi, \varepsilon, r)$ согласно П-теореме должна иметь вид

$$D_T(r) = T_0^2 F\left(\frac{r}{l_1}\right) = N \sqrt{\frac{\chi}{\varepsilon}} F\left(\frac{r\varepsilon^{1/4}}{\chi^{3/4}}\right). \quad (32)$$

При $r \gg l_1$ из (39) должна выпсть величина χ . Отсюда следует, что $F(x) = a^2 x^{2/3}$ при $x \gg 1$, где a — численная константа порядка единицы. В этом случае

$$D_T(r) = a^2 \frac{N}{\varepsilon^{1/3}} r^{2/3} = C_T^2 r^{2/3}, \quad \text{где } C_T^2 = \frac{a^2 N}{\varepsilon^{1/3}} \text{ и } l_1 \ll r \ll L_0. \quad (33)$$

Таким образом, в инерционном интервале $D_T(r)$ также пропорциональна $r^{2/3}$.

В инерционном интервале, где $D_T(r)$ выражается при помощи формулы (33), последний член уравнения (27) мал по сравнению с остальными. В этом случае

$$D_{rTT}(r) = -\frac{4}{3} Nr, \quad l_0 \ll r \ll L_0. \quad (34)$$

Рассмотрим величину

$$S' = \frac{D_{rTT}}{\sqrt{D_{rr} D_T}}. \quad (35)$$

Используя (33), (34) и $D_{rr} = C^2 \varepsilon^{2/3} r^{2/3}$, получим

$$S' = -\frac{4}{3Ca^2} = \text{const}. \quad (36)$$

В работе А. М. Яглома [24] предположение $S' = \text{const}$ было принято за дополнительную гипотезу, позволяющую определить $D_T(r)$ из уравнения (27). В этом случае (27) превращается в уравнение

$$2\chi D_T'(r) + |S'| \sqrt{D_{rr}(r)} D_T(r) = \frac{4}{3} Nr, \quad (37)$$

где $|S'| = -S'$.

Уравнение (37) — линейное уравнение относительно $D_T(r)$. Если функцию $D_{rr}(r)$ считать известной, то решение уравнения (37), как легко проверить, имеет вид

$$D_T(r) = \frac{2N}{3x} \int_0^r x e^{-\frac{|S'|}{2x}} \int_x^r V D_{rr}(\rho) d\rho dx. \quad (38)$$

Полагая $D_{rr}(\rho) = \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} \rho^2$, из (38) можно получить выражение (28). Полагая $D_{rr}(\rho) = C^2 \varepsilon^{2/3} \rho^{2/3}$ и используя асимптотическое разложение получающегося в результате интеграла, можно получить формулу (33), в которой a^2 связано с S' соотношением (36).

Роль внутреннего масштаба турбулентности для температурных флуктуаций играет величина l_1 , определенная формулой (31). Она отличается от масштаба $l_0 = \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\varepsilon}}$ заменой ν на χ . Поскольку величины ν и χ в атмосфере и море имеют одинаковый порядок, то практически $l_1 \approx l_0$.

Выпишем также спектральную плотность, соответствующую структурной функции вида (33). Воспользовавшись результатами примера 2) из § 5, получим для трехмерной спектральной плотности $\Phi_T(\kappa)$ температурного поля

$$\Phi_T(\kappa) = \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}}{4\pi^2} \frac{a^2 N}{\varepsilon^{1/3}} \kappa^{-11/3} = 0,033 C_T^2 \kappa^{-11/3}, \quad (39)$$

где снова использовано обозначение $C_T^2 = a^2 N \varepsilon^{-1/3}$. Спектральная плотность вида (39), как и соответствующее выражение для $E(\kappa)$, применимо лишь в области $2\pi L_0^{-1} \ll \kappa \ll 2\pi l_1^{-1}$. При $\kappa \gg \kappa_m \sim \sim 2\pi l_1^{-1}$ функция $\Phi_T(\kappa)$ должна быстро затухать. Для аппроксимации выражения $\Phi_T(\kappa)$ при всех $\kappa \gg 2\pi L_0^{-1}$ мы применим формулу, аналогичную (17.12):

$$\Phi_T(\kappa) = \frac{AN}{\varepsilon^{1/3}} \kappa^{-11/3} \exp(-\gamma^2 l_1^2 \kappa^2), \quad (40)$$

где A и γ — численные постоянные. При $\kappa l_1 \ll 1$ (40) имеет вид, согласующийся с выражением (39), при $\kappa l_1 \gg 1$ функция (40) быстро затухает с ростом κ . Между постоянными A и γ имеется связь, накладываемая уравнением (29). Действительно, согласно формуле (8.5)

$$D_T(r) = 8\pi \int_0^\infty \left(1 - \frac{\sin \kappa r}{\kappa r}\right) \Phi_T(\kappa) \kappa^2 d\kappa. \quad (41)$$

Дифференцируя это соотношение и подставляя в (29), найдем

$$D_T^{\prime}(0) = \frac{8\pi}{3} \int_0^{\infty} \Phi_T(\kappa) \kappa^4 d\kappa = \frac{2}{3} \frac{N}{\chi}. \quad (42)$$

Подставляя в (42) выражение (40) и производя интегрирование, получим соотношение

$$\frac{2N}{3\chi} = 2\pi\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) ANe^{-\gamma/2} (\gamma l_1)^{-4/3}.$$

Подставляя $l_1^{4/3} = \chi e^{-\gamma/2}$, получим формулу

$$\gamma^{1/2} = 3\pi\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) A = 0,851A, \quad (43)$$

связывающую константы γ и A .

Вычислим теперь структурную функцию $D_T(r)$. Подставим для этого (40) в (41) и произведем интегрирование, разложив в ряд $\sin \kappa r$. В результате почленного интегрирования получим вырожденную гипергеометрическую функцию, так что

$$D_T(r) = 18\pi\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \frac{AN}{\varepsilon^{1/3}} (\gamma l_1)^{1/3} \left[{}_1F_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{r^2}{4\gamma^2 l_1^2}\right) - 1 \right]. \quad (44)$$

Воспользовавшись асимптотическим разложением функции ${}_1F_1$ при больших отрицательных значениях аргумента (20.12)

$${}_1F_1\left(-\frac{1}{3}, \frac{3}{2}, -\frac{r^2}{4\gamma^2 l_1^2}\right) \approx \frac{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} \left(\frac{r^2}{4\gamma^2 l_1^2}\right)^{1/2},$$

получим

$$D_T(r) = a^2 N e^{-\gamma/2} r^{2/3} = C_T^2 r^{2/3}, \quad (45)$$

где

$$a^2 = 9\pi \sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \left[2^{2/3} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \right]^{-1} A = \frac{54}{5} \pi \Gamma\left(\frac{4}{3}\right) A = \frac{A}{0,033}.$$

Таким образом, при $r \gg l_1$ мы получаем прежнюю формулу для $D_T(r)$. При $r \ll l_1$ первые два члена ряда для ${}_1F_1$ также приводят к прежнему выражению для $D_T(r)$:

$$D_T(r) = \frac{1}{3} \frac{N}{\chi} r^2 + \dots$$

Введем масштаб λ_0 , определяемый как точка пересечения асимптотических разложений $D_T(r) = C_T^2 r^{1/2}$ и $D_T(r) = \frac{Nr^2}{3\chi}$:

$$C_T^2 \lambda_0^{1/2} = \frac{1}{3} N \chi^{-1} \lambda_0^2,$$

откуда $\lambda_0^{1/2} = 3\chi N^{-1} C_T^2$.

Подставляя сюда $C_T^2 = a^2 N \epsilon^{-1/2}$, получим соотношение

$$\lambda_0^{1/2} = 3a^2 l_1^{1/2}, \text{ или } a^2 = \frac{1}{3} (\lambda_0 / l_1)^{1/2}.$$

Следовательно, все числовые параметры A , a^2 , γ , связанные между собой формулами (43), (45), выражаются через отношение двух внутренних масштабов λ_0 и $l_1 = \chi^{3/4} \epsilon^{-1/4}$:

$$a^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{\lambda_0}{l_1} \right)^{1/2}; \quad A = 0,014 \left(\frac{\lambda_0}{l_1} \right)^{1/2}; \quad \gamma = 0,169 \frac{\lambda_0}{l_1}. \quad (46)$$

Выражение для $\Phi_T(x)$ мы выразим через наиболее удобные параметры C_T^2 и λ_0 :

$$\Phi_T(x) = 0,033 C_T^2 x^{-1/2} e^{-\frac{x^2}{x_m^2}}, \quad (47)$$

где

$$x_m^2 = (\gamma l_1)^{-2} = (0,169 \lambda_0)^{-2},$$

т. е.

$$x_m \lambda_0 = \frac{1}{0,169} = 5,92. \quad (48)$$

В заключение параграфа рассмотрим микроструктуру концентрации консервативной пассивной примеси. Под консервативностью примеси подразумевается, что в процессе турбулентного перемешивания концентрация примеси может изменяться только за счет процессов молекулярной диффузии (теплопроводности) и не изменяется за счет каких-либо других процессов: химических реакций, фазовых переходов, рекомбинации и т. п. Это означает, что концентрация примеси θ удовлетворяет уравнению диффузии

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \frac{\partial \theta v_k}{\partial x_k} = D \Delta \theta, \quad (49)$$

где D — коэффициент молекулярной диффузии данной примеси.

Под пассивностью примеси подразумевается независимость турбулентных движений от θ (θ не должна входить в уравнения движения). Примерами консервативных пассивных примесей

могут являться концентрация водяных паров (при пренебрежении процессами конденсации), концентрация электронов в ионосфере и т. д.

Поскольку уравнение (49) идентично уравнению теплопроводности (1), все полученные выше статистические закономерности, касающиеся температурного поля, без изменений переносятся на величину θ . Строго говоря, температура T не является пассивной примесью, так как при отклонениях T от среднего значения возникают архимедовы силы (силы плавучести), влияющие на режим турбулентности.

Однако при незначительных отклонениях температуры от равновесного распределения этот эффект мал. Таким образом, проведенное рассмотрение даже с большими основаниями можно отнести к концентрации консервативной пассивной примеси, чем к температурному полю. Ниже будут указаны те изменения, которые возникают в теории, если учесть, что температура не является пассивной примесью.

§ 14. Связь характеристик микроструктуры полей скорости и температуры с характеристиками усредненных полей

Величины ϵ и N , определяющие интенси́вность флуктуаций скорости и температуры в турбулентном потоке, можно связать с величинами, характеризующими усредненные поля скорости и температуры.

Рассмотрим сначала более простой случай температурного поля. Как мы установили выше, для поддержания статистически стационарного режима необходимы постоянно действующие источники тепла. В этом случае уравнение теплопроводности принимает вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial v_k T}{\partial x_k} - \chi \Delta T = Q(\mathbf{r}). \quad (1)$$

Здесь уже $T = T_0 + T'$, где $T_0(\mathbf{r}) = \langle T \rangle$ и $\langle T' \rangle = 0$. Усредняя уравнение (1) и учитывая, что $\langle v_k \rangle = 0$, получим

$$-\chi \Delta T_0 + \frac{\partial}{\partial x_k} \langle v_k T' \rangle = Q(\mathbf{r}), \quad (2)$$

причем мы учли, что при стационарном режиме $\frac{\partial T_0}{\partial t} = 0$.

Заметим, что теперь уже не имеет места равенство $\langle v_k T' \rangle \equiv 0$, которое неоднократно использовалось ранее, так как из-за наличия источников тепла появляется выделенное направление, определенное вектором ∇T_0 .

Вычитая (2) из (1), получим

$$\frac{\partial T'}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[v_k T_0 + v_k T' - \langle v_k T' \rangle - \chi \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right] = 0. \quad (3)$$

Умножим уравнение (3) на T' и усредним. Учитывая, что при стационарном режиме, который мы здесь рассматриваем, $\frac{\partial}{\partial t} \langle T'^2 \rangle = 0$, получим

$$\langle T' \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k T_0) \rangle + \langle T' \frac{\partial}{\partial x_k} v_k T' \rangle - \langle T' \frac{\partial}{\partial x_k} \chi \frac{\partial T'}{\partial x_k} \rangle = 0, \quad (4)$$

где мы учли также, что

$$\langle T' \frac{\partial}{\partial x_k} \langle v_k T' \rangle \rangle = \langle T' \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} \langle v_k T' \rangle = 0.$$

Преобразуем первое слагаемое в (4) с учетом равенства $\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = 0$:

$$\langle T' \frac{\partial v_k T_0}{\partial x_k} \rangle = \langle T' v_k \frac{\partial T_0}{\partial x_k} \rangle = \langle T' v_k \rangle \frac{\partial T_0}{\partial x_k}.$$

Точно так же

$$\begin{aligned} \langle T' \frac{\partial v_k T'}{\partial x_k} \rangle &= \langle v_k T' \frac{\partial T'}{\partial x_k} \rangle = \langle v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{T'^2}{2} \right) \rangle = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} v_k \frac{T'^2}{2} \right\rangle, \\ \langle T' \frac{\partial}{\partial x_k} \chi \frac{\partial T'}{\partial x_k} \rangle &= \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\chi T' \frac{\partial T'}{\partial x_k} \right) \right\rangle - \chi \left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle. \end{aligned}$$

Подставляя все эти равенства в (4), получим

$$\langle T' v_k \rangle \frac{\partial T_0}{\partial x_k} + \chi \left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle - \left\langle \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\chi T' \frac{\partial T'}{\partial x_k} - v_k \frac{T'^2}{2} \right] \right\rangle = 0. \quad (5)$$

Но, как мы установили в предыдущем параграфе, среднее значение дивергенции случайного поля равно нулю*). Поэтому последнее слагаемое в (5) исчезает и мы получаем равенство

$$N = \chi \left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle = - \langle T' v_k \rangle \frac{\partial T_0}{\partial x_k}, \quad (6)$$

*) Это утверждение относилось к однородному полю. В рассматриваемом здесь случае поле T уже не является однородным, так как T_0 зависит от r . Поскольку, однако, в уравнение (5) входит лишь $\frac{\partial T_0}{\partial x_k}$, то в случае локально однородного поля, когда $\frac{\partial T_0}{\partial x_k} = \text{const}$, это утверждение остается в силе.

связывающее величину N с градиентом средней температуры. Из (6) следует, что $N = 0$ в случае $\frac{\partial T_0}{\partial x_k} = 0$, т. е. в случае, когда средняя температура постоянна, флуктуации температуры отсутствуют. Этот результат легко объясняется на основании простых качественных соображений. При турбулентном перемешивании температурно-однородной среды флуктуации температуры не возникают, так как при перемешивании меняются местами массы жидкости с одинаковой температурой.

Помимо множителя $\frac{\partial T_0}{\partial x_k}$, в (6) входит также величина $\langle T' v_k \rangle = q_k$, пропорциональная турбулентному потоку тепла *).

Пользуясь уравнением (2), мы смогли бы выразить и эту величину через T_0 и Q . Однако это неудобно, так как обычно функция Q неизвестна. Поэтому для определения величины q_k используют другой метод. Поток тепла, вызванный молекулярной диффузией q^M , пропорционален величине $\frac{\partial T}{\partial x_k}$:

$$q_k^M = -\chi \frac{\partial T}{\partial x_k}.$$

По аналогии с этой формулой вводят коэффициент турбулентной теплопроводности K_T согласно соотношению

$$\langle T' v_k \rangle = -K_T \frac{\partial T_0}{\partial x_k}. \quad (7)$$

Это эквивалентно утверждению, что турбулентный поток тепла пропорционален градиенту средней температуры и имеет по отношению к нему обратное направление. Величина коэффициента турбулентной теплопроводности K_T на много порядков превышает величину χ . Используя (7), запишем формулу (6) в виде

$$N = K_T \left(\frac{\partial T_0}{\partial x_k} \right)^2. \quad (8)$$

Формула (8) удобна для численных оценок величины N , так как входящие в нее величины могут быть сравнительно просто получены из метеорологических наблюдений (см. раздел В). Структура этой формулы аналогична структуре формулы $N = \chi \left\langle \left(\frac{\partial T'}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle$, но с заменой истинного градиента температуры на градиент средней температуры и коэффициента молекулярной теплопроводности на коэффициент турбулентной теплопроводности.

*) Турбулентный поток тепла равен $Q_k = \rho C_p q_k$, где C_p — теплоемкость единицы массы газа при постоянном давлении, ρ — плотность.

Рассмотрим теперь поле скоростей. В случае статистически стационарного режима мы должны рассмотреть движение под действием постоянных внешних сил f_i . В этом случае уравнение движения принимает вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} + v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} - \nu \Delta v_i = f_i, \quad (9)$$

где v_i — полная скорость:

$$v_i = u_i + v'_i, \quad \langle v_i \rangle = u_i(\mathbf{r}), \quad v'_i = v'_i(\mathbf{r}, t).$$

Умножим уравнение (9) на v_i . Учитывая, что

$$\begin{aligned} v_i \frac{\partial v_i}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_i^2}{2} \right), \\ v_i v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} &= v_k \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} v_i^2 v_k \right), \\ v_i \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{p v_k}{\rho} \right), \\ -\nu v_i \Delta v_i &= \frac{\partial}{\partial x_k} \left(-\nu v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right) + \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2, \end{aligned}$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{v_i^2}{2} \right) + \nu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{v_i^2}{2} v_k + \frac{p v_k}{\rho} - \nu v_i \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right] = f_i v_i. \quad (10)$$

В правой части (10) стоит работа, производимая в единицу времени внешней силой f_i . Выразим f_i через скорость усредненного движения. Для этого усредним уравнение (9). Учитывая, что

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \langle p \rangle = 0 \quad \text{и} \quad v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (v_k v_i),$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial x_k} (u_i u_k + \langle v'_i v'_k \rangle) - \nu \Delta u_i = f_i. \quad (11)$$

Величина

$$\langle v'_i v'_k \rangle = \tau_{ik} \quad (12)$$

пропорциональна тензору напряжений Рейнольдса *). Умножим уравнение (11) на v_i и усредним:

$$\langle f_i v_i \rangle = f_i u_i = u_i \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} + u_i \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} - \nu u_i \Delta u_i. \quad (13)$$

*) Тензор напряжений Рейнольдса равен $\langle \rho v'_i v'_k \rangle = \rho \tau_{ik}$.

Уравнение (13) также можно преобразовать с использованием уравнения несжимаемости $\frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0$:

$$u_i \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{1}{2} u_i^2 u_k \right),$$

$$u_i \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} (u_i \tau_{ik}) - \tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k},$$

$$- \nu u_i \Delta u_i = - \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\nu u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2.$$

Тогда получим

$$\langle f_i v_i \rangle = - \tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\frac{u_i^2}{2} u_k + u_i \tau_{ik} - \nu u_i \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right). \quad (14)$$

Усредним уравнение (10) и в правую часть усредненного уравнения подставим выражение (14). При этом мы опустим слагаемые типа дивергенции, которые исчезают при усреднении по объему:

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle v_i'^2 \rangle}{2} \right) + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2 + \nu \left\langle \left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle = - \tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right)^2.$$

В левой части последнего равенства мы подставили

$$\left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \right)^2 = \left(\frac{\partial u_i}{\partial x} \right)^2 + \left\langle \left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle.$$

Следовательно, имеет место равенство

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\langle v_i'^2 \rangle}{2} \right) + \nu \left\langle \left(\frac{\partial v_i'}{\partial x_k} \right)^2 \right\rangle = - \tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае статистически стационарного режима величина $\langle v_i'^2 \rangle$ не зависит от времени. Согласно же уравнениям (1.10) и (4.10) второе слагаемое в левой части (15) представляет собой величину ε . Следовательно, в стационарном случае имеет место равенство

$$\varepsilon = - \tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}. \quad (16)$$

Уравнение (16) выражает величину ε через градиенты средней скорости потока u_i и напряжения Рейнольдса τ_{ik} . Это уравне-

ние аналогично уравнению (6), выражающему N через $\frac{\partial T_0}{\partial x_k}$. Фигурирующие в (16) напряжения Рейнольдса τ_{ik} представляют собой турбулентный поток количества движения. Подобно тому как турбулентный поток тепла направлен против градиента средней температуры $\frac{\partial T_0}{\partial x_k}$ и по величине пропорционален ему, турбулентный поток количества движения пропорционален градиенту средней скорости, т. е.

$$\tau_{ik} = -K \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right), \quad (17)$$

где K — коэффициент турбулентной вязкости (коэффициент турбулентного обмена). В правой части (17) взята симметризованная по индексам i и k величина, что должно обеспечить симметрию тензора τ_{ik} , которая следует из определения (12). Коэффициент турбулентной вязкости K , вообще говоря, не совпадает с введенным выше коэффициентом турбулентной теплопроводности K_T .

Подставляя (17) в формулу (16), получим

$$\varepsilon = K \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \quad (18)$$

или, в эквивалентной форме

$$\varepsilon = \frac{1}{2} K \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right)^2. \quad (18')$$

Выражения (18) и (18') по своей структуре совпадают с выражением (1.10) для ε , но в них истинные градиенты скорости заменены на градиенты средних скоростей, а кинематическая вязкость ν — на коэффициент турбулентной вязкости K .

Введенные величины K , K_T позволяют выразить турбулентный «поток температуры» $\langle u'_k T' \rangle$ и напряжения Рейнольдса τ_{ik} через градиенты средних значений температуры и скорости. Вообще говоря, эти величины должны быть определены из точных решений соответствующих нелинейных задач. Поскольку, однако, мы не располагаем такими точными решениями, мы вынуждены вводить в рассмотрение величины типа K и принимать для них те или иные ашпроксимирующие формулы. Такой подход к задаче носит название полуэмпирической теории турбулентности.

Оказывается полезным рассмотреть аналогию между процессами молекулярной и турбулентной теплопроводности. В кинетической теории газов (см., например, [26]) для коэффициента

температуропроводности найдено выражение $\chi \sim \lambda \nu$, где λ — длина свободного пробега молекулы и ν — ее среднеквадратичная скорость. Точно такое же выражение (с другим численным коэффициентом) справедливо и для кинематической вязкости ν . Составляя аналогичное выражение для коэффициента турбулентной вязкости K , мы должны учесть, что в процессе турбулентного перемешивания роль молекул играют отдельные перемещающиеся неоднородности. При этом вместо среднеквадратичной скорости молекул ν следует использовать среднеквадратичную скорость турбулентных пульсаций и вместо длины свободного пробега λ — так называемый путь перемешивания (понятие, введенное Прандтлем [27]), который по порядку величины совпадает с радиусом корреляции L_0 поля скоростей. Таким образом, величина K имеет вид

$$K \sim L_0 \nu. \quad (19)$$

Коэффициент пропорциональности в формуле (19) устанавливается для каждого конкретного типа движения на основании экспериментальных данных. Ниже будет приведено выражение K для одного из наиболее полно исследованных типов турбулентного движения в приземном слое атмосферы.

В некоторых случаях для коэффициента турбулентной вязкости K используется выражение, получаемое из следующих модельных соображений. Рассмотрим выражение для турбулентного потока тепла

$$\langle v'_k T' \rangle = -K_T \frac{\partial T_0}{\partial x_k}$$

(которое, по существу, является определением K_T) для частного случая, когда $T_0 = T_0(z)$. В этом случае можно представить себе, что флуктуация температуры T' на уровне z обусловлена тем, что на этот уровень переместился элементарный объем воздуха с другого уровня z' , расположенного ниже z на некоторую величину l' :

$$z' = z - l'.$$

l' представляет собой случайный «путь пробега» рассматриваемого элементарного объема. В этом случае

$$T' = T_0(z - l') - T_0(z) \approx -\frac{\partial T_0}{\partial z} l' \quad *).$$

Подставляя это выражение в $\langle v'_z T' \rangle$, получим

$$\langle v'_z T' \rangle = -\frac{\partial T_0}{\partial z} \langle v'_z l' \rangle,$$

*) Мы пренебрегли здесь изменением температуры при перемещении (см. § 15)

откуда вытекает следующая формула для K_T :

$$K_T = \langle v_z' l' \rangle. \quad (19')$$

Это выражение для коэффициента турбулентного обмена используется в некоторых работах по турбулентности, оперирующих с понятием «пути пробега» или «пути смешения». Его вывод не связан фактически именно с турбулентным потоком тепла, так как вместо температуры можно было бы рассмотреть и любую другую переносимую примесь *).

В условиях атмосферы обычно все усредненные характеристики ветра, температуры, влажности и т. д. зависят лишь от высоты z над поверхностью. В этом случае

$$N = K_T \left(\frac{dT_0}{dz} \right)^2, \quad (20)$$

$$\varepsilon = K \left[\left(\frac{du_x}{dz} \right)^2 + \left(\frac{du_y}{dz} \right)^2 \right] = K \left(\frac{du}{dz} \right)^2. \quad (21)$$

Подставим эти величины в формулу $C_T^2 = a^2 \frac{N}{\varepsilon^{1/3}}$, определяющую коэффициент в «законе 2/3» для температурных флуктуаций; обозначая через α величину $\frac{K_T}{K} = \alpha$, получим

$$C_T^2 = a^2 \alpha \left[\frac{K^2}{\left(\frac{du}{dz} \right)^2} \right]^{1/3} \left(\frac{dT_0}{dz} \right)^2. \quad (22)$$

Пользуясь формулой (22), можно связать величину K с внешним масштабом турбулентности L_0 . При наличии градиента средней температуры имеется систематическая разность температур между находящимися на различной высоте точками. Эта величина ΔT_0 приблизительно равна $\Delta T_0 \approx \frac{dT_0}{dz} \Delta z$, а ее квадрат $(\Delta T_0)^2 \approx \left(\frac{dT_0}{dz} \right)^2 (\Delta z)^2$. В то же время между этими точками существует случайная разность температур, средний квадрат которой равен $C_T^2 (\Delta z)^2$. При малых значениях Δz величина $C_T^2 (\Delta z)^2$ намного превышает систематическую разность $\left(\frac{dT_0}{dz} \right)^2 \Delta z^2$ (т. е. случайные разности температуры намного превышают систематические). Можно, однако, указать такое Δz_0 , при котором обе

*) Заметим, однако, что соотношение (19') не позволяет экспериментально предельно определить K_T , так как «путь смешения» l' — слишком неопределенная величина, которую невозможно измерить.

величины сравниваются и при $\Delta z > \Delta z_0$ систематическая разность уже будет превышать случайную. Эта величина Δz_0 играет роль масштаба перемешивания по вертикали. Ясно, что «закон 2/3» будет выполняться лишь для расстояний r , не превышающих этого масштаба перемешивания. Поэтому величину Δz_0 можно принять за внешний масштаб турбулентности.

Для определения Δz_0 мы имеем уравнение

$$C_T^2 \Delta z_0^{2/3} = \left(\frac{dT_0}{dz} \right)^2 \Delta z_0^2.$$

Подставляя сюда (22), получим

$$\Delta z_0 = a^{1/2} \alpha^{3/4} \left[\frac{K}{(du/dz)} \right]^{1/4}.$$

За внешний масштаб турбулентности L_0 мы примем величину, отличающуюся от Δz_0 лишь численным коэффициентом:

$$L_0 = \frac{\Delta z_0}{a^{1/2} \alpha^{3/4}}.$$

L_0 связано с K соотношением

$$K = L_0^2 \left| \frac{du}{dz} \right|. \quad (23)$$

Формула (23) является лишь некоторым видоизменением формулы (19), поскольку фигурирующая в (19) величина u пропорциональна $L_0 \left| \frac{du}{dz} \right|$. Используя (23), мы можем представить выражение (22) в виде

$$C_T^2 = \alpha a^2 L_0^{1/3} \left(\frac{dT_0}{dz} \right)^2. \quad (24)$$

Нет особенно веских оснований для того, чтобы отдать предпочтение одной из формул (22) или (24) для определения C_T через характеристики усредненных полей T_0 , u . По-видимому, величина L_0 в условиях реальной атмосферы более устойчива и легче поддается непосредственному определению.

Формулы (22) и (24) могут быть использованы для оценок величины C_T в атмосфере. Особенно эффективно их использование в приземном слое атмосферы, где имеется большой экспериментальный материал, позволивший непосредственно проверить эти соотношения и найти фигурирующие в них численные коэффициенты. Что касается их применения к условиям свободной атмосферы, то они правильно дают порядок величины C_T , но нуждаются в проверке на значительном экспериментальном материале.

§ 15. Микроструктура коэффициента преломления в турбулентном потоке

Коэффициент преломления радиоволн сантиметрового диапазона n является функцией абсолютной температуры T , давления p (в миллибарах) и упругости водяных паров e (в миллибарах):

$$n - 1 = 10^{-6} \frac{79}{T} \left(p + \frac{4800e}{T} \right). \quad (1)$$

Нетрудно понять, что входящие сюда величины T и e , строго говоря, не являются консервативными примесями. В самом деле, известно, что при вертикальных перемещениях малых объемов воздуха происходит непрерывное выравнивание давления в них с давлением окружающего воздуха на данной высоте. Изменения давления вызывают изменения температуры, подчиняющиеся уравнению адиабаты

$$\frac{dT}{T} = \frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{dp}{p},$$

где $\gamma = \frac{C_p}{C_v}$ — постоянная Пуассона. Величина dp связана с изменением высоты барометрической формулой $dp = -\rho g dz$, где ρ — плотность воздуха и g — ускорение силы тяжести.

Таким образом,

$$\begin{aligned} \frac{dT}{T} &= -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{\rho g}{p} dz = -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{RT} dz, \\ \frac{dT}{dz} &= -\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{g}{RT} = -\frac{g}{C_p} = -\gamma_a. \end{aligned} \quad (2)$$

Величина $\gamma_a = 0,98$ град/100 м носит название адиабатического градиента температуры (поднимающийся объем воздуха охлаждается на 0,98 град на каждые 100 м подъема). Проинтегрировав уравнение (2), получим $T + \gamma_a z = \text{const}$. Следовательно, при вертикальных перемещениях частиц воздуха величина

$$H = T + \gamma_a z, \quad (3)$$

которая приближенно совпадает с известной в метеорологии потенциальной температурой*), сохраняет свое значение и может рассматриваться как консервативная примесь.

Упругость водяных паров e , входящая в формулу (1), также не является консервативной величиной, так как зависит от

*) Потенциальная температура θ определяется так: $\theta = T(p_0/p)^\alpha$, где $p_0 = 1000$ мб и $\alpha = (C_p - C_v)/C_p = 0,286$. Разлагая θ в ряд с использованием барометрической формулы, получим (3).

давления. Она может быть выражена через так называемую удельную влажность q , представляющую собой концентрацию водяных паров в воздухе (т. е. отношение массы водяного пара в единице объема к массе влажного воздуха в этом объеме), при помощи приближенной формулы:

$$e = 1,62 pq. \quad (4)$$

Величина q — консервативная примесь (предполагается, что во время перемещений влажного воздуха не происходит конденсации водяных паров). Заменяя в формуле (1) величины T и e на $H - \gamma_a z$ и $1,62 pq$ соответственно, получим формулу

$$(n - 1) 10^6 = N = \frac{79p}{H - \gamma_a z} \left(1 + \frac{7800q}{H - \gamma_a z} \right), \quad (5)$$

выражающую коэффициент преломления через консервативные пассивные примеси H и q . Величина N зависит от z через $p(z)$, $H(z)$, $q(z)$ и непосредственно от z :

$$N = N(z, p(z), H(z), q(z)).$$

Представим себе, что объем воздуха с уровня z_1 , характеризующий значением

$$N_1 = N(z_1, p(z_1), H(z_1), q(z_1)),$$

в результате действия турбулентного перемешивания оказался на уровне z_2 . Поскольку величины $H(z)$ и $q(z)$ не изменяются при перемешивании объема, а величины z и $p(z)$ принимают на уровне z_2 новые значения z_2 и $p(z_2)$, тот же объем воздуха на уровне z_2 будет характеризоваться значением

$$N'_1 = N(z_2, p(z_2), H(z_1), q(z_1)).$$

Значение N'_1 отличается от «местного» значения N на уровне z_2 на величину

$$\begin{aligned} \Delta N &= N(z_2, p(z_2), H(z_1), q(z_1)) - N(z_2, p(z_2), H(z_2), q(z_2)) \approx \\ &\approx \left(\frac{dN}{dH} \frac{dH}{dz} + \frac{dN}{dq} \frac{dq}{dz} \right) \Delta z. \end{aligned}$$

Таким образом, возникающие флуктуации N пропорциональны не градиенту n , а величине

$$\begin{aligned} M &= \left(\frac{dN}{dH} \frac{dH}{dz} + \frac{dN}{dq} \frac{dq}{dz} \right) 10^6 = \\ &= - \frac{79 \cdot 10^{-6} p}{T^2} \left(1 + \frac{15500q}{T} \right) \left(\frac{dH}{dz} - \frac{7800}{1 + \frac{15500q}{T}} \frac{dq}{dz} \right) = \\ &= - \frac{79 \cdot 10^{-6} p}{T^2} \left(1 + \frac{15500q}{T} \right) \left(\frac{dT}{dz} + \gamma_a - \frac{7800}{1 + \frac{15500q}{T}} \frac{dq}{dz} \right). \quad (6) \end{aligned}$$

Выражение (6) должно использоваться при нахождении величины флуктуаций коэффициента преломления n .

Структурная функция коэффициента преломления атмосферы может быть представлена формулой

$$D_n(z) = \begin{cases} C_n^2 r^{2/3} & \text{при } r \gg \lambda_0, \\ C_n^2 \lambda_0^{2/3} \frac{r^2}{\lambda_0^2} & \text{при } r \ll \lambda_0. \end{cases} \quad (7)$$

Фигурирующая здесь величина C_n^2 может быть найдена из соотношения

$$C_n^2 = a^2 \alpha' \left[\frac{K^2}{\left(\frac{du}{dz}\right)^2} \right]^{1/3} M^2 = a^2 \alpha' L_0^{4/3} M^2. \quad (8)$$

(Постоянная α' может незначительно отличаться от введенной выше величины α .)

Трехмерная спектральная плотность, соответствующая (7), имеет вид

$$\Phi_n(\kappa) = 0,033 C_n^2 \kappa^{-11/3} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (9)$$

где κ_m связано с величиной λ_0 соотношением $\kappa_m \lambda_0 = 5,92$.

Заметим, что учет изменений температуры, происходящих при вертикальных смещениях воздуха, приводит к тому, что флуктуации температуры пропорциональны не величине $(dT_0/dz)^2$, как это записано в формуле (22.14), а величине $(dT_0/dz + \gamma_a)^2$. Поэтому вместо формулы (22.14) следует писать

$$C_T^2 = a^2 \alpha \left[\frac{K^2}{\left(\frac{du}{dz}\right)^2} \right]^{1/3} \left(\frac{dT_0}{dz} + \gamma_a\right)^2. \quad (10)$$

В нижнем (приземном) слое атмосферы обычно наблюдаемые градиенты температуры намного превосходят величину γ_a и поэтому ею можно пренебречь в (10). В случае же свободной атмосферы, когда градиенты температуры сравнимы с γ_a , необходимо пользоваться формулой (10).

Учет этого эффекта легко произвести, если во все формулы, содержащие температуру T_0 , подставить вместо T_0 потенциальную температуру $H = T_0 + \gamma_a z$. Имея в виду эту возможность, в дальнейшем мы иногда не будем специально отмечать различия между T_0 и H .

§ 16. Турбулентность в приземном слое атмосферы

Приземный слой атмосферы, т. е. слой толщиной в несколько десятков метров над поверхностью Земли, по своей структуре сильно отличается от свободной атмосферы. В этом слое основным фактором, определяющим движение, является трение о подстилающую поверхность. За счет действия турбулентного перемешивания явление трения распространяется на весь приземный слой. Если рассмотреть силы, играющие роль при движении воздуха над подстилающей поверхностью земли, то в случае отсутствия архимедовых сил (что мы предполагаем сначала) оказывается, что напряжение трения о землю намного превышает все остальные силы (градиент давления, сила Кориолиса). Напряжение трения уравнивается при стационарном режиме рейнольдсовыми напряжениями, которые, таким образом, постоянны в пределах приземного слоя.

Рассмотрим движение над плоской (в среднем) подстилающей поверхностью.

В этом случае все усредненные характеристики движения могут зависеть лишь от высоты z над землей. Направляя ось x по направлению средней скорости ветра u , получим $u_x = u(z)$, $u_y = u_z = 0$. Основной характеристикой движения является величина турбулентных напряжений Рейнольдса на единицу массы $\tau_{ik} = \langle v_i v_k \rangle$.

Из соображений симметрии ясно, что отличными от нуля компонентами этого тензора являются τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} (средние квадраты флуктуаций компонент скорости) и $\tau_{13} = \tau_{31}$. Компоненты же $\tau_{12} = \tau_{21}$ и $\tau_{23} = \tau_{32}$ равны нулю (поток количества движения направлен вертикально). Величина $\tau_{13} = \tau_{31}$ — рейнольдсово напряжение, уравнивающее напряжение трения, — постоянна в приземном слое. Вместо τ_{13} вводят величину v_* согласно соотношению

$$\tau_{13} = -v_*^2. \quad (1)$$

Так как τ_{ik} имеет размерность квадрата скорости, то v_* представляет собой некоторую характерную скорость в приземном слое, называемую скоростью трения.

В приземном слое единственным масштабом длины является высота над подстилающей поверхностью.

Величина u_x зависит лишь от z . Ее производная может зависеть лишь от v_* и z *). Из соображений размерности ясно, что

$$\frac{du}{dz} = \frac{v_*}{\kappa z}, \quad (2)$$

*) Это, разумеется, справедливо, когда высота z велика по сравнению с характерными размерами неровностей подстилающей поверхности.

где κ — числовая константа — постоянная Кармана (не смешивать с волновым числом!).

Воспользуемся теперь соотношением (17.14), связывающим τ_{ik} и $\frac{\partial u_i}{\partial x_k}$; положив $i = 1$, $k = 3$, получим, используя (1) и (2):

$$-v_*^2 = -K \frac{v_*}{\kappa z},$$

откуда находим выражение для коэффициента турбулентного обмена

$$K = \kappa v_* z. \quad (3)$$

Определим также величину скорости диссипации энергии турбулентности ε . Воспользовавшись формулами (21.14), (2) и (3), получим

$$\varepsilon = \frac{v_*^3}{\kappa z}. \quad (4)$$

Из формулы (23.14) мы можем найти выражение для внешнего масштаба турбулентности L_0 :

$$L_0 = \kappa z, \quad (5)$$

который, естественно, оказывается просто пропорциональным высоте.

Интегрируя уравнение (2), можно получить и вид зависимости $u(z)$:

$$u(z) = \frac{v_*}{\kappa} \ln \frac{z}{z_0}, \quad (6)$$

где z_0 — постоянная интегрирования. Величина z_0 связана с размерами неоднородностей подстилающей поверхности, и поэтому, в силу примечания к формуле (2), выражение (6) справедливо при $z \gg z_0$. Таким образом, профиль ветра в приземном слое оказывается логарифмическим. Величина z_0 , входящая в (6) и носящая название высоты шероховатости, зависит от структуры подстилающей поверхности. Пользуясь формулой (6), можно определять величину v_* по сравнительно простым измерениям средней скорости ветра на различных высотах. При этом используется определенное экспериментально значение постоянной κ , приблизительно равное 0,4 (см. раздел В).

В приземном слое атмосферы ε зависит от высоты согласно формуле (4). Подставляя (4) в формулу (7.12) для $D_{\text{гг}}$, получим в

инерционном интервале

$$D_{rr}(r) = C^2 v_*^2 \frac{r^{3/2}}{(\kappa z)^{3/2}}. \quad (7)$$

Таким образом флуктуации разности скоростей убывают с высотой: $D_{rr} \sim z^{-3/2}$. Внутренний масштаб турбулентности $l_0 = \nu^{1/2} \varepsilon^{-1/2}$ также зависит от высоты.

Подставляя в это выражение формулу (4), получим $l_0 \sim z^{1/2}$. «Закон 2/3» справедлив, как уже упоминалось, при $r \ll L_0$. Так как в приземном слое $L_0 = \kappa z$, то (7) выполняется лишь в случае, когда расстояния r между точками наблюдения мало по сравнению с высотой. В случае же, когда r сравнимо или превышает z , разность скоростей больше не является статистически изотропной и D_{rr} зависит от ориентации вектора r .

Рассмотрим также структуру температурного поля в приземном слое атмосферы. Полученные выше выражения относились к случаю, когда влиянием архимедовых сил на динамику потока можно было пренебречь. Это означает, что температурная стратификация соответствует безразличному равновесию. Как мы установили в предыдущем параграфе, при вертикальных адиабатических смещениях элементарного объема воздуха его температура меняется по закону $T' = T_0 - \gamma_a \Delta z$. Поэтому для того, чтобы при таких смещениях не возникали архимедовы силы, необходимо, чтобы температура окружающей среды в точке, куда сместился рассматриваемый объем, также была равна $T_0 - \gamma_a \Delta z$. Отсюда следует, что при безразличной температурной стратификации профиль температуры описывается линейным законом: $T(z) = T_0 - \gamma_a z$. В этом случае температурные флуктуации отсутствуют, так как величина $\frac{dT}{dz} + \gamma_a$, входящая в формулу (10.15), обращается в нуль.

Рассмотрим температурную стратификацию, слабо отличающуюся от безразличной. В этом случае в первом приближении влиянием архимедовых сил на турбулентный режим можно еще пренебречь, но величина $\frac{\partial T_0}{\partial z} + \gamma_a$ уже не равна нулю, так что в среде возникают температурные флуктуации.

Установим вид профиля средней температуры для этого случая. Исходным здесь является предположение о постоянстве турбулентного потока тепла, аналогичное предположению о постоянстве турбулентных напряжений. (Практически все тепло, поступающее от поверхности земли, передается без потерь через приземный слой.) Тогда согласно формуле (7.14)

$$-\langle T' v'_z \rangle = K_T \frac{dT_0}{dz} = \text{const} = \alpha \nu T_*, \quad (8)$$

где введена характеристика температурного поля T_* , имеющая размерность температуры.

В формулу (8), являющуюся определением T_* , введена величина $\alpha = K_T/K$ (α^{-1} — турбулентное число Прандтля). Так как в приземном слое турбулентный поток тепла не зависит от высоты, то $\alpha \nu_* T_* = \text{const}$. Мы будем считать, что $T_* = \text{const}$ и, следовательно, $\alpha = \text{const}$ (это предположение с достаточной точностью подтверждается экспериментально).

Подставляя в (8) $K_T = \alpha K = \alpha \nu_* z$, получим

$$\frac{dT_0}{dz} = \frac{T_*}{z} \quad (9)$$

и

$$T_0(z) = T_* \ln \frac{z}{z_0} + T(z_0). \quad (10)$$

Таким образом, при стратификации атмосферы в приземном слое, близкой к безразличной, профиль средней температуры, как и профиль средней скорости ветра, имеет логарифмический вид. Величина T_* легко может быть определена экспериментально по измерениям средней температуры на нескольких высотах. Подставляя (9) в формулу (10.15), получим для инерционного интервала

$$D_T(r) = a^2 \kappa^{4/3} \alpha \frac{(T_* + \gamma_a z)^2}{z^{2/3}} r^{2/3}. \quad (11)$$

Таким образом, флуктуации разности температур в приземном слое убывают с высотой как $z^{-2/3}$ (величиной $\gamma_a z$ обычно можно пренебречь).

Рассмотрим теперь случай, когда влиянием архимедовых сил на турбулентный режим пренебречь нельзя.

В этом случае в уравнениях движения добавляется слагаемое, учитывающее архимедову силу. Оно имеет вид gT'/T_0 , где T' — пульсация температуры в точке r . Таким образом, в задаче появляется новый размерный параметр $\beta = \frac{g}{T_0}$, который вместе с величинами ν_* , T_* определяет режим турбулентного движения. Из параметров ν_* , T_* и β можно составить единственным образом (с точностью до численного множителя) масштаб длины

$$L = \frac{\nu_*^2}{\alpha \kappa^2 \beta T_*}, \quad (12)$$

введенный в работах А. М. Обухова и А. С. Моница [28—31], которым мы и следуем при дальнейшем изложении. Коэффициент турбулентного обмена K , который при безразличной

стратификации выражался формулой $K = \kappa v_* z$, теперь может быть записан в виде

$$K = \frac{\kappa v_* z}{\Phi\left(\frac{z}{L}\right)}, \quad (13)$$

где $\Phi(z/L)$ — безразмерная функция безразмерного аргумента z/L . В случае, если турбулентный поток тепла равен нулю, что соответствует безразличной температурной стратификации, $T_* = 0$ и $L = \infty$. В этом предельном случае формула (13) должна переходить в прежнюю формулу (3), откуда следует, что $\Phi(0) = 1$. При $z \ll |L|$ получим $\Phi \approx 1$; отсюда следует, что при $z \ll |L|$ влиянием архимедовых сил можно пренебречь. В связи с этим величину L называют толщиной подслоя динамической турбулентности.

Подставляя в уравнение (17.14) $\tau_{13} = -v_*^2$ и выражение (13) для K , получим (при $i = 1, k = 3$)

$$\frac{du}{dz} = \frac{v_*}{\kappa z} \Phi\left(\frac{z}{L}\right). \quad (14)$$

Точно так же, подставляя в (8)

$$K_T = \alpha K = \frac{\alpha \kappa v_* z}{\Phi},$$

будем иметь

$$\frac{dT_0}{dz} = \frac{T_*}{z} \Phi\left(\frac{z}{L}\right). \quad (15)$$

Интегрируя уравнения (14) и (15), получим

$$u(z) - u(z_0) = \frac{v_*}{\kappa} \left[f\left(\frac{z}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right) \right], \quad (16)$$

$$T(z) - T(z_0) = T_* \left[f\left(\frac{z}{L}\right) - f\left(\frac{z_0}{L}\right) \right], \quad (17)$$

где

$$f(\zeta) = \int_{\xi}^{\zeta} \Phi(\xi) \frac{d\xi}{\xi}. \quad (18)$$

Из (16) и (17) следует, что профили скорости ветра и температуры подобны. Это является следствием предположения о постоянстве $\alpha = K_T/K$. Так как $\Phi(\xi) \approx 1$ при $\xi \ll 1$, то в этом случае т. е.

$$f(\zeta) \approx \ln \zeta + \text{const},$$

при $z \ll L$, профили ветра и температуры имеют логарифмический характер. При больших значениях ζ функция $f(\zeta)$ сильно отклоняется от логарифмической. При этом вид функции $f(\zeta)$ при

$\xi > 0$ (что соответствует $L > 0$, т. е. $T_* > 0$) и при $\xi < 0$ ($T_* < 0$) различен. Так, например, при $\xi \ll -1$ ($T_* < 0$, неустойчивая стратификация, конвективные условия) $f(\xi) = C_1 \xi^{-1/4} + \text{const}$. Вид функции $f(\xi)$ (или соответствующей ей функции $\Phi(\xi) = \xi f'(\xi)$) был изучен экспериментально в ряде работ (см. раздел В).

Выразим через функции Φ или $f(\xi)$ величины ϵ и N .

Выше (в § 14) на основании уравнений движения была получена формула (21.14) $\epsilon = K \left(\frac{du}{dz} \right)^2$ для скорости диссипации энергии турбулентности. Положенные в основу уравнения движения не содержали слагаемого, описывающего архимедовы силы. Это слагаемое появляется в z -компоненте уравнения движения и имеет вид $\beta T'$. При составлении уравнения для ϵ в § 14 мы умножали уравнение движения на скорость и затем усредняли его. Дополнительное слагаемое $+\beta T'$ даст при этом вклад $+\beta \langle T' v_z \rangle = = \beta q_z$ в величину ϵ , которая оказывается равной

$$\epsilon = -\tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \beta q_z.$$

Подставляя сюда выражения

$$-\tau_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = K \left(\frac{du}{dz} \right)^2,$$

$$q_z = -K_T \frac{dT_0}{dz} = -\alpha K \frac{dT_0}{dz},$$

а также (13), (14) и (15), получим

$$\epsilon = K \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \left[1 - \alpha \beta \frac{dT_0}{dz} / \left(\frac{du}{dz} \right)^2 \right], \quad (19)$$

или

$$\epsilon = \frac{v_*^3}{\kappa z} \Phi\left(\frac{z}{L}\right) - \alpha \beta \kappa v_* T_* = \frac{v_*^3}{\kappa z} \left[\Phi\left(\frac{z}{L}\right) - \frac{z}{L} \right]. \quad (19')$$

Полученное выше (§ 14) выражение для N остается в силе и в рассматриваемом случае:

$$N = K_T \left(\frac{dT_0}{dz} \right)^2 = \frac{\kappa \alpha v_* T_*^2}{z} \Phi\left(\frac{z}{L}\right). \quad (20)$$

Используя выражения (19) и (20), можно написать формулы, определяющие структурные функции D_{rr} и D_T в инерционном

интервале:

$$D_{rr}(r) = C^2 e^{2\gamma} r^{2/3} = C^2 v_*^2 \left[\varphi \left(\frac{z}{L} \right) - \frac{z}{L} \right]^{2/3} \left(\frac{r}{\kappa z} \right)^{2/3}, \quad (21)$$

$$D_T = a^2 \frac{N}{e^{1/3}} r^{2/3} = \kappa^2 a^2 \alpha T_*^2 \frac{\varphi \left(\frac{z}{L} \right)}{\left[\varphi \left(\frac{z}{L} \right) - \frac{z}{L} \right]^{1/3}} \left(\frac{r}{\kappa z} \right)^{2/3}. \quad (22)$$

Формулы (21) и (22) отличаются от соответствующих формул для случая безразличной стратификации наличием дополнительных множителей, зависящих от z/L и обращающихся в единицу при $L = \infty$.

Важной характеристикой температурной стратификации атмосферы является так называемое число Ричардсона [32]

$$Ri = \frac{g}{T_0} \frac{\frac{dT_0}{dz} + \gamma_a}{\left(\frac{du}{dz} \right)^2}, \quad (23)$$

являющееся отношением мощности, расходуемой на преодоление архимедовых сил, к мощности рейнольдсовых напряжений. Первая из этих величин равна (см. вывод формулы (19))

$$\beta q_z = -\beta K_T \left(\frac{\partial T_0}{\partial z} + \gamma_a \right)$$

(мы учли здесь разницу между обычной и потенциальной температурами), вторая — $K \left(\frac{du}{dz} \right)^2$. Их отношение (с точностью до множителя $(-\alpha)$) и равно числу Ричардсона (23). В случае устойчивой температурной стратификации $Ri > 0$. При неустойчивой стратификации (конвективные условия) $Ri < 0$. С увеличением числа Ri увеличивается доля энергии, расходуемая на преодоление архимедовых сил, что приводит к ослаблению турбулентности. (Напомним, что согласно (19) и (23) $e = K \left(\frac{du}{dz} \right)^2 (1 - \alpha Ri)$.)

Таким образом, можно ожидать, что характеристики турбулентности будут зависеть от Ri .

В приземном слое атмосферы параметр стратификации связан с Ri . Действительно, пренебрегая в (23) величиной γ_a и подставляя (14), (15) и (12), получим формулу, связывающую Ri и $\varphi \left(\frac{z}{L} \right)$:

$$Ri(z) = \frac{z/L}{\alpha \varphi \left(\frac{z}{L} \right)}. \quad (24)$$

Эта формула позволяет для заданного L найти Ri для любой высоты z . Следовательно, параметры Ri и L однозначно связаны и вместо того, чтобы указывать значение L , можно указать величину Ri для какой-либо высоты и по ней найти L . Для приземного слоя использование величины L более удобно, так как в этом случае мы имеем дело лишь с одной числовой характеристикой стратификации, а не с функцией $Ri(z)$. Однако использование в качестве характеристики стратификации числа Ричардсона имеет свои преимущества; так Ri сравнительно легко может быть определено не только для приземного слоя, но и для свободной атмосферы, где универсальные профили ветра и температуры не существуют. Поэтому, выражая все экспериментальные зависимости, полученные в приземном слое, через Ri , можно попытаться экстраполировать их и на случай свободной атмосферы.

Считая, что функция $\varphi(z/L)$ известна, мы можем найти связь между Ri и $\zeta = \frac{z}{L}$. Это позволит выразить $\varphi(z/L)$ как функцию Ri ; обозначим

$$\varphi\left(\frac{z}{L}\right) = \psi(Ri). \quad (25)$$

Тогда $\frac{z}{L} = \alpha Ri \cdot \psi(Ri)$. Выражая величины v_* и κT_* при помощи формул (14) и (15) через производные $\frac{du}{dz}$, $\frac{dT}{dz}$, подставляя полученные значения в (21), (22) и вводя $L_0 = \kappa z$, получим формулы

$$D_{rr}(r) = C^2 \frac{(1 - \alpha Ri)^{3/2}}{[\psi(Ri)]^{3/2}} \left(L_0 \frac{du}{dz}\right)^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{3/2}, \quad (26)$$

$$D_T(r) = a^2 \alpha \frac{1}{[\psi(Ri)]^{3/2} (1 - \alpha Ri)^{1/2}} \left(L_0 \frac{dT_0}{dz}\right)^2 \left(\frac{r}{L_0}\right)^{3/2}, \quad (27)$$

записанные в виде, позволяющем применять их не только в приземном слое, но и в свободной атмосфере*). Функция $\psi(Ri)$, входящая в (26) и (27), была определена экспериментально несколькими независимыми методами и приведена в § 22.

Отметим, что в случае даже сравнительно небольших по абсолютной величине отрицательных значений чисел Ri режим турбулентности соответствует режиму свободной конвекции (переход к этому режиму происходит при $Ri < -0,05$). В этом случае

$$\varphi(\zeta) \approx \frac{C_1}{3} (|\zeta|)^{-1/2}$$

*) Разумеется, применимость этих формул к условиям свободной атмосферы нуждается в экспериментальной проверке.

и

$$\psi(\text{Ri}) = \alpha^{-1/4} \left(\frac{C_1}{3} \right)^{3/4} |\text{Ri}|^{-1/4}.$$

Подставляя указанное значение $\psi(\xi)$ в формулу (19), получим для $|\xi| \gg 1$ (точнее, для $\xi \ll -1$)

$$\varepsilon = \frac{v^3}{\kappa |L|},$$

т. е. при режиме свободной конвекции и $z \gg |L| \varepsilon$ не зависит от высоты. В то же время

$$N = \frac{\alpha C_1 \kappa v T^2 |L|^{1/2}}{3z^{4/3}},$$

т. е. N убывает с высотой как $z^{1/3}$. Следовательно, при свободной конвекции флуктуации скорости не зависят от высоты, а флуктуации температуры убывают с высотой как $z^{1/3}$, т. е. значительно быстрее, чем при режиме чисто динамической турбулентности. В случае режима свободной конвекции как ε , так и N могут быть выражены через «поток температуры»

$$q = \langle T'v'_z \rangle = -\alpha \kappa v T_*.$$

Подставляя $L = v^2 / \alpha \kappa^2 \beta T_*$ в формулы для ε и N и выражая $v T_*$ через q , получим

$$\varepsilon = \beta q, \quad N = \frac{C_1}{3\kappa^{4/3} \alpha} \frac{q^{3/2}}{z^{4/3} \beta^{1/2}}. \quad (28)$$

§ 17. Влияние сил плавучести на микроструктуру полей скорости и температуры

В предыдущем параграфе мы рассмотрели влияние сил плавучести (архимедовых сил) на характеристики среднего движения ($u(z)$, $T(z)$). Однако эти силы оказывают влияние не только на параметры усредненного движения, но и на микроструктуру скорости ветра и температуры. Этот вопрос рассматривался в работах А. М. Обухова [33, 34], Р. Больджапо [35], А. С. Моница [36].

Микроструктура полей скорости и температуры в инерционном интервале при отсутствии сил плавучести определялась параметрами ε и N . При учете сил плавучести к ним необходимо добавить новый параметр $\beta = g/T_0$. Из ε , N и β можно составить величины с размерностью масштаба

$$L_k = \varepsilon^{3/4} \beta^{-3/4} N^{-3/4}, \quad (1)$$

скорости

$$v_k = \varepsilon^{1/2} \beta^{-1/2} N^{-1/2} \quad (2)$$

и температуры

$$T_k = \varepsilon^{1/2} \beta^{-1/2} N^{1/2}. \quad (3)$$

Пользуясь этими величинами, можно составить выражение для спектральных плотностей $E(\kappa)$ и $\Phi_T(\kappa)$. Так как единственной безразмерной комбинацией, которую можно составить из ε , N , β и κ , является величина κL_k , то, воспользовавшись соображениями размерности, можно написать

$$E(\kappa) = L_k v_k^2 f(\kappa L_k) = \varepsilon^{1/2} N^{-3/2} \beta^{-3/2} f(\kappa \varepsilon^{1/2} \beta^{-3/2} N^{-3/2}), \quad (4)$$

$$\Phi_T(\kappa) = L_k^3 T_k^2 \varphi(\kappa L_k) = \varepsilon^{1/2} \beta^{-1/2} N^{-7/2} \varphi(\kappa \varepsilon^{1/2} \beta^{-1/2} N^{-7/2}). \quad (5)$$

Если параметр β устремить к нулю (что соответствует отсутствию архимедовых сил), то он должен выпасть из формул (4) и (5). Отсюда можно получить асимптотические выражения

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = C_1 x^{-3/2}, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \varphi(x) = C_2 x^{-11/2},$$

которые приводят к прежним выражениям

$$E(x) = C_1 \varepsilon^{1/2} x^{-3/2}, \quad \Phi_T(x) = C_2 N \varepsilon^{1/2} x^{-11/2},$$

справедливым в инерционном интервале. Из этих асимптотических формул видно, что при $\kappa L_k \gg 1$, т. е. в области $\kappa \gg \frac{2\pi}{L_k}$, спектры флуктуаций скорости и температуры имеют прежний вид. Следовательно, влияние сил плавучести сказывается в основном в области сравнительно крупных масштабов, определяемых величиной L_k . Соответствующие характерные масштабы скорости и температуры даются формулами (2) и (3).

В области волновых чисел, удовлетворяющих условию $\kappa L_k \ll 1$, влияние архимедовых сил становится преобладающим. При этом в случае устойчивой температурной стратификации энергия крупномасштабных движений расходуется в основном на работу по преодолению архимедовых сил, а не на передачу к более мелко-масштабным компонентам. Это означает, что при устойчивой температурной стратификации в области $\kappa L_k \ll 1$ из формул (4) и (5) должна выпасть величина ε . Отсюда следует, что при $x \ll 1$

$$f(x) \sim x^{-11/2}, \quad \varphi(x) \sim x^{-7/2}.$$

Следовательно, при $\kappa L_k \ll 1$ имеют место формулы, полученные в работе Р. Больджано [35]:

$$E(\kappa) = \text{const} \cdot N^{2/3} \beta^{4/3} \kappa^{-11/3}, \quad (6)$$

$$\Phi_T(\kappa) = \text{const} \cdot \beta^{-7/3} N^{4/3} \kappa^{-17/3}. \quad (7)$$

В случае неустойчивой температурной стратификации, как показано в работе А. С. Моница [36], при $x \rightarrow 0$ $f(x) \sim x^5$ и $\varphi(x) \sim x^{-1}$. В этом случае функция $f(x)$ имеет максимум при $x_f = 1,01$, а функция $x^2 \varphi(x)$ при $x_\varphi = 0,46$.

Подводя итоги этому рассмотрению, можно сказать, что в области $\kappa \gg \frac{2\pi}{L_k}$ спектры флуктуаций скорости и температуры имеют тот же вид, что и при отсутствии сил плавучести (т. е. в области $r \ll L_k$ структурные функции D_{rr} и D_T имеют прежний вид). При $\kappa \lesssim \frac{2\pi}{L_k}$ влияние архимедовых сил становится уже существенным (область $r \gtrsim L_k$). В случае устойчивой температурной стратификации в этой области волновых чисел спектральные плотности имеют вид (6) и (7). Соответствующие им структурные функции имеют вид

$$\begin{aligned} D_{rr}(r) &\sim N^{2/3} \beta^{4/3} r^{4/3}, \\ D_T(r) &\sim N^{4/3} \beta^{-2/3} r^{2/3}. \end{aligned} \quad (8)$$

Масштаб L_k , определяющий размеры неоднородностей, на которые существенное влияние оказывают архимедовы силы, можно связать с внешним масштабом турбулентности L_0 . Для этого воспользуемся формулами (20.14), (19.16) и (23.16):

$$\begin{aligned} \varepsilon &= K \left(\frac{du}{dz} \right)^2 (1 - \alpha \text{Ri}); \\ K &= L_0^2 \frac{du}{dz}; \quad N = K_T \left(\frac{dT_0}{dz} \right)^2. \end{aligned} \quad (9)$$

Подставляя эти величины в (1) и привлекая определение (23.16) числа Ричардсона, которое в нашем случае (при пренебрежении величиной γ_n) имеет вид

$$\text{Ri} = \frac{\beta \frac{dT_0}{dz}}{\left(\frac{du}{dz} \right)^2},$$

получим

$$L_k = \frac{(1 - \alpha \text{Ri})^{3/4}}{\alpha^{3/4} |\text{Ri}|^{1/2}} L_0. \quad (10)$$

На основании этой формулы можно сделать вывод, что $L_k \gg \gg L_0$ при $|Ri| \ll 1$ и в этом случае влияние архимедовых сил проявляется лишь вне инерционного интервала турбулентности. Если же $|Ri|$ велико, то масштаб L_k попадает внутрь инерционного интервала и делит его на две части: при устойчивой стратификации в области масштабов $L_0 \gg r \gg L_k$ справедливы формулы (8) и (9), а в области масштабов $L_k \gg r \gg l_0$ — прежние формулы для $D_{r,r}$ и D_T .

В работе А. С. Мопина [36] спектральные плотности $E(x)$ и $\Phi_T(x)$ рассчитаны для произвольных значений параметра κL_k и различных условий стратификации (устойчивой, безразличной и неустойчивой).

В. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О ТУРБУЛЕНТНОСТИ АТМОСФЕРЫ

§ 18. Измерения пространственных структурных функций скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы

Первые измерения микроструктуры скорости ветра в атмосфере были выполнены в работах Гедеке [37], Обухова [38], Кречмера [39] и др. [40, 41]. Для измерений в этих работах применялся термоанемометр, представляющий собой тонкую платиновую нить (диаметром в 10—20 мк, длиной порядка 1 см), нагреваемую током до температуры в несколько сотен градусов Цельсия. При постоянном нагревающем токе температура, а следовательно, и сопротивление нити сильно зависят от скорости обтекающего ее воздушного потока. По измеренным значениям сопротивления нити можно, имея тарировочную кривую термоанемометра, определить и скорость ветра. Постоянная времени термоанемометра в воздухе обычно имеет порядок одной сотой секунды (в воде постоянная времени термоанемометра значительно меньше). При измерениях структурной функции скорости ветра два термоанемометра включаются в противоположные плечи моста, что позволяет измерять разность скоростей.

По измеренным значениям сопротивления нити можно, имея тарировочную кривую термоанемометра, определить и скорость ветра. Постоянная времени термоанемометра в воздухе обычно имеет порядок одной сотой секунды (в воде постоянная времени термоанемометра значительно меньше). При измерениях структурной функции скорости ветра два термоанемометра включаются в противоположные плечи моста, что позволяет измерять разность скоростей.

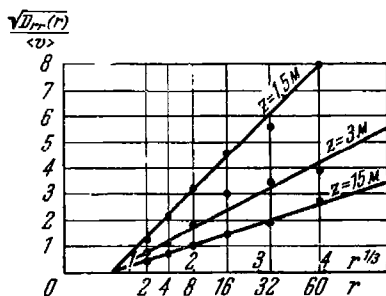


Рис. 7. Образцы эмпирических структурных функций продольной компоненты скорости, полученные на высотах 1,5; 3 и 15 м.

По оси абсцисс в линейном масштабе отложена величина $\sqrt[3]{r}$, по оси ординат — $\frac{1}{\langle v \rangle} \sqrt{D_{rr}(r)}$.

При измерениях структурной функции скорости ветра два термоанемометра включаются в противоположные плечи моста, что позволяет измерять разность скоростей.

Уже первые измерения структурных функций скорости ветра обнаружили их хорошее согласие с «законом 2/3». На рис. 7 приведены образцы структурной функции скорости ветра, полученные в работе Обухова [38]. По оси абсцисс отложена величина $r^{1/3}$, по оси ординат $\frac{\sqrt{D_{rr}(r)}}{\langle v \rangle}$. «Закон 2/3» в этих координатах дол-

жен изображаться прямой линией (причем за счет инерции датчиков она выходит не из начала координат). Из рисунка видно, что с достаточной точностью экспериментальные данные согласуются с «законом 2/3». В указанной работе Обухова были произведены оценки величины ϵ для тех же моментов времени, когда измерялась функция $D_{rr}(r)$, для чего использовались измерения средней скорости ветра на нескольких высотах и формулы логарифмического пограничного слоя § 16. Для константы C^2 , входящей в формулу $D_{rr} = C^2 \epsilon^{2/3} r^{1/3}$, таким образом было получено ориентировочное значение $C^2 = 0,9$, что несколько меньше значения $C^2 = 1,5$, полученного в аэродинамических трубах в работе [42].

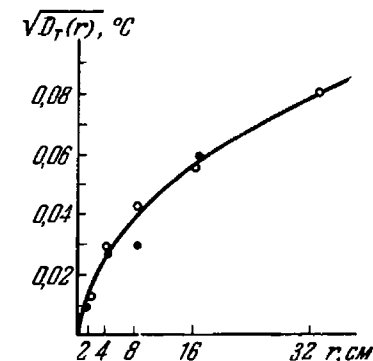


Рис. 8. Образец эмпирической структурной функции температуры.

Измерения пространственных структурных функций температурного поля проводились в работах [43, 44]. В качестве датчиков использовались термометры сопротивления с постоянной времени $\tau \approx 0,01$ сек. Многочисленные измерения функции D_T в приземном слое атмосферы также обнаружили хорошее согласие с «законом 2/3». Образец структурной функции температурного поля приведен на рис. 8.

Уже первые измерения структурных функций $D_{rr}(r)$ и $D_T(r)$ в атмосфере позволили определить характерные значения пульсаций скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы. Случайная разность скоростей Δv в двух точках, располагающихся на одной высоте z на расстоянии r друг от друга порядка $r \sim 0,5z$, имеет характерное значение $\Delta v \sim v$. Для грубой оценки v можно использовать формулу $v \approx 0,1u_{z=2\text{ м}}$, где $u_{z=2\text{ м}}$ — средняя скорость ветра на высоте 2 м. Таким образом, характерное значение Δv имеет порядок нескольких десятков см/сек. Аналогичная величина ΔT для температурного поля сильно зависит от температурной стратификации и может достигать 1°C . Характерная величина ϵ в приземном слое атмосферы составляет

несколько сотен единиц CGS, а внутренний масштаб $l_0 = \sqrt[4]{\frac{v^3}{\epsilon}}$ имеет порядок 1 мм. Внешний масштаб турбулентности L_0 в приземном слое равен, как уже отмечалось выше, κz , где $\kappa \approx 0,4$. Таким образом, отношение L_0/l_0 , характеризующее ширину инерционного интервала («динамический диапазон» турбулентности), имеет в приземном слое порядок $10^3 \div 10^4$.

§ 19. Аппаратура для измерений турбулентных флуктуаций скорости ветра и температуры в атмосфере

На основании приведенных оценок можно сформулировать основные требования, предъявляемые к аппаратуре, предназначенной для измерений турбулентных пульсаций скорости ветра и температуры во всем диапазоне масштабов, начиная с l_0 . Точность и чувствительность измерений скорости должна быть по-

рядка нескольких сантиметров в секунду ($v_0 = \sqrt[4]{\epsilon v}$ имеет этот порядок величины). Размер датчиков должен быть не больше внутреннего масштаба турбулентности $l_0 \approx 1$ мм. Наибольшие частоты пульсаций ветра имеют порядок \bar{u}/l_0 , где \bar{u} — средняя скорость ветра. Отсюда при $\bar{u} = 5$ м/сек и $l_0 = 1$ мм получаем $f_0 \sim 5000$ гц. Следовательно, постоянная времени датчиков должна быть порядка $f_0^{-1} = 2 \cdot 10^{-4}$ сек, а полоса пропускаемых аппаратурой частот — порядка 5 кгц. Точность измерений температуры должна быть порядка 10^{-2} град.

Аппаратура, удовлетворяющая сформулированным требованиям, позволила бы исследовать микроструктуру турбулентности вплоть до ее внутреннего масштаба. Такая аппаратура была создана лишь в самое последнее время [22, 174] и проведенные с ней измерения спектров турбулентности в инерционном и вязком интервалах дали чрезвычайно интересный для теории турбулентности материал, послуживший прямым подтверждением теории Колмогорова — Обухова (см. § 12). Большая же часть экспериментальных исследований была выполнена с более грубой аппаратурой, позволившей производить измерения лишь в инерционном интервале.

В работах [45—49] для измерений компоненты скорости ветра использовался акустический микроанемометр. Его принцип действия основан на зависимости скорости распространения звука в движущейся среде от скорости среды. Пусть c_0 — скорость звука в неподвижной среде. Тогда фазовая скорость звука в направлении n равна $c = c_0 + nv$, где v — скорость среды относительно неподвижного источника звука. Пусть излучатель звука I (рис. 9) излучает звуковые волны с частотой ω , которые

воспринимаются микрофонами M_1 и M_2 . Скорость звука на пути $ИМ_1$ равна $c_1 = c_0 - v_n$, а на пути $ИМ_2$ $c_2 = c_0 + v_n$, где $v_n = nv$. Набег фазы на пути $ИМ_1 = l$ равен $\omega l/c_1$, а на пути $ИМ_2 = l$ он равен $\omega l/c_2$. Разность фаз звуковых колебаний в точках M_1, M_2 равна

$$\varphi = \omega l \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) = \frac{2\omega l}{c_0^2} \left(1 - \frac{v_n^2}{c_0^2} \right)^{-1} v_n.$$

Так как $v_n^2 \ll c_0^2$, то с достаточной точностью

$$\varphi = \frac{2\omega l}{c_0^2} v_n,$$

т. е. разность фаз колебаний, воспринимаемых микрофонами M_1 и M_2 , пропорциональна компоненте скорости ветра вдоль базы

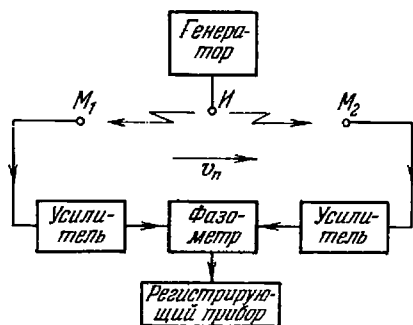


Рис. 9. Блок-схема акустического анемометра.

акустических анемометров проводились в работах [47, 49].

Для обработки результатов измерений микроструктуры турбулентности необходимо производить очень большое количество вычислений. В последнее время в экспериментальной технике нашли широкое применение приборы для автоматического статистического анализа: многоканальные частотные анализаторы, коррелометры и т. д. [50].

При этом оказалось значительно удобнее исследовать не пространственную, а временную микроструктуру турбулентности в одной или нескольких немногих точках пространства. Применение новой экспериментальной техники позволило за сравнительно короткое время получить и обработать очень большой экспериментальный материал, соответствующий сотням часов наблюдений.

$M_1 M_2$. Таким образом, акустический микроанемометр является линейным датчиком, что выгодно отличает его от термоанемометра, являющегося нелинейным прибором. В некоторых образцах акустических анемометров (см. [45]) база $2l$ имела размер около 2 см. Постоянная времени акустического анемометра равна l/c_0 и вносимое ею усреднение ничтожно по сравнению с пространственным усреднением на базе $2l$. Многочисленные измерения микроструктуры скорости ветра при помощи акусти-

§ 20. Связь временной и пространственной структуры турбулентности (гипотеза «замороженности»)

В разделе А при рассмотрении пространственно-временных спектров была сформулирована высказанная Дж. Тейлором гипотеза о «замороженности» турбулентности, которая сводилась к тому, что вся пространственная картина случайного поля $f(\mathbf{r})$ движется со средней скоростью ветра \mathbf{u} :

$$f(\mathbf{r}, t + t') = f(\mathbf{r} - \mathbf{u}t', t).$$

Отсюда была получена связь между пространственно-временными структурными функциями $D(\mathbf{r}, \tau)$ и чисто пространственными функциями $D(\mathbf{r})$:

$$D(\mathbf{r}, \tau) = D(\mathbf{r} - \mathbf{u}\tau). \quad (1)$$

Была получена также формула, связывающая временной (частотный) спектр случайного скалярного поля $W(\omega)$, определенный соотношением

$$B(\tau) = 2 \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega\tau d\omega,$$

с его пространственной спектральной плотностью $\Phi(\mathbf{x})$. Для случая локально изотропного поля, когда $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x)$, эта связь выражалась формулой

$$W(\omega) = \frac{2\pi}{v} \int_{|\mathbf{x}| = v/\omega}^{\infty} \Phi(x) x dx \quad (2)$$

или

$$\Phi(x) = -\frac{v^2}{2\pi x} W'(xv). \quad (3)$$

В случае, если $\Phi(x)$ соответствует «закону 2/3», т. е. имеет вид

$$\Phi(x) = A x^{-2/3}, \quad (4)$$

частотный спектр $W(\omega)$ выражается формулой

$$W(\omega) = \frac{6\pi}{5} A v^{2/3} |\omega|^{-5/3}, \quad (5)$$

т. е. $W(\omega)$ пропорционально $\omega^{-5/3}$.

Сравнивая (3) с формулой (13.4) $\Phi(x) = -(2\pi x)^{-1} V'(x)$, легко получить соотношение

$$V(x) = vW(xv), \quad (6)$$

связывающее одномерный пространственный спектр $V(x)$ локально изотропного поля с его временным (частотным) спектром $W(\omega)$ в случае «замороженности» поля.

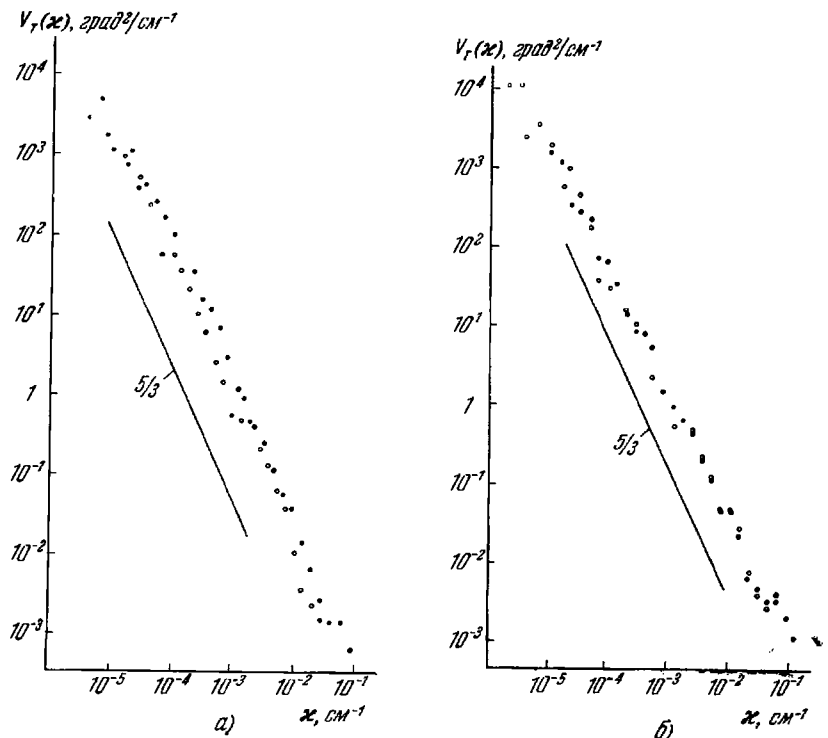


Рис. 10. Сопоставление «пространственного» и «временного» (частотного) спектров температурных флуктуаций.

«Пространственные» спектры получены путем измерений временного частотного спектра при помощи быстро движущегося датчика, установленного на самолете. «Временные» спектры получены с использованием неподвижного датчика температуры, установленного на высоте 70 м. Скорость самолета 88 м/сек (а) и 55 м/сек (б), скорость ветра 9 м/сек. Черные кружки — «временной» спектр, белые кружки — «пространственный» спектр.

Попытаемся выяснить условия, при которых можно ожидать выполнения гипотезы замороженности. Для этого рассмотрим движение неоднородности поля скорости, имеющей характерный размер l . Время, в течение которого эта неоднородность проходит мимо точки наблюдения, имеет порядок $T = l/\bar{u}$, где \bar{u} — средняя скорость ветра. С другой стороны, «собственное время жизни» неоднородности, за которое происходит ее существенное

изменение (эволюция), имеет порядок

$$\tau \sim \frac{l}{v_l} \approx \frac{l}{(\varepsilon l)^{1/3}} = \frac{l^{2/3}}{\varepsilon^{1/3}}.$$

Ясно, что для того, чтобы можно было пренебречь эволюцией неоднородности за то время, пока она проходит мимо точки наблюдения, необходимо, чтобы выполнялось условие $\tau \gg T$, т. е. $l^{2/3}/\varepsilon^{1/3} \gg l\bar{u}^{-1}$, откуда

$$(\varepsilon l)^{1/3} \ll \bar{u}. \quad \text{а}$$

Но последнее условие всегда выполняется, если $l \ll L_0$, где L_0 — внешний масштаб турбулентности. Действительно, $u \sim (\varepsilon L_0)^{1/3}$, что и приводит к условию $l \ll L_0$. Таким образом, отступления от «замороженности» можно ожидать лишь в области крупных масштабов вне инерционного интервала турбулентности. В инерционном же и вязком интервалах можно ожидать хорошего выполнения «гипотезы замороженности».

Экспериментальная проверка «гипотезы замороженности» проводилась в работах [51, 52]. Для этого в [52] производились одновременные измерения частотных спектров температурных флуктуаций в неподвижной точке на высоте 70 м (вышка) и измерения частотного спектра на самолете, летевшем на той же высоте 70 м со скоростью v_c . Так как самолет движется с очень большой скоростью по сравнению со скоростью ветра, то можно считать, что он пересекает неоднородности практически мгновенно и полученный с его помощью частотный спектр $W_c(\omega)$ (после перехода к пространственным волновым числам $\kappa = \frac{\omega}{v_c}$) является практически одномерным пространственным спектром случайного поля. $V(\kappa)$ можно рассчитать из $W_c(\omega)$ при помощи формулы, аналогичной (6):

$$V(\kappa) = v_c W_c(\kappa v_c).$$

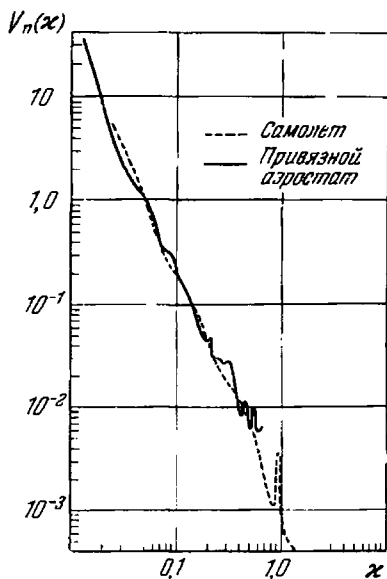


Рис. 11. Сопоставление «пространственного» и «временного» спектров показателя преломления.

По измерениям частотного спектра $W(\omega)$ в неподвижной точке, пользуясь гипотезой «замороженности», также можно рассчитать $V(x)$:

$$V(x) = \bar{u}W(x\bar{u}).$$

В случае выполнения «гипотезы замороженности» оба выражения для $V(x)$ должны совпадать. На рис. 10 приведены два таких сопоставления, из которых видно, что в исследованной области волновых чисел, доходящих до 10^{-5} см^{-1} , гипотеза «замороженности» выполняется очень хорошо. Область волновых чисел, в которой экспериментально подтверждается эта гипотеза, оказывается даже значительно большей, чем можно было бы судить на основании приведенной выше оценки $l \ll L_0$. Аналогичные результаты получены в [51] и по отношению к полю показателя преломления (рис. 11).

Прямой проверки «замороженности» для поля скоростей не производилось, однако имеется множество косвенных подтверждений этой гипотезы, получаемых из сопоставления основанных на ней выводов с экспериментальными данными.

§ 21. Измерения спектра поля скоростей в инерционном и вязком интервалах

В упоминавшейся уже работе [22] были исследованы частотные спектры продольной составляющей скорости в море*). Датчиком скорости служил термоанемометр с размером чувствительного элемента менее 0,5 мм. Это позволило экспериментально исследовать как инерционный, так и вязкий интервал волновых чисел.

Установим связь между спектром продольной компоненты скорости и функцией $E(x)$. Воспользовавшись формулой (3.9)

$$\Phi_{ik}(x) = \frac{1}{4\pi x^2} \left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{x^2} \right) E(x),$$

запишем выражение $D_{ik}(r)$:

$$D_{ik}(r) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos xr) \left(\delta_{ik} - \frac{x_i x_k}{x^2} \right) \frac{E(x)}{4\pi x^2} d^3x.$$

* Аналогичные исследования были затем выполнены и в атмосфере (см. [174, 183]). Результаты этих работ находятся в прекрасном согласии с результатами описываемой здесь работы [22].

Направим ось x по вектору r ; тогда $r = \{r, 0, 0\}$ и $D_{11}(r) = D_{rr}(r)$. Тогда при $i = k = 1$ получим

$$\begin{aligned} D_{rr}(r) &= 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \kappa_1 r) \left(1 - \frac{\kappa_1^2}{\kappa^2}\right) \frac{E(\kappa)}{4\pi\kappa^3} d^3\kappa = \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \kappa_1 r] d\kappa_1 \iiint_{-\infty}^{\infty} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) \frac{E(\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2})}{4\pi(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)^2} d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned}$$

Это выражение имеет вид одномерного спектрального разложения

$$D_{rr}(r) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} (1 - \cos \kappa_1 r) V_{rr}(\kappa_1) d\kappa_1,$$

где

$$V_{rr}(\kappa_1) = \frac{1}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2)^2} E(\sqrt{\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2}) d\kappa_2 d\kappa_3.$$

Производя в интеграле замену переменных $\kappa_2 = \lambda \cos \varphi$, $\kappa_3 = \lambda \sin \varphi$ и выполняя интегрирование по φ , получим

$$V_{rr}(\kappa_1) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{E(\sqrt{\lambda^2 + \kappa_1^2})}{(\lambda^2 + \kappa_1^2)^2} \lambda^3 d\lambda,$$

что после подстановки $\lambda^2 + \kappa_1^2 = \kappa'^2$ дает

$$V_{rr}(\kappa_1) = \frac{1}{2} \int_{\kappa_1}^{\infty} \frac{\kappa'^2 - \kappa_1^2}{\kappa'^3} E(\kappa') d\kappa'. \quad (1)$$

Эта формула выражает одномерную спектральную плотность $V_{rr}(\kappa_1)$ через $E(\kappa)$. Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\frac{dV_{rr}(\kappa_1)}{d\kappa_1} = -\kappa_1 \int_{\kappa_1}^{\infty} \frac{E(\kappa')}{\kappa'^3} d\kappa',$$

откуда, умножая обе части равенства на $\frac{1}{\kappa_1}$ и снова дифференцируя, получим

$$\frac{d}{d\kappa_1} \left[\frac{1}{\kappa_1} \frac{dV_{rr}(\kappa_1)}{d\kappa_1} \right] = \frac{E(\kappa_1)}{\kappa_1^3}.$$

Следовательно, если известна функция $V_{rr}(\kappa)$, то $E(\kappa)$ может быть найдена по формуле

$$E(\kappa) = \kappa^3 \frac{d}{d\kappa} \left[\frac{1}{\kappa} \frac{dV_{rr}(\kappa)}{d\kappa} \right]. \quad (2)$$

Скорость диссипации энергии

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^{\infty} \kappa^2 E(\kappa) d\kappa$$

можно выразить непосредственно через функцию $V_{rr}(\kappa)$. Подставляя выражение для $E(\kappa)$ и 2 раза интегрируя по частям, получим формулу

$$\varepsilon = 30\nu \int_0^{\infty} \kappa^2 V_{rr}(\kappa) d\kappa. \quad (3)$$

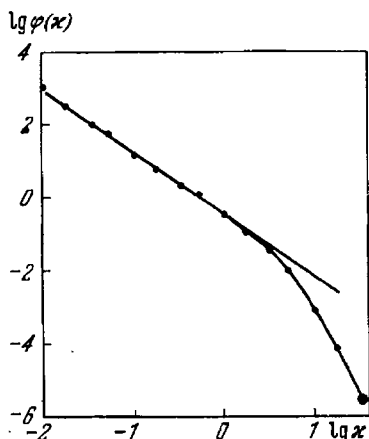


Рис. 12. Образец эмпирической спектральной плотности продольной компоненты скорости в инерционном и вязком интервалах $\varphi(\kappa) = 2V_{rr}(\kappa)$. Прямолинейный участок кривой соответствует степенному закону $\kappa^{-5/3}$.

В описываемой работе [22] было произведено 17 измерений спектральной функции $V_{rr}(\kappa)$ при различных условиях (в работе приводится функция $\varphi(\kappa) = 2V_{rr}(\kappa)$). На рис. 12 приведен в логарифмическом масштабе один из таких спектров. Левая верхняя часть графика на рис. 12 представляет собой прямую линию с угловым коэффициентом $-5/3$, соответствующим теории Колмогорова — Обухова. В области больших волновых чисел заметно отступление от прямолинейного закона, обусловленное влиянием вязкости. Используя измеренную функцию $V_{rr}(\kappa)$,

можно вычислить величину ε . На рис. 13 приводятся в полулогарифмическом масштабе функции $\kappa V_{rr}(\kappa)$ и $\kappa^3 V_{rr}(\kappa)$. Площадь под первой кривой в используемых координатах пропорциональна энергии турбулентности

$$T \sim \int_0^{\infty} V_{rr}(\kappa) d\kappa = \int_0^{\infty} \kappa V_{rr} d \ln \kappa,$$

а площадь под второй кривой пропорциональна ε

$$\varepsilon \sim \int_0^{\infty} \kappa^2 V_{rr}(\kappa) d\kappa = \int_0^{\infty} \kappa^3 V_{rr}(\kappa) d \ln \kappa.$$

Из графиков рис. 13 непосредственно видно разделение энергетического и вязкого интервалов и существование инерционного интервала турбулентности.

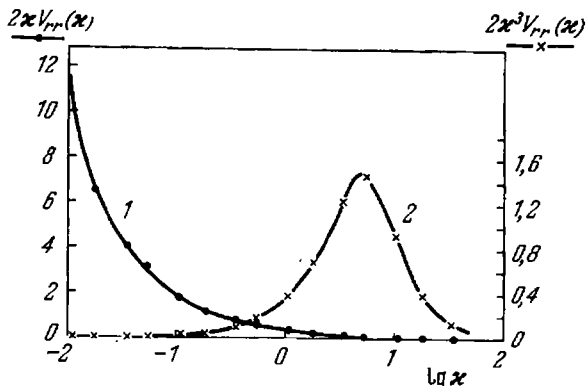


Рис. 13. Образец эмпирической спектральной плотности продольной компоненты скорости (1) и спектральной плотности скорости диссипации энергии (2).

По оси абсцисс отложены волновые числа в логарифмическом масштабе, по оси ординат — $2\kappa^2 V_{rr}(\kappa)$ (кривая 1) и $2\kappa^3 V_{rr}(\kappa)$ (кривая 2). В этих координатах площади под кривыми 1 и 2 пропорциональны полной энергии турбулентности (кривая 1) и скорости диссипации энергии (кривая 2). Данные иллюстрируют разделение энергосодержащего и вязкого интервалов.

Согласно колмогоровской теории турбулентности функция $V_{rr}(\kappa)$ в инерционном и вязком интервалах может быть представлена в виде

$$V_{rr}(\kappa) = (\varepsilon \nu^5)^{1/4} F(\kappa l_0),$$

где $l_0 = (\nu^3 \varepsilon^{-1})^{1/4}$ и $F(x)$ — безразмерная функция безразмерного аргумента. Следовательно, если для каждого измеренного спектра $V_{rr}(\kappa)$ определить ε по формуле (3), затем построить график, в котором по оси ординат отложена величина $V_{rr}(\kappa)/(\varepsilon \nu^5)^{1/4}$, а по оси абсцисс $\kappa l_0 = x$, то мы должны получить универсальную функцию $F(x)$. На рис. 14 в логарифмическом

масштабе приводятся все 17 спектров в координатах $V_{rr}(\kappa) / (\epsilon \nu^5)^{1/4}$, κl_0 . Видно очень хорошее совпадение всех данных, полученных при совершенно различных ϵ , которое менялось в пределах от

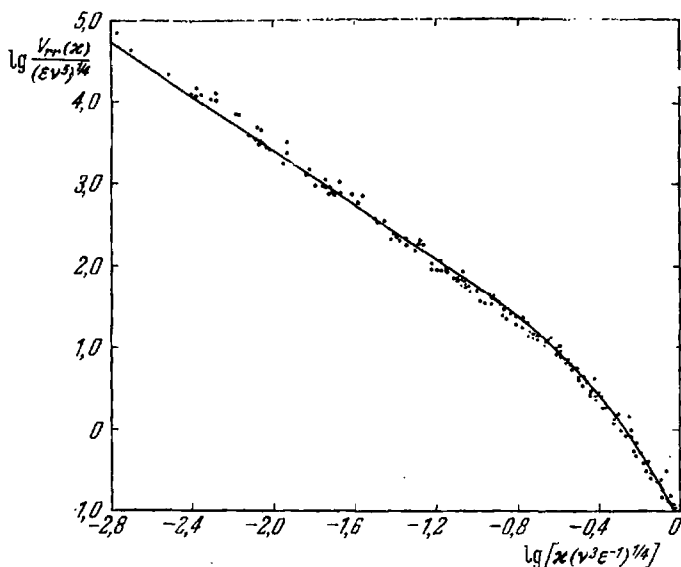


Рис. 14. Пространственная спектральная плотность $V_{rr}(\kappa)$ продольной компоненты в безразмерных координатах.

По оси абсцисс отложено в логарифмическом масштабе произведение волнового числа на колмогоровский масштаб длины. По оси ординат, также в логарифмическом масштабе, — нормированная на $(\epsilon \nu^5)^{1/4}$ спектральная плотность. Необходимая для нормировки величина ϵ определялась для каждого из помещенных здесь 17 спектров как площадь под кривой 2 на рис. 13. Приведенные на этом графике данные являются прямым экспериментальным подтверждением универсального вида спектра турбулентности в инерционном и вязком интервалах.

0,0015 до $1,2 \text{ см}^2/\text{сек}^3$. График на рис. 14 является прямым экспериментальным подтверждением колмогоровской теории турбулентности *).

В области $\kappa \ll \kappa_m \approx l_0^{-1}$ измеренные значения $V_{rr}(\kappa)$ хорошо аппроксимируются формулой

$$V_{rr}(\kappa) = \frac{9}{55} A \epsilon^{1/2} \kappa^{-5/2}$$

(множитель $9/55$ введен для удобства). Так как значения ϵ известны на основании измерений $V_{rr}(\kappa)$ в области диссипации, то это

*). Одновременно он подтверждает и гипотезу «замороженности», применявшуюся для получения пространственного спектра по временному.

дает возможность определения константы A . Значения этой константы, определенные по каждому из 17 спектров, оказались очень близкими. Среднее значение A оказалось равным $1,35 \pm 0,06$.

Функция $V_{rr}(x) = \frac{9}{55} A \varepsilon^{2/3} x^{-4/3}$ согласно формуле (2) соответствует

$$E(x) = A \varepsilon^{2/3} x^{-4/3}.$$

Если вычислить структурную функцию D_{rr} , соответствующую этому спектру, то она, как уже отмечалось, равна

$$D_{rr}(r) = C^2 \varepsilon^{2/3} r^{3/2},$$

причем C^2 связано с A формулой

$$A = \frac{55 \sqrt{3}}{36\pi} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) C^2$$

(см. раздел Б). Отсюда для C^2 можно получить значение

$$C^2 = 1,77 \pm 0,08.$$

Во всей области волновых чисел, включая вязкий интервал, экспериментальные данные хорошо аппроксимируются формулой

$$E(x) = A \varepsilon^{2/3} x^{-4/3} e^{-\sqrt{\alpha} \overline{a_0 x}}, \quad (4)$$

причем α и A связаны соотношением

$$A = \frac{3\alpha^{1/2}}{20\Gamma\left(\frac{5}{3}\right)},$$

вытекающим из условия

$$\varepsilon = 2\nu \int_0^\infty E(x) x^2 dx.$$

Сплошная кривая, проведенная на рис. 14, построена по формуле (1) с применением (4). Как видно из графика, спектральная плотность вида (4) хорошо согласуется с экспериментальными данными во всей области волновых чисел.

Значение постоянной α , соответствующее значению $A = 1,35 \pm 0,08$, равно $\alpha = 4,78 \pm 0,17$. Постоянную α можно определить также и по виду спектра в интервале диссипации из сопоставления экспериментальных данных с аппроксимирующей функцией $V_{rr}(x)$, основанной на (4). Это приводит к значению $\alpha = 4,36$, близкому к величине, полученной по инерционному интервалу спектра. Значению $\alpha = 4,36$ соответствует константа C^2 , равная

$$C^2 = 1,55.$$

§ 22. Микроструктура полей скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы

В приземном слое атмосферы проводились многочисленные измерения основных характеристик турбулентности [47—49, 53—55].

Образец структурной функции поля скорости был приведен на рис. 7. На рис. 15 в безразмерных координатах приводится частотный спектр флуктуаций вертикальной составляющей скорости ветра, полученный в [49] усреднением по большому коли-

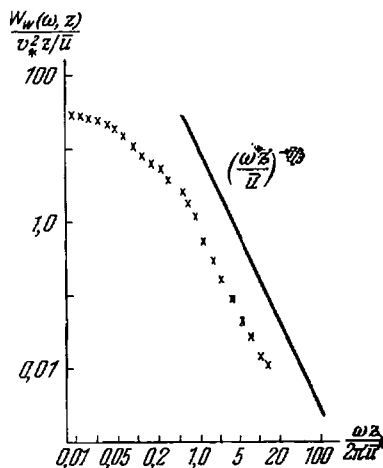


Рис. 15. Эмпирический частотный спектр вертикальной компоненты скорости ветра в приземном слое атмосферы, построенный в безразмерных координатах в логарифмическом масштабе.

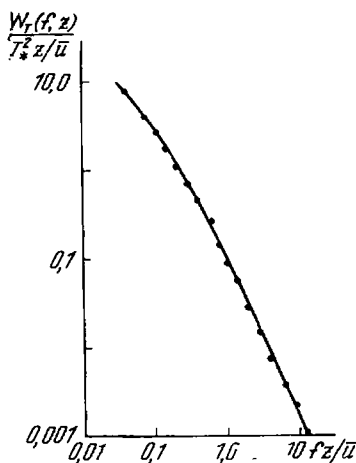


Рис. 16. Эмпирический частотный спектр температурных флуктуаций в приземном слое атмосферы, построенный в безразмерных координатах в логарифмическом масштабе.

честву измерений при одинаковых условиях (число Ричардсона близко к нулю, так что отступления от безразличной температурной стратификации незначительны). Спектр, изображенный в логарифмическом масштабе, имеет прямолинейный участок, соответствующий степенному закону $E(\kappa) \sim \kappa^{-5/3}$; (экспериментально найденный показатель степени оказался равным $-1,64$, что с достаточной точностью соответствует теоретическому значению $-5/3 = -1,67$ и гипотезе «замороженности»). В области крупных масштабов, соответствующих внешнему масштабу турбулентности $L = \kappa$ наблюдается отклонение от степенного закона (спектраль-

ная плотность при безразличной стратификации имеет максимум приблизительно при $\kappa/2\pi \approx 0,06 z^{-1}$.

На рис. 16 приведен полученный в [53] частотный спектр флуктуаций температуры, также усредненный по большому количеству наблюдений. Как и на частотном спектре пульсаций скорости, здесь имеется участок, соответствующий зависимости спектральной плотности от частоты вида $f^{-3/2}$. Среднее значение показателя степени, определенного из этих экспериментов, равно — 1,67, что находится в согласии с теорией Обухова и гипотезой «замороженности» турбулентности.

В работах [49, 54] изучалась также зависимость интенсивности флуктуаций от внешних условий. Согласно (26.16) и (27.16)

$$D_{rr}(r) = C^2 \frac{(1 - \alpha Ri)^{3/2}}{[\psi(Ri)]^{4/3}} \left(L_0 \frac{du}{dz} \right)^2 \left(\frac{r}{L_0} \right)^{3/2},$$

$$D_T(r) = \alpha a^2 [\psi(Ri)]^{-4/3} (1 - \alpha Ri)^{-1/2} \left(L_0 \frac{dT_0}{dz} \right)^2 \left(\frac{r}{L_0} \right)^{3/2}.$$

На рис. 17 изображена функция $f_1(Ri) = (1 - \alpha Ri)^{1/2} [\psi(Ri)]^{-4/3}$, полученная в [49] из сопоставления наблюдаемых значений флуктуаций вертикальной компоненты скорости ветра с градиентами u и T_0 . Значение константы C^2 , входящей в формулу для D_{rr} , оказалось равным, согласно [49], $C^2 = 0,83$ (в [49] приводится значение $\frac{4}{3} C^2 = 1,1$).

На рис. 18 изображена аналогичная функция

$f_2(Ri) = [\psi(Ri)]^{-4/3} (1 - \alpha Ri)^{-1/2}$, полученная в [54] из измерений температурных флуктуаций. Значение постоянной αa^2 , входящей в $D_T(r)$, оказалось равным $\alpha a^2 = 2,8$ [185]*).

При отрицательных $Ri < -0,05$ функция $\psi(Ri)$ хорошо согласуется с асимптотикой, указанной Пристли [56] для

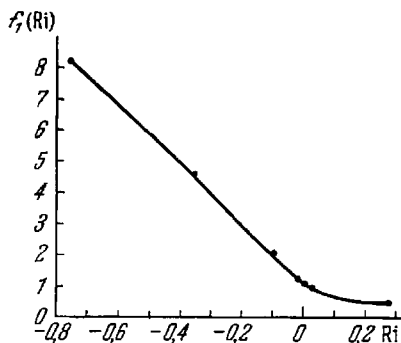


Рис. 17. Функция $f_1(Ri)$, определяющая влияние температурной стратификации на флуктуации скорости.

*) Некоторые данные указывают на зависимость α от Ri , которая должна приводить к нарушению подобия профилей $u(z)$ и $T_0(z)$. Наблюдения обнаруживают некоторое отступление от подобия этих профилей. В работе Свиябека [57] приводится зависимость $\alpha = \alpha(Ri)$.

режима свободной конвекции (§ 16)

$$\psi(\text{Ri}) = \alpha^{-1/4} \left(\frac{C_1}{3}\right)^{1/4} |\text{Ri}|^{-1/4},$$

причем численный коэффициент в этой формуле оказывается равным 0,37:

$$\psi(\text{Ri}) \approx 0,37 |\text{Ri}|^{-1/4}.$$

Отметим также работу А. С. Гурвича [48], в которой проведены измерения асимметрии $S = D_{rrr}/(D_{rr})^{3/2}$. Эта величина (при числах Рейнольдса порядка $10^5 \div 10^6$) оказалась равной $-0,42$ и, в пределах точности измерений, не зависящей от r (измерения проводились при $r = 25$ см и 50 см).

По измеренной величине S можно рассчитать константу C^2 , связанную с S формулой $C^3 = \frac{4}{5} |S|^{-1}$ (см. 11.12). Это дает для C^2 значение $C^2 = 1,54$, близкое к значению, полученному из измерений спектра турбулентности в море. Отметим также, что в работе Таунсенда [42] приводится значение $C^2 = 1,60$. Детальный анализ результатов многочисленных измерений микроструктуры поля скоростей приведен в монографии А. С. Мо-

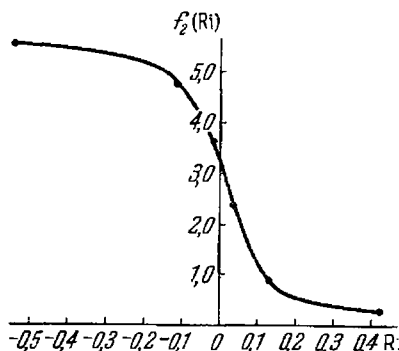


Рис. 18. Функция $f_2(\text{Ri})$, определяющая влияние температурной стратификации на флуктуации температуры.

нина и А. М. Яглома [185]. На основании этого анализа авторы рекомендуют, как наиболее надежное, значение $C^2 = 1,9$, точность которого приблизительно равна 10%. Эту величину мы и будем употреблять для численных оценок.

§ 23. Структура турбулентности в нижней тропосфере

Измерения флуктуаций скорости ветра, температуры и показателя преломления проводились в последние годы на высотных мачтах [58], привязных аэростатах [51] и самолетах [51, 59, 60]. Кроме того, о флуктуациях показателя преломления можно судить и на основании косвенных данных по распространению радиоволн и света (такие оценки будут сделаны в гл. 2 и 4).

На рис. 19—22 приведено несколько спектров флуктуаций показателя преломления, полученных в работах [35, 61] (самолетные данные). Как видно из графиков, эти спектры хорошо согласуются с законом $W(\omega) \sim \omega^{-5/3}$, соответствующим теории. На

рис. 23 приведены в относительных единицах одномерные пространственные спектры пульсаций температуры, полученные Цвангом [59] при самолетных измерениях. Из графика видно, что в области мелких масштабов довольно хорошо выполняется зависимость $V(\kappa) \sim \kappa^{-3/2}$. В области крупных масштабов наблюдаются небольшие отступления от этого закона, закономерно связанные с высотой, на которой производились измерения. Качественно эти отступления согласуются с теорией, учитывающей влияние архимедовых сил на спектр температурных флуктуаций.

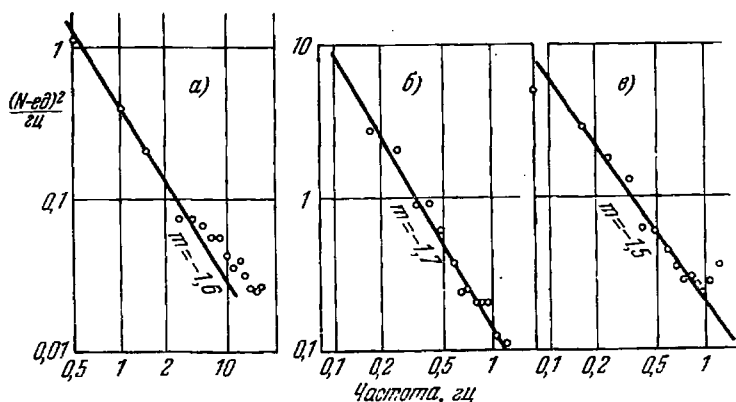


Рис. 19. Примеры эмпирических частотных спектров флуктуаций показателя преломления в тропосфере, построенные в логарифмическом масштабе.

Прямые соответствуют степенной зависимости вида f^{-m} ; значения m указаны на графиках.

На рис. 24 приводятся спектры флуктуаций вертикальной компоненты скорости ветра, полученные в [60]. Здесь, как и в предыдущих случаях, хорошо соблюдается закон $E(\kappa) \sim \kappa^{-3/2}$.

Для практики представляет большой интерес зависимость интенсивности флуктуаций от высоты. Эта зависимость изучалась в работах [59, 60]. Прежде чем переходить к анализу экспериментальных данных, выясним, как флуктуации зависят от высоты в пределах приземного слоя. В случае безразличной температурной стратификации величины $D_{rr}(r)$ и $D_T(r)$ зависят от высоты как $z^{-3/2}$, а ϵ и N пропорциональны z^{-1} . Поэтому при безразличной температурной стратификации можно ожидать довольно резкого уменьшения флуктуаций с высотой. В случае же неустойчивой температурной стратификации практически уже при $Ri \leq -0,05$ наступает режим свободной конвекции. (Так как число Ричардсона в приземном слое по абсолютной величине

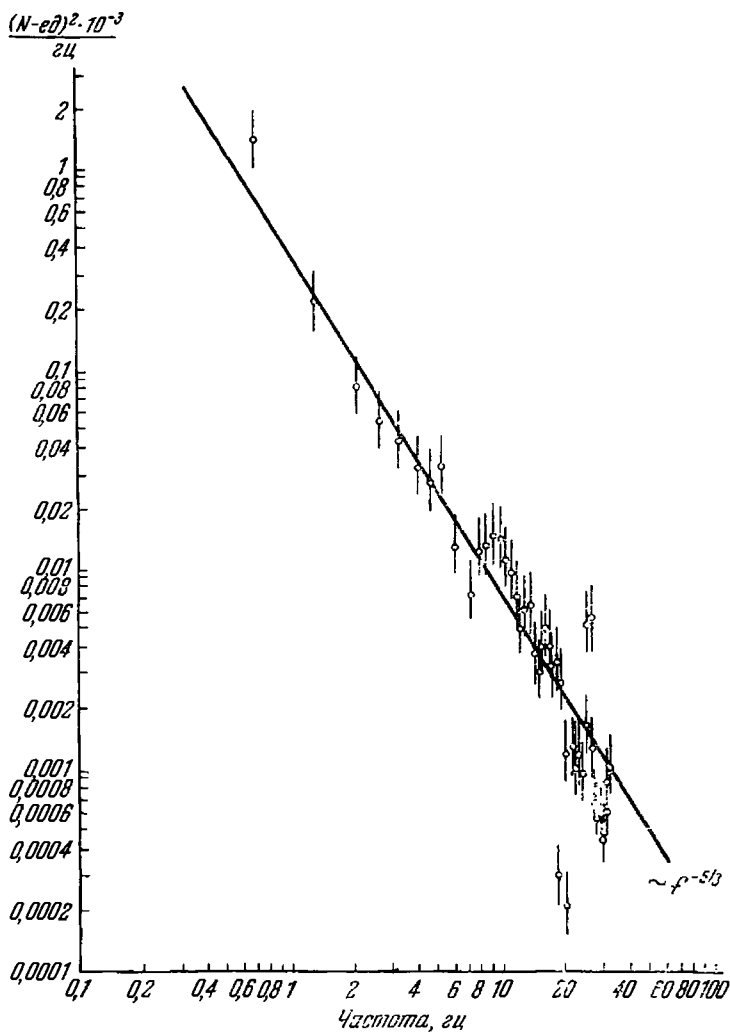


Рис. 20. Примеры эмпирических частотных спектров флуктуаций показателя преломления в тропосфере, построенные в логарифмическом масштабе.

монотонно возрастает с высотой, то практически режим свободной конвекции устанавливается при неустойчивой стратификации на сравнительно небольшой высоте.) В этом случае (см. § 16) ϵ не зависит от высоты, а $N \sim z^{-1/2}$, т. е. флуктуации скорости постоянны по высоте, а флуктуации температуры убывают как

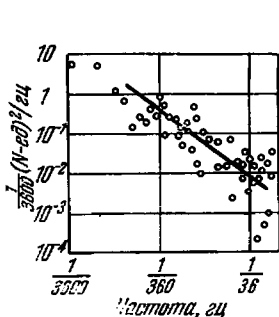


Рис. 21. Пример эмпирического частотного спектра показателя преломления в приземном слое атмосферы, $v = 18$ м/сек.

Прямая линия соответствует зависимости $j^{-1/2}$.

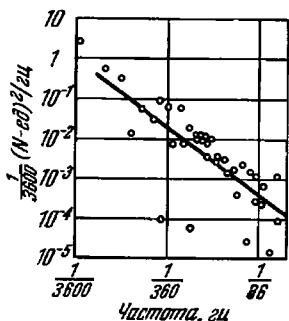


Рис. 22. Пример эмпирического частотного спектра показателя преломления в приземном слое атмосферы, $v = 1,2$ м/сек.

Прямая линия соответствует зависимости $j^{-1/2}$.

$z^{-1/2}$. Таким образом, зависимость флуктуаций от высоты резко меняет свой характер в зависимости от температурной стратификации.

На рис. 25 представлена полученная в [59] зависимость от высоты величины $C_T^2 = a^2 N \epsilon^{-1/2}$, входящей в формулу $D_T(z) = C_T^2 r^2$. Величина C_T^2 определялась из спектров флуктуаций температуры.

График на рис. 25 получен путем усреднения десяти различных высотных зависимостей $C_T^2 = C_T^2(z)$, полученных в сходных условиях, относящихся к конвективному режиму (жаркий летний день, 12—14 часов). Пунктиром на рис. 25 проведена прямая, соответствующая убыванию $C_T^2(z)$ по закону $C_T^2 \sim z^{-1/2}$. Следует отметить, что не только усредненная по нескольким полетам кривая $C_T^2(z)$ хорошо подчиняется этому закону, но и каждый из высотных разрезов хорошо соответствует этой формуле.

На рис. 26 приведен высотный ход величины $\epsilon(z)$, полученной в той же серии полетов (но в другое время) на основании измерений частотных спектров горизонтальной компоненты скорости ветра [60]. Величина ϵ , как видно из рис. 26, почти не

зависит от высоты вплоть до $z \approx 1$ км. (На высоте порядка 1,5 км располагался слой облачности и температурная стратификация уже не соответствовала неустойчивости.)

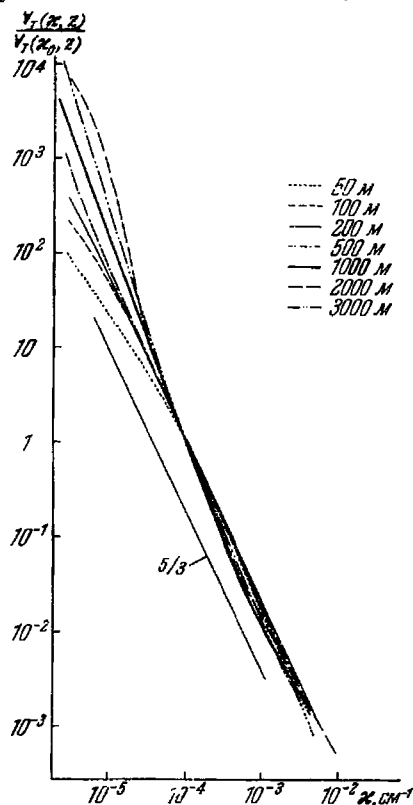


Рис. 23. Одномерные горизонтальные пространственные спектры флуктуации температуры на различных высотах в тропосфере в относительных единицах $\kappa_0 = 10^{-4} \text{ см}^{-1}$.

Как видно из сопоставления данных, относящихся к зависимостям $C_T^2(z)$ и $\varepsilon(z)$, формулы $\varepsilon(z) = \text{const}$ и $C_T^2(z) \sim z^{-4/3}$, полученные для неустойчивой температурной стратификации

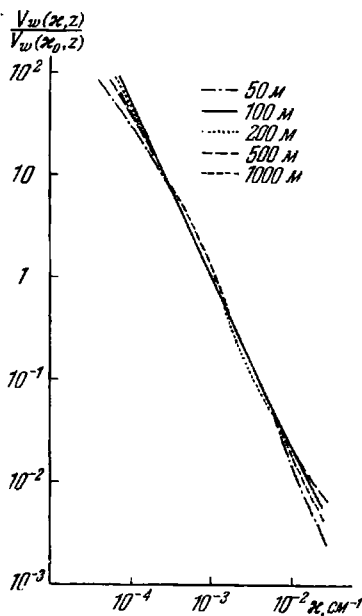


Рис. 24. Одномерные горизонтальные пространственные спектры вертикальной компоненты скорости ветра на различных высотах в тропосфере в относительных единицах $\kappa_0 = 10^{-8} \text{ см}^{-1}$.

для приземного слоя атмосферы, оказываются справедливыми для всего слоя конвекции (до высоты порядка 1 км). Как было установлено выше (см. (28.16)), для режима свободной конвекции ε и $C_T^2 = \frac{a^2 N}{\varepsilon^{1/3}}$ связаны соотношением

$$C_T^2 = \frac{a^2 C_1}{3\alpha \kappa^{1/3}} \frac{\varepsilon^{4/3}}{\beta^2 z^{4/3}}$$

Численный коэффициент в этой формуле можно оценить по данным работ [49, 54, 62]; он оказывается приблизительно равным 0,7 (это значение не очень надежно и нуждается в уточнении). Таким образом,

$$C_T^2 \approx \frac{0,7}{\beta^2} \left(\frac{\varepsilon}{z} \right)^{4/3}.$$

Для проверки этого соотношения воспользуемся данными, приведенными на рис. 25 и 26. Для $z = 500$ м, $C_T^2 = 4 \cdot 10^{-5}$ град²/см⁴.

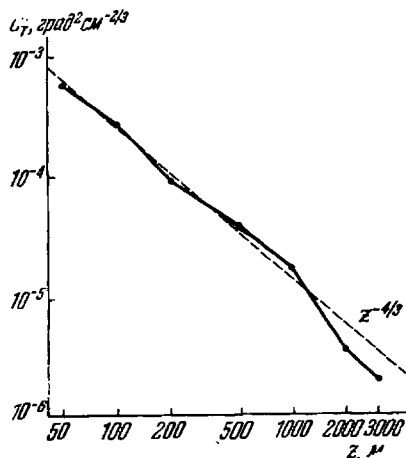


Рис. 25. Образец зависимости структурной характеристики температурных флуктуаций C_T^2 в тропосфере от высоты в условиях свободной конвекции.

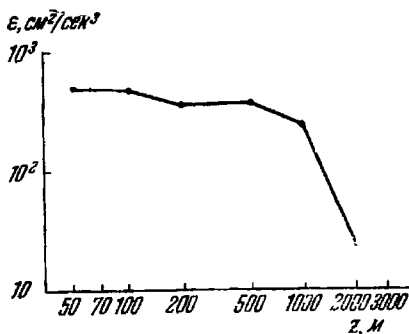


Рис. 26. Образец зависимости скорости диссипации энергии турбулентности ε в тропосфере от высоты в условиях свободной конвекции.

и $\varepsilon = 370$ см²·сек⁻³. Полагая $\beta = g/T = 3,5$ см·сек⁻²·град⁻¹, получим

$$C_T^2 = 0,7 \frac{1}{(3,5)^2} \left(\frac{370}{5 \cdot 10^4} \right)^{4/3} \approx 8 \cdot 10^{-5} \frac{\text{град}^2}{\text{см}^{2/3}},$$

т. е. численное совпадение с точностью до коэффициента 2, что следует считать вполне удовлетворительным, поскольку сравниваются усредненные данные, получаемые к тому же не одновременно и, возможно, при разных числах Ричардсона. Сопоставление величин ε и C_T^2 на других высотах также дает хорошие результаты.

Таким образом, данные, приведенные на рис. 25 и 26, свидетельствуют, что в конвективных условиях теория «приземного слоя» может быть применена ко всему слою конвекции, который

распространяется до высот в несколько километров.

В то же время измерения ϵ , проведенные на 300-метровой башне [58] при условиях, близких к безразличной стратификации, указывают на быстрое уменьшение ϵ с высотой (ϵ падает от нескольких десятков $\text{см}^2/\text{сек}^3$ па высоте 25 м до нескольких единиц на высоте 300 м).

В заключение оценим величину флуктуаций показателя преломления в оптическом диапазоне, вызванных паблюдасмыми флуктуациями температуры. Согласно (1.15) в радиодиапазоне

$$n - 1 = \frac{79 \cdot 10^{-6}}{T} \left(p + \frac{4800 e}{T} \right),$$

где T — в $^{\circ}\text{K}$, p и e — в миллибарах.

В оптическом диапазоне, где влажность незначительна, $n - 1 = \frac{80 \cdot 10^{-6} p}{T}$ (*). Флуктуации n связаны с флуктуациями T соотношением $\delta n = -\frac{80 \cdot 10^{-6} p}{T^2} \delta T$, а структурные характеристики C_n^2 и C_T^2 выражаются друг через друга при помощи формулы

$$C_n^2 = \left(\frac{80 \cdot 10^{-6} p}{T^2} \right)^2 C_T^2.$$

Величина C_T^2 согласно рис. 25 меняется в пределах от 10^{-6} до 10^{-3} $\text{град}^2 \text{см}^{-3/2}$. Подставляя $p = 850$ мб и $T = 280^{\circ}$, получим, что C_n^2 меняется в пределах $5 \cdot 10^{-19}$ ÷ $5 \cdot 10^{-16}$ $\text{см}^{-3/2}$ или $C_n \sim \sim 0,001 - 0,020$ N -ед./ $\text{см}^{3/2}$. (Для отклонения показателя преломления от 1 в радиометеорологии часто применяются так называемые N -единицы. 1 N -единица равна 10^{-6} .) Эти значения C_n согласуются по порядку величины со значениями C_n , полученными на основании прямых измерений с рефрактометрами [61].

*) Приведенное значение численного коэффициента в этой формуле относится к середине видимой области оптического диапазона. Более точные значения равны: 82,9 для $\lambda = 0,3$ мкм, 79,2 для $\lambda = 0,5$ мкм, 77,4 для $\lambda = 0,7$ мкм.

РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Вопрос о рассеянии волн атмосферной турбулентностью привлек к себе значительное внимание в связи с экспериментально обнаруженным явлением дальнего тропосферного распространения ультракоротких волн. Наблюдаемые за горизонтом значения напряженности поля при этом значительно превосходят тот уровень, который может быть объяснен дифракцией радиоволн вокруг поверхности Земли. Букер и Гордон [63] высказали

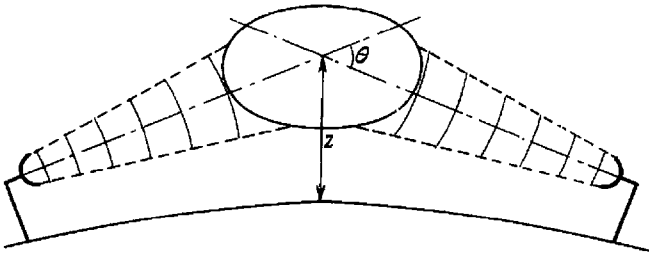


Рис. 27. Геометрия рассеяния при распространении радиоволн за горизонт.

z — высота центра рассеивающего объема, θ — угол рассеяния.

предположение, что это явление может быть объяснено рассеянием радиоволн на неоднородностях диэлектрической проницаемости атмосферы (см. рис. 27). Затем последовало большое количество теоретических и экспериментальных работ по рассеянию радиоволн. Были выдвинуты также и другие возможные механизмы, объясняющие дальнее тропосферное распространение УКВ.

Вероятнее всего, что явление дальнего тропосферного распространения объясняется одновременным действием многих причин, среди которых рассеяние играет одну из главных ролей.

А. РАССЕЯНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН

§ 24. Уравнения распространения волн

Распространение электромагнитных волн описывается уравнениями Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathcal{E} = -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial t}, \quad (1a)$$

$$\operatorname{rot} \mathcal{H} = \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon \mathcal{E}}{\partial t}, \quad (1б)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon \mathcal{E} = 0, \quad (1в)$$

где \mathcal{E} и \mathcal{H} — напряженности электрического и магнитного полей и ε — диэлектрическая проницаемость.

Мы предполагаем, что магнитная проницаемость $\mu = 1$ и проводимость среды $\sigma = 0$. Диэлектрическая проницаемость среды испытывает флуктуации, вызванные турбулентностью. Мы будем предполагать, что характерные частоты этих флуктуаций малы по сравнению с частотой колебаний электромагнитного поля. В этом случае целесообразно ввести величины $E(\mathbf{r}, t)$ и $H(\mathbf{r}, t)$ согласно равенствам

$$\mathcal{E}(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}, \quad (2a)$$

$$\mathcal{H}(\mathbf{r}, t) = H(\mathbf{r}, t) e^{-i\omega t}. \quad (2б)$$

E и H представляют собой медленно меняющиеся комплексные амплитуды полей. Подставляя (2) в (1), получим уравнения

$$\operatorname{rot} E = ikH - \frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}, \quad (3a)$$

$$\operatorname{rot} H = -ik\varepsilon E + \frac{1}{c} \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t}, \quad (3б)$$

$$\operatorname{div} \varepsilon E = 0, \quad (3в)$$

где $k = \omega/c$.

Применим к (3a) операцию rot и воспользуемся уравнением (3б); получим

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = k^2 \varepsilon E + \frac{2ik}{c} \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon E}{\partial t^2}. \quad (4a)$$

Воспользовавшись также формулой $\operatorname{rot} \operatorname{rot} E = -\Delta E + \operatorname{grad} \operatorname{div} E$, перепишем это уравнение в виде

$$\Delta E + k^2 \varepsilon E = \operatorname{grad} \operatorname{div} E - \frac{2ik}{c} \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon E}{\partial t^2}. \quad (4б)$$

Уравнение (3в) можно записать в виде $\varepsilon \operatorname{div} E + E \operatorname{grad} \varepsilon = 0$, откуда $\operatorname{div} E = -E \operatorname{grad} \ln \varepsilon$. Подставляя это выражение в (4б), получим

$$\Delta E + k^2 \varepsilon E = -\operatorname{grad} (E \operatorname{grad} \ln \varepsilon) - \frac{2ik}{c} \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon E}{\partial t^2}. \quad (4в)$$

Мы будем в дальнейшем рассматривать распространение электромагнитных волн в среде со слабыми флуктуациями диэлектрической проницаемости. Положим $\varepsilon = \langle \varepsilon \rangle + \varepsilon_1$, где $\langle \varepsilon \rangle$ — среднее значение ε и $\varepsilon_1 = \varepsilon - \langle \varepsilon \rangle$ — флуктуирующая часть. Очевидно, что в силу определения $\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$. Малость флуктуаций означает, что $\langle |\varepsilon_1| \rangle \ll \langle \varepsilon \rangle$. Это условие с большой точностью выполняется в тропосфере, где $\langle \varepsilon \rangle$ имеет порядок 1, а $\langle |\varepsilon_1| \rangle \sim 10^{-5} - 10^{-6}$. Условие $\langle |\varepsilon_1| \rangle \ll \langle \varepsilon \rangle$ может нарушаться в ионосфере вблизи слоя, где $\langle \varepsilon \rangle$ обращается в нуль, поэтому этот случай требует отдельного рассмотрения (см., например, [64]). Среднее значение $\langle \varepsilon \rangle$ может, вообще говоря, зависеть от координат и времени. Такие изменения $\langle \varepsilon \rangle$ обуславливают эффекты систематической рефракции (или сверхрефракции), и их рассмотрение не входит в нашу задачу. Мы поэтому ограничимся случаем $\langle \varepsilon \rangle = \text{const}$.

В этом случае мы можем считать просто $\langle \varepsilon \rangle = 1$. Полагая $\varepsilon = 1 + \varepsilon_1$ и считая $\langle |\varepsilon_1| \rangle \ll 1$, преобразуем уравнение (4в) так, чтобы ε_1 фигурировало лишь в его правой части.

Полагая $\ln(1 + \varepsilon_1) \approx \varepsilon_1$, получим

$$\Delta E + k^2 E = -k^2 \varepsilon_1 E - \operatorname{grad} (E \operatorname{grad} \varepsilon_1) - \frac{2ik}{c} \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \varepsilon E}{\partial t^2}. \quad (5)$$

Первый член в правой части (5) имеет порядок величины $\varepsilon_1 E / \lambda^2$; второй можно оценить как $\varepsilon_1 E / \lambda l_0$ при $\lambda \ll l_0$ и как $\varepsilon_1 E / l_0^2$ при $l_0 \ll \lambda$, где $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны, l_0 — внутренний масштаб турбулентности. Следовательно, сумма первого и второго членов имеет порядок $\varepsilon_1 E / \lambda^2$ при $\lambda \ll l_0$ или $\varepsilon_1 E / l_0^2$ при $l_0 \ll \lambda$.

Рассмотрим теперь член $-\frac{2ik}{c} \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t}$. Подставляя $\varepsilon = 1 + \varepsilon_1$, будем иметь

$$\frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} = E \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + (1 + \varepsilon_1) \frac{\partial E}{\partial t} \approx E \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial t}.$$

Но $\frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \sim \frac{\varepsilon_1}{\tau}$, где τ — характерное время, за которое изменяется ε_1 ; $\tau \sim l_0/v$, где v — скорость перемещения неоднородностей (скорость ветра). Таким образом,

$$E \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \sim \frac{\varepsilon_1 E v}{l_0}.$$

Оценим теперь член $\frac{\partial E}{\partial t}$. Для характерного времени изменения E можно указать две величины. Первая связана с изменениями ε_1 и соответствующее время имеет порядок τ , так что

$$\frac{\partial E}{\partial t} \sim \frac{E}{\tau} \sim \frac{Ev}{l_0}.$$

Вторая причина изменения E — возникновение доплеровских частот при перемещении неоднородностей. Здесь $\frac{\partial E}{\partial t} \sim \frac{v}{c} \omega E \sim \frac{vE}{\lambda}$. Таким образом,

$$\frac{\partial E}{\partial t} \sim \frac{Ev}{l_0} + \frac{Ev}{\lambda} = Ev \left(\frac{1}{l_0} + \frac{1}{\lambda} \right).$$

В случае $\lambda \ll l_0$

$$\frac{\partial E}{\partial t} \sim \frac{Ev}{\lambda}.$$

В случае $l_0 \ll \lambda$

$$\frac{\partial E}{\partial t} \sim \frac{Ev}{l_0}.$$

В обоих случаях величина $\frac{\partial E}{\partial t}$ оказывается большей по сравнению с $E \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial t} \sim \frac{Ev}{l_0} \varepsilon_1$ практически для всех представляющих интерес длин волн. Итак,

$$\frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} \sim \frac{Ev}{\lambda} \text{ при } \lambda \ll l_0$$

и

$$\frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} \sim \frac{Ev}{l_0} \text{ при } l_0 \ll \lambda.$$

Сравним теперь порядок третьего члена правой части уравнения (5) $\frac{k}{c} \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t}$ с величиной его первых двух членов.

При $\lambda \ll l_0$ их отношение имеет порядок

$$\left[\frac{k}{c} \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} \right] / \left(\frac{\varepsilon_1 E}{\lambda^2} \right) \sim \frac{v}{\varepsilon_1 c}.$$

При $l_0 \ll \lambda$ получим

$$\left[\frac{k}{c} \frac{\partial \varepsilon E}{\partial t} \right] / \left(\frac{\varepsilon_1 E}{l_0^2} \right) \sim \frac{v}{\varepsilon_1 c} \frac{l_0}{\lambda} \ll \frac{v}{\varepsilon_1 c}.$$

Таким образом, если выполняется условие

$$\frac{v}{c} \ll \varepsilon_1, \quad (6)$$

то в уравнении (5) можно пренебречь третьим членом по сравнению с первыми двумя. Условие (6) хорошо выполняется в атмосфере, где $\varepsilon_1 \sim 10^{-6} - 10^{-5}$ и $\frac{v}{c} \sim 10^{-8}$. Последний член в правой части (5) имеет следующий по v/c порядок малости и им можно пренебрегать практически всегда. Имея в виду, что условие (6) выполнено, получим уравнение

$$\Delta E + k^2 E = -k^2 \varepsilon_1 E - \text{grad}(E \text{ grad } \varepsilon_1), \quad (7)$$

в котором время входит лишь в виде параметра.

§ 25. Рассеянное поле

Пусть на некоторый объем V , заполненный средой с флуктуирующей диэлектрической проницаемостью ε_1 , падает волна $E_0(r)$, причем, очевидно

$$\text{div} E_0 = 0 \quad (1)$$

(условие поперечности).

Наличие неоднородностей в рассеивающем объеме приводит к рассеянию волн. Мы рассмотрим здесь случай слабого рассеяния, когда можно ограничиться приближением однократного рассеяния. Этому приближению соответствует решение уравнения (7.24) при помощи метода малых возмущений с ограничением линейными по ε_1 членами. Положим

$$E = E_0 + E_s,$$

где E_s — рассеянное поле, пропорциональное флуктуациям ε_1 . Подставляя это выражение в (7.24), учитывая, что $\Delta E_0 + k^2 E_0 = 0$, и оставляя в правой части уравнения лишь член с E_0 (так как учет E_s привел бы к квадратичным по ε_1 членам), получим

$$\Delta E_s + k^2 E_s = -k^2 \varepsilon_1 E_0 - \text{grad}(E_0 \text{ grad } \varepsilon_1). \quad (2)$$

При решении уравнения (2) мы не будем учитывать граничных условий на поверхности земли и будем считать, что объем V помещен в безграничном пространстве. В этом случае единственное условие, накладываемое на решение уравнения (2), — это условие излучения. Удовлетворяющее ему решение уравнения (2), как известно, имеет вид

$$E_s(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \{k^2 \varepsilon_1(r') E_0(r') + \text{grad}(E_0 \text{ grad } \varepsilon_1(r'))\} d^3 r'. \quad (3)$$

Преобразуем второе слагаемое в этом выражении при помощи теоремы Гаусса в форме

$$\int_V u \operatorname{grad} v dV = \iint_S uv d\sigma - \int_V v \operatorname{grad} u dV. \quad (4)$$

Здесь $d\sigma$ — вектор величиной $d\sigma$, направленный по внешней нормали к поверхности S , охватывающей объем V . Тогда

$$\begin{aligned} E_s(r) = \frac{1}{4\pi} \int_V \left[\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} k^2 \varepsilon_1(r') - \right. \\ \left. - (E(r') \operatorname{grad} \varepsilon_1(r')) \operatorname{grad}_{r'} \left(\frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \right) \right] d^3r' + \\ + \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} (E'_0 \operatorname{grad} \varepsilon_1) d\sigma. \quad (5) \end{aligned}$$

Поверхностным интегралом в (5) можно пренебречь, так как в случае достаточно большого по величине рассеивающего объема роль поверхностных эффектов мала по сравнению с объемными (первые пропорциональны L^2 , а вторые — L^3 , где L — характерный размер рассеивающего объема). Вычислим также входящий в (5)

$$\operatorname{grad}_{r'} \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} = - \left[\frac{ike^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} - \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|^2} \right] \frac{r-r'}{|r-r'|}. \quad (6)$$

Величина $|r-r'|$ — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения. В случае, если $k|r-r'| \gg 1$ (эта область носит название волновой зоны), второе слагаемое в (6) можно отбросить и (5) приобретает вид

$$\begin{aligned} E_s(r) \approx \frac{1}{4\pi} \int_V d^3r' \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \left\{ k^2 \varepsilon_1(r') E_0(r') + \right. \\ \left. + ik \frac{r-r'}{|r-r'|} (E_0(r') \operatorname{grad} \varepsilon_1(r')) \right\}. \quad (7) \end{aligned}$$

Второе слагаемое в (7) также содержит градиент и его опять можно преобразовать по теореме Гаусса, причем ее приходится использовать в форме

$$\int_V u_{il} \frac{\partial v}{\partial x_l} dV = \iint_S u_{il} v (d\sigma)_l - \int_V v \frac{\partial u_{il}}{\partial x_l} dV.$$

Преобразуя (7), мы снова пренебрежем поверхностным интегралом, а при дифференцировании выражения

$$\frac{\partial}{\partial x'_i} \left\{ \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \frac{x_i - x'_i}{|r-r'|} E_i^0(r') \right\}$$

будем дифференцировать только экспоненту, так как $\frac{\partial E_i^0(r')}{\partial x'_i} \equiv 0$

в силу условия $\text{div } E_0 = 0$, а остальные множители в волновой зоне меняются значительно медленнее, чем экспонента. В результате всех преобразований получаем формулу

$$E_s(r) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \varepsilon_1(r') \left\{ E_0(r') - \frac{r-r'}{|r-r'|} \left(\frac{r-r'}{|r-r'|} E_0(r') \right) \right\} dV. \quad (8)$$

Единичный вектор

$$n(r, r') = \frac{r-r'}{|r-r'|} \quad (9)$$

направлен из переменной точки интегрирования r' в сторону точки наблюдения r . Воспользовавшись формулой $E_0 - n(n E_0) = [n [E_0 n]]$, мы можем записать (8) также в форме

$$E_s(r) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \varepsilon_1(r') [n [E_0(r') n]] d^3r'. \quad (8a)$$

Выражение (8a) для рассеянного поля является достаточно общим, так как при его выводе не вводились какие-либо ограничения на вид падающей волны E_0 , величину рассеивающего объема V и расстояние от него до точки наблюдения (за исключением того, что эта точка должна находиться в волновой зоне).

§ 26. Средняя интенсивность рассеяния

Эта величина определяется вектором плотности потока энергии (вектор Пойнтинга)

$$S = \frac{c}{4\pi} [E_s H_s].$$

В случае использования комплексных амплитуд полей среднее за период колебания значение вектора S равно

$$S = \frac{c}{8\pi} \text{Re} [E_s H_s^*]. \quad (1)$$

Для нахождения H_s воспользуемся уравнением (3а.24), в котором можно опустить член $\frac{1}{c} \frac{\partial H}{\partial t}$:

$$H_s = \frac{1}{ik} \operatorname{rot} E_s.$$

При вычислении $\operatorname{rot} E_s$ дифференцировать в (8а.25) следует лишь $e^{ik|r-r'|}$, так как в волновой зоне эта величина меняется наиболее быстро, а дифференцирование других множителей дает члены порядка $\frac{1}{kr}$. Напомним, что начало координат выбирается внутри рассеивающего объема, и поэтому r — это расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения. В результате получаем формулу

$$H_s(r) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \varepsilon_1(r') [n E_0] d^3r'. \quad (2)$$

Выражение для S принимает вид

$$S = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \operatorname{Re} \iint_V \frac{e^{ik|r-r'| - ik|r-r''|}}{|r-r'| \cdot |r-r''|} \varepsilon_1(r') \varepsilon_1(r'') \times \\ \times [(E'_0 - n'(E'_0 n')) [n'' E_0^{*''}]] d^3r' d^3r'', \quad (3)$$

где для сокращения записи обозначено

$$E'_0 = E_0(r'), E''_0 = E_0(r''), \quad n' = n(r, r'), \quad n'' = n(r, r'').$$

Величина S является случайной, так как зависит от случайных величин $\varepsilon_1(r')$, $\varepsilon_1(r'')$. Найдем ее среднее значение:

$$\langle S(r) \rangle = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \operatorname{Re} \iint_V d^3r' d^3r'' \frac{e^{ik[|r-r'| - |r-r''|]}}{|r-r'| \cdot |r-r''|} B_\varepsilon(r', r'') \times \\ \times \{n'' [(E'_0 E_0^{*''}) - (E'_0 n')(E_0^{*''} n')] + E_0^{*''} [(n' n'')(E'_0 n') - (E'_0 n'')]\}. \quad (4)$$

Здесь $B_\varepsilon(r', r'')$ — корреляционная функция флуктуаций ε . Сделаем предположение о статистической однородности флуктуаций, т. е. будем считать, что $B_\varepsilon(r', r'') = B_\varepsilon(r' - r'')$.

Обозначим $\rho = r' - r''$ и разложим $n'' = n(r, r'')$ в ряд по ρ ; после простых вычислений получим

$$n''_i = n'_i + \frac{\rho_i - n'_i (\rho_k n'_k)}{|r - r'|} + \dots \quad (5)$$

Величина ρ в (4) по порядку величины не превышает радиуса корреляции L_0 флуктуаций ϵ , так как при больших значениях ρ функция $B_\epsilon(\rho)$ обращается в нуль. Поэтому, если расстояние r от рассеивающего объема до точки наблюдения велико по сравнению с L_0 , то второй член в (5), имеющий порядок L_0/r , мал.

Что касается величины $n' n''$, то, как легко видеть из (5), она отличается от единицы на члены порядка L_0^2/r^2 . Следовательно, второй член в фигурных скобках в (4) по порядку величины равен $E_0^2 L_0/r$, в то время как первый имеет порядок E_0^2 . Считая, что выполняется условие

$$L_0 \ll r, \quad (6)$$

мы можем отбросить второй член в (4).

С той же относительной ошибкой порядка L_0/r мы можем заменить n'' на n' в первом члене в фигурных скобках (4) и r'' на r' в знаменателе подынтегрального выражения (но, конечно, не в фазовых множителях). В результате получаем формулу

$$\langle S(r) \rangle \approx \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \iint_V \frac{e^{ik[|r-r'| - |r-r''|]}}{|r-r'|^2} B_\epsilon(r' - r'') \times \\ \times n' [(E_0' E_0^{*''}) - (E_0' n') (E_0^{*''} n')] d^3 r' d^3 r''. \quad (7)$$

Дальнейшие упрощения формулы (7) мы проведем в предположении, что поле падающей волны создается некоторым излучателем, расположенным в точке R . В этом случае $E_0(r)$ имеет вид

$$E_0(r) = A_0(r) e^{ik|R-r|}. \quad (8)$$

Функция $A_0(r)$ (вообще говоря, комплексная) мало изменяется при изменении r на величину порядка длины волны λ . Ее заметные изменения происходят лишь на расстояниях порядка величины рассеивающего объема L . Вид функции $A_0(r)$ зависит от диаграммы направленности излучателя. Подставляя (8) в (7), мы можем пренебречь различием $A_0(r')$ и $A_0(r'')$, так как относительная величина разности этих функций не превышает по порядку величины L_0/L и мала при соблюдении условия

$$L_0 \ll L. \quad (9)$$

В этом случае мы получаем

$$E_0' E_0^{*''} - (E_0' n') (E_0^{*''} n') \approx \\ \approx A_0(r') A_0^*(r') \sin^2 \chi(r') \exp\{ik[|R-r'| - |R-r''|]\}, \quad (10)$$

где $\chi(r)$ — угол между векторами $A_0(r)$ и $n(r)$.

Подставляя (10) в (7), получим

$$\langle S(r) \rangle \approx \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \int_V \int_V \frac{n(r') |A_0(r')|^2 \sin^2 \chi(r') B_z(r' - r'')}{|r - r'|^2} \times \\ \times \exp \{ ik [|r - r'| - |r - r''| + |R - r'| - |R - r''|] \} d^3r' d^3r''. \quad (11)$$

Разложим величины $|r - r''| = |r - r' + \rho|$ и $|R - r''| = |R - r' + \rho|$ в ряды по степеням ρ ; после простых выкладок получаем

$$|r - r''| = |r - r'| + n(r') \rho + \frac{1}{2|r - r'|} \{ \rho^2 - (\rho n(r'))^2 \} + \dots, \quad (12)$$

$$|R - r''| = |R - r'| - m(r') \rho + \frac{1}{2|R - r'|} \{ \rho^2 - (\rho m(r'))^2 \} + \dots \quad (13)$$

где

$$m(r') = \frac{r' - R}{|r' - R|} \quad (14)$$

— единичный вектор, направленный от излучателя в точку r' (рис. 28).

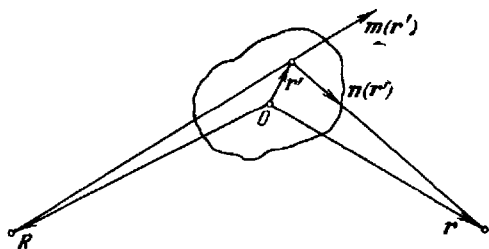


Рис. 28. Система координат при вычислении рассеяния. Начало координат внутри рассеивающего объема.

R и r — координаты источника и точки наблюдения, r' — произвольная точка внутри рассеивающего объема, $m(r')$ и $n(r')$ — единичные векторы.

Последний член разложения (12) по порядку величины равен L_0^2/r , так как в существенной для интегрирования области величина ρ ограничена условием $\rho \lesssim L_0$. Так как величина $|r - r''|$ входит в (11) в экспоненту с множителем k , то для того, чтобы можно было пренебречь последним членом разложения (12),

необходимо выполнение условия

$$\frac{kL_0^2}{r} \ll 1, \quad \text{или} \quad \frac{L_0^2}{\lambda r} \ll 1, \quad (15)$$

означающего, что радиус первой зоны Френеля должен быть большим по сравнению с радиусом корреляции флуктуаций ε . Аналогично при выполнении условия

$$\frac{L_0^2}{\lambda R} \ll 1 \quad (16)$$

можно пренебречь последним членом разложения (13). В этом случае формула (11) принимает вид

$$\langle S(\mathbf{r}) \rangle = \frac{c}{8\pi} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \operatorname{Re} \int_V \int_V \frac{n(\mathbf{r}') |A_0(\mathbf{r}')|^2 \sin^2 \chi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} B_\varepsilon(\rho) e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}')\rho} d^3r' d^3r'', \quad (17)$$

где

$$\mathbf{K}(\mathbf{r}) = k[\mathbf{m}(\mathbf{r}) - \mathbf{n}(\mathbf{r})] \quad (18)$$

— вектор рассеяния, равный разности волновых векторов падающей волны $\mathbf{k}_0 = k\mathbf{m}$ и рассеянной волны $\mathbf{k}_s = k\mathbf{n}$.

Введем в (17) вместо \mathbf{r}'' новую переменную интегрирования ρ . Внутренний интеграл по ρ примет вид

$$I(\mathbf{K}) = \int_V B_\varepsilon(\rho) e^{i\mathbf{K}\rho} d^3\rho. \quad (19)$$

Он может быть просто выражен через $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ — спектральную плотность флуктуаций ε , связанную с $B_\varepsilon(\rho)$ формулой

$$B_\varepsilon = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon e^{i\mathbf{x}\rho} d^3\mathbf{x}. \quad (20)$$

Подставляя (20) в (19), получим

$$I(\mathbf{K}) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \int_V e^{i(\mathbf{K}+\mathbf{x})\rho} d^3\rho. \quad (21)$$

Рассмотрим функцию

$$\delta_V(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int_V e^{i\mathbf{x}\rho} d^3\rho.$$

В случае, если V — бесконечный объем, $\delta_V(\mathbf{x}) = \delta(\mathbf{x})$, т. е. представляет собой δ -функцию (трехмерную). В случае конечного объема $\delta_V(\mathbf{x})$ представляет собой «размазанную» δ -функцию. Она обладает свойствами:

$$\delta_V(0) = \frac{V}{8\pi^3},$$

$$\iiint_{-\infty}^{\infty} \delta_V(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \int_V d^3\rho \left[\frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\mathbf{x}\cdot\rho} d^3\mathbf{x} \right] = \int d^3\rho \delta(\rho) = 1.$$

Следовательно, $\delta_V(\mathbf{x})$ заметно отлична от нуля лишь в области T пространства волновых чисел с объемом порядка $T = \frac{8\pi^3}{V}$, сосредоточенной вблизи точки $\mathbf{x} = 0$.

Отсюда ясно, что интеграл (21) равен

$$I(\mathbf{K}) = 8\pi^3 \bar{\Phi}_\varepsilon(-\mathbf{K}), \quad (22)$$

где черта означает усреднение в пространстве волновых чисел по объему порядка $T = \frac{8\pi^3}{V}$. Действительно, применяя теорему о среднем, имеем

$$\begin{aligned} \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \delta_V(\mathbf{K} + \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} &= \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(-\mathbf{K} + \mathbf{x}') \delta_V(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \approx \\ &\approx \frac{V}{8\pi^3} \iiint_{\frac{8\pi^3}{V}} \Phi_\varepsilon(-\mathbf{K} + \mathbf{x}) d^3\mathbf{x} = \bar{\Phi}_\varepsilon(-\mathbf{K}). \end{aligned}$$

В случае, если спектральная плотность $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ вблизи точки $\mathbf{x} = -\mathbf{K}$ меняется слабо, операция усреднения мало меняет функцию $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ и в этом случае $\bar{\Phi}_\varepsilon(-\mathbf{K}) \approx \Phi_\varepsilon(-\mathbf{K})$. (Заметим, что операция усреднения существенно меняет вид $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ вблизи точек, где эта функция имеет резкий максимум. Этот эффект может быть существенным при рассмотрении рассеяния вперед.)

Подставляя (22) в (17) и опуская знак Re , так как $\Phi_\varepsilon(-\mathbf{K})$ — действительная (и положительная) величина, получим

$$\langle S(\mathbf{r}) \rangle = \frac{ck^4}{16} \int_V \mathbf{n}(\mathbf{r}') \frac{|A_0(\mathbf{r}')|^2 \sin^2 \chi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \bar{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{K}(\mathbf{r}')) d^3\mathbf{r}' \quad (23)$$

(мы учли равенство $\Phi_\varepsilon(-\mathbf{K}) = \Phi_\varepsilon(\mathbf{K})$).

Формуле (23) можно придать более удобный вид. Для этого предварительно запишем ее в дифференциальной форме

$$\langle dS(\mathbf{r}) \rangle = \mathbf{n}(\mathbf{r}') \frac{ck^4 |A_0^2|}{16 |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \sin^2 \chi(\mathbf{r}') \bar{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{K}(\mathbf{r}')) dV'. \quad (24)$$

$\langle dS(\mathbf{r}) \rangle$ представляет собой плотность потока энергии, рассеянной элементом объема $dV(\mathbf{r}')$ в точку \mathbf{r} . Величина

$$S_0(\mathbf{r}') = \frac{c |A_0^2|}{8\pi} \quad (25)$$

представляет собой плотность потока энергии падающей волны.

Умножим (24) на $\mathbf{n}' |r - r'|^2 d\Omega$; в результате мы получаем энергию dE , рассеянную в направлении \mathbf{n}' в телесный угол $d\Omega$:

$$dE = S_0(\mathbf{r}') \sigma_0(\mathbf{r}') dV' d\Omega, \quad (26)$$

где

$$\sigma_0(\mathbf{r}) = \frac{\pi}{2} k^4 \overline{\Phi_\varepsilon(K(\mathbf{r}))} \sin^2 \chi(\mathbf{r}) \quad (27)$$

представляет собой эффективный поперечник рассеяния из единицы объема в единичный телесный угол в направлении \mathbf{m} . При помощи величин $S_0(\mathbf{r})$, $\sigma_0(\mathbf{r})$ формулу (23) можно записать в виде

$$\langle S(\mathbf{r}) \rangle = \int_V \mathbf{n}(\mathbf{r}') \frac{S_0(\mathbf{r}') \sigma_0(\mathbf{r}')}{|r - r'|^2} dV'. \quad (28)$$

Формула (28) имеет прозрачный физический смысл: согласно (26) величина рассеянной в телесный угол $d\Omega$ энергии равна dE ; создаваемая этой энергией плотность потока энергии равна

$$\frac{dE}{|r - r'|^2 d\Omega} = \frac{S_0(\mathbf{r}') \sigma_0(\mathbf{r}') dV}{|r - r'|^2},$$

где $|r - r'|^2 d\Omega$ — величина площади, на которую распределяется рассеянная энергия.

Отметим, что при выводе формулы (28) никакие ограничения на размеры рассеивающего объема (за исключением слабого ограничения (9)) не накладывались. Формулы (27), (28) справедливы в том случае, если радиус корреляции флуктуаций L_0 мал по сравнению с радиусами первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda r}$ и $\sqrt{\lambda R}$ и с расстояниями r и R . Этим приведенный вывод формул (27), (28) отличается от обычного (см., например, [65]), когда делаются предположения о малости величины рассеивающего объема по сравнению с $\sqrt{\lambda r}$.

Следует отметить, что сделанное выше предположение о статистической однородности флуктуаций, т. е. предположение, что $B_\varepsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = B_\varepsilon(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)$, являлось излишним и было принято лишь для того, чтобы не отвлекать внимания от хода основных рассуждений. Те же результаты можно получить и в слу-

чае, если средний квадрат флуктуаций ϵ зависит от координат:

$$B_{\epsilon}(r_1, r_2) = \overline{\epsilon^2} \left(\frac{r_1 + r_2}{2} \right) b_{\epsilon}(r_1 - r_2) \quad (b_{\epsilon}(0) = 1). \quad (29)$$

В этом случае спектральная плотность флуктуаций также зависит от координат (см. гл. 1) и имеет вид

$$\Phi_{\epsilon} = C_{\epsilon}^2(r) \Phi_{\epsilon}^{(0)}(r). \quad (30)$$

В этом случае формула (27) принимает вид

$$\sigma_0(r) = \frac{\pi k^4}{2} C_{\epsilon}^2(r) \overline{\Phi_{\epsilon}^{(0)}}(K(r)) \sin^2 \chi(r), \quad (31)$$

а окончательная формула (28) сохраняется.

§ 27. Качественная интерпретация рассеяния

Остановимся более подробно на формуле (27.26) для эффективного поперечника рассеяния. В случае достаточно большого рассеивающего объема, когда $\overline{\Phi_{\epsilon}}(K) \approx \Phi_{\epsilon}(K)$, она имеет вид

$$\sigma_0(r) = \frac{\pi k^4}{2} \sin^2 \chi(r) \Phi_{\epsilon}(k_0(r) - k_s(r)), \quad (1)$$

где k_0 и k_s — волновые векторы падающей и рассеянной волн. Абсолютная величина вектора рассеяния $K = k_0 - k_s$ равна

$$K = 2k \sin \frac{\theta}{2}, \quad (2)$$

где $\theta = \arccos \left(\frac{k_0 k_s}{k^2} \right)$ — угол между векторами k_0 и k_s , т. е. угол рассеяния. Как следует из формулы (1), интенсивность рассеяния на угол θ определяется одной спектральной компонентой неоднородностей, соответствующей масштабу (пространственному периоду)

$$l(\theta) = \frac{2\pi}{K} = \frac{\pi}{k \sin \frac{\theta}{2}} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (3)$$

Формула (3) является известным условием Брэгга для дифракции на пространственных структурах.

Чтобы разъяснить смысл формулы (1), рассмотрим модель неоднородностей диэлектрической проницаемости в виде

$$\epsilon_1(r) = d \cos \left(\frac{2\pi}{l} ar \right) \quad (4)$$

— пространственная синусоидальная дифракционная решетка с периодом l в направлении единичного вектора \mathbf{a} . Для простоты вычислений предположим, что рассеивающий объем V представляет собой прямоугольный параллелепипед с одной из осей вдоль вектора \mathbf{a} . Чтобы облегчить выкладки, предположим также, что размеры L_1, L_2, L_3 рассеивающего объема удовлетворяют условиям $L \ll r$ и $L^2 \ll \lambda r$. В этом случае мы можем в формуле (8a.25) разложить величину $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ в экспоненте в ряд с точностью до членов второго порядка: $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r - r'n$, где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$, а в знаменателе положить $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r$. Кроме того, будем считать падающую волну плоской

$$E_0(\mathbf{r}) = A_0 e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}},$$

а вектор $\mathbf{n}(\mathbf{r}') \approx \mathbf{r}/r$. В этом случае формула (8a.25) дает

$$E_s(\mathbf{r}) \approx \frac{dk^2 e^{ikr}}{4\pi r} [n [A_0 n]] \int_V \cos\left(\frac{2\pi}{l} \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}\right) e^{i(\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{r}} dV. \quad (5)$$

Вычисляя входящий сюда интеграл, получаем

$$E_s(\mathbf{r}) = \frac{dk^2 e^{ikr}}{4\pi r} [n [A_0 n]] \cdot \frac{L_1 L_2 L_3}{2} \frac{\sin\left(\frac{KL_1}{2} \sin \varphi\right)}{\frac{KL_1}{2} \sin \varphi} \times \\ \times \left\{ \frac{\sin\left(\frac{1}{2} KL_3 \cos \varphi + \frac{\pi L_3}{l}\right)}{\frac{1}{2} KL_3 \cos \varphi + \frac{\pi L_3}{l}} + \frac{\sin\left(\frac{1}{2} KL_3 \cos \varphi - \frac{\pi L_3}{l}\right)}{\frac{1}{2} KL_3 \cos \varphi - \frac{\pi L_3}{l}} \right\}, \quad (6)$$

где φ — угол между векторами \mathbf{a} и $\mathbf{K} = \mathbf{k}_0 - \mathbf{k}\mathbf{n}$, ось z направлена по \mathbf{a} , плоскость xz содержит векторы \mathbf{K} , \mathbf{a} и L_1, L_2, L_3 — размеры рассеивающего объема вдоль осей x, y, z .

Рассмотрим множитель

$$\frac{\sin\left(\frac{KL_1}{2} \sin \varphi\right)}{\frac{KL_1}{2} \sin \varphi} = \frac{\sin\left(kL_1 \sin \frac{\theta}{2} \sin \varphi\right)}{kL_1 \sin \frac{\theta}{2} \sin \varphi}.$$

В случае, если $kL_1 \sin \frac{\theta}{2} \gg 1$, что обычно выполняется, так как размер рассеивающего объема велик по сравнению с длиной волны, этот множитель мал при всех φ , за исключением близких к нулю значений φ , удовлетворяющих условию

$$|\varphi| \lesssim \frac{1}{kL_1} = \frac{\lambda}{2\pi L_1}, \quad (7)$$

при выполнении которого этот множитель близок к единице.

Таким образом, заметная дифракция на рассматриваемой периодической структуре будет осуществляться лишь при близких к нулю значениях φ , т. е. в случае, когда векторы \mathbf{K} и \mathbf{a} параллельны (с точностью до малого угла порядка $1/kL_1$). Нетрудно понять, что параллельность векторов \mathbf{K} и \mathbf{a} означает зеркальность отражения, т. е. равенство углов падения и отражения волны по отношению к плоскостям равных значений ε_1 .

Однако условия $\varphi \approx 0$ еще недостаточно, так как (6) содержит второй множитель

$$\frac{\sin\left(kL_3 \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi + \frac{\pi L_3}{l}\right)}{kL_3 \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi + \frac{\pi L_3}{l}} + \frac{\sin\left(kL_3 \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi - \frac{\pi L_3}{l}\right)}{kL_3 \sin \frac{\theta}{2} \cos \varphi - \frac{\pi L_3}{l}},$$

который также очень мал везде, за исключением значений аргументов, близких к нулю. Считая, что условие (7) уже выполнено, и полагая $\cos \varphi = 1$, получим новые условия в виде

$$\left|kL_3 \sin \frac{\theta}{2} \pm \frac{\pi L_3}{l}\right| \ll 1, \quad \text{или} \quad \left|2 \sin \frac{\theta}{2} \pm \frac{\lambda}{l}\right| \ll \frac{\lambda}{\pi L_3}. \quad (8)$$

Таким образом, лишь при значениях θ , удовлетворяющих условиям

$$2 \sin \frac{\theta}{2} \pm \frac{\lambda}{l} = 0$$

(с точностью до малого угла порядка $\lambda/\pi L_3$), будет наблюдаться заметная дифракция.

Резюмируя, мы можем сказать, что дифракция синусоидальной пространственной дифракционной решетки имеет место лишь при соблюдении двух условий — условия зеркальности и условия Брэгга [100]. Если хотя бы одно из этих условий не выполняется (с указанной выше точностью), падающая на такую решетку электромагнитная волна «свободно» проходит через нее, не испытывая заметной дифракции.

В случае, если мы имеем целый набор периодических пространственных дифракционных решеток с различными периодами и различной ориентацией, то при заданных векторах \mathbf{k}_0 и \mathbf{k}_s дифракция может произойти только на одной из решеток — с вектором \mathbf{a} , параллельным $\mathbf{k}_0 - \mathbf{k}_s$, и с величиной l , удовлетворяющей условию (8). Все остальные решетки не окажут влияния на рассеяние.

Приведенные элементарные расчеты поясняют, почему рассеяние на определенный угол, описываемое формулой (1), зависит лишь от одной спектральной компоненты неоднородностей.

В действительности в формулу (27.26) входит не $\Phi_\varepsilon(\mathbf{K})$, а $\overline{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{K})$, т. е. спектр, усредненный по некоторой области пространства волновых чисел объемом $8\pi^3/V$. При таком усреднении в $\overline{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{K})$ входят, очевидно, и близкие к \mathbf{K} спектральные компоненты. При элементарном рассмотрении, проведенном в этом параграфе, аналогичное этому обстоятельство проявилось в том, что условие зеркальности и условие Брэгга должны были выполняться с точностью до углов порядка λ/L . Таким образом, в рассеянии на данный угол принимают участие близкие спектральные компоненты.

Это обстоятельство легко объясняется при помощи следующих рассуждений. Дифракция на бесконечной синусоидальной дифракционной решетке дает бесконечно узкий дифрагированный пучок в направлениях, удовлетворяющих условию Брэгга. В случае конечных размеров решетки L угловой размер дифрагированного пучка имеет порядок λ/L . Это приводит к тому, что при наличии некоторого набора дифракционных решеток рассеяние на данный угол обусловлено не только той решеткой, которая в точности удовлетворяет условию Брэгга, но и близкими по размерам и ориентации решетками, основные максимумы которых не совпадают с избранным направлением, но дифракция от которых захватывает данное направление за счет расплывания дифрагированных пучков.

В заключение параграфа рассмотрим качественно вопрос о пространственной корреляции рассеянных полей. В гл. 1 было установлено, что в случае статистически однородной турбулентности имеет место формула

$$\langle Z_\varepsilon(d^3\mathbf{x}) Z_\varepsilon^*(d^3\mathbf{x}') \rangle = \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}') d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{x}', \quad (9)$$

где $Z_\varepsilon(d^3\mathbf{x})$ — спектральная амплитуда (случайная) флуктуаций ε , соответствующая волновому числу \mathbf{x} . Из (9) следует, что спектральные компоненты, соответствующие различным \mathbf{x} , не коррелированы.

Рассмотрим поля, рассеянные в двух направлениях θ_1 и θ_2 . В случае бесконечного рассеивающего объема*) рассеяние на каждый из углов обусловлено в точности одной компонентой спектра турбулентности. В силу (9) различные компоненты спектра не коррелированы, следовательно, при бесконечном рассеивающем объеме поля, рассеянные на любые два несовпадающих угла, не коррелированы. В случае конечного рассеивающего объема поле, рассеянное в определенном направлении, обусловлено группой спектральных компонент вблизи точки $\mathbf{x} = \mathbf{K}$, расстояние между

*) В действительности, конечно, нельзя рассматривать бесконечный рассеивающий объем, так как при этом будет нарушено условие применимости $\langle |E_3^2| \rangle \ll E_0$ рассматриваемого приближения.

которыми не превышает по порядку $\sqrt[3]{\frac{8\pi^3}{V}} = \frac{2\pi}{L}$. Следовательно, поля, рассеянные в двух направлениях, будут коррелированы в том случае, если объемы в пространстве волновых чисел, обуславливающие рассеяние в данных направлениях, пересекаются. В этом случае имеет место соотношение

$$|K_1 - K_2| < \frac{2\pi}{L}. \quad (10)$$

В случае, когда в обоих направлениях рассеивается одна и та же волна, $K_1 = k_0 - k_{s1}$, $K_2 = k_0 - k_{s2}$, и в этом случае

$$|k_{s1} - k_{s2}| < \frac{2\pi}{L}.$$

Если угол между k_{s1} и k_{s2} равен $\Delta\theta$, то последнее условие сводится к неравенству

$$2 \sin \frac{\Delta\theta}{2} < \frac{\lambda}{L}$$

или (так как обычно $\Delta\theta \ll 1$)

$$\Delta\theta < \frac{\lambda}{L}. \quad (11)$$

Таким образом, угловой радиус корреляции рассеянного поля имеет порядок λ/L .

В случае, если две точки наблюдения находятся на одинаковом расстоянии r от рассеивающего объема, расстояние Δr между ними связано с $\Delta\theta$ формулой $\Delta r = r\Delta\theta$, и в этом случае расстояние, на котором сохраняется корреляция рассеянных полей, ограничено условием

$$\Delta r < \frac{\lambda r}{L}. \quad (12)$$

Таким образом, линейный радиус корреляции при поперечном разnose точек наблюдения имеет порядок $\lambda r/L$.

Рассмотрим также корреляцию двух полей различной частоты, рассеянных в одном и том же направлении. В этом случае $K_1 = k_1(m - n)$, $K_2 = k_2(m - n)$ и

$$|K_1 - K_2| = (k_1 - k_2) 2 \sin \frac{\theta}{2} = \frac{2\pi\Delta f}{c} 2 \sin \frac{\theta}{2}.$$

Подставляя это выражение в (10), получим условие, при котором поля, различающиеся по частоте на Δf и рассеянные в одном и том

же направлении, остаются коррелированными:

$$\Delta f < \frac{c}{2L \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (13)$$

Здесь в качестве L следует брать размер объема V в направлении вектора ($m - n$).

В случае, если при помощи рассеяния передается сигнал, занимающий конечную полосу частот, для его неискаженной передачи требуется, чтобы флуктуации различных спектральных компонент сигнала были полностью коррелированными. Как следует из (13), это будет выполнено, если ширина спектра сигнала удовлетворяет условию (13). В связи с этим величина $\frac{c}{2L \sin \frac{\theta}{2}}$ может

быть названа полосой пропускания канала связи, работающего на рассеянии*).

§ 28. Эффективный рассеивающий объем

Выше мы не конкретизировали форму рассеивающего объема V , считая его заданным. Сейчас мы рассмотрим этот вопрос более подробно. Представляет интерес рассмотреть случай, когда рассеивающий объем создается пересечением диаграмм направленности передающей и приемной антенн. Будем исходить из формулы (8а.25) для напряженности рассеянного поля в точке r . Функция $E_0(r')$ (поле падающей волны) может быть представлена в виде

$$E_0(r') = e_0(r') f_0(m(r')), \quad (1)$$

где $m(r') = (r' - R)/|r' - R|$ — единичный вектор, направленный от излучателя в точку r' , а $e_0(r')$ — поле диполя, у которого направление максимального излучения совпадает с направлением максимального излучения нашего излучателя. Интенсивность диполя подбирается так, чтобы диаграмма направленности $f_0(m)$ в этом направлении была равна 1.

Найдем среднее поле, воспринимаемое приемной антенной. Оно может быть получено интегрированием поля $E_s(r)$

* Эта величина на практике оказывается достаточно большой, что позволяет передавать при помощи рассеяния даже телевизионные передачи, требующие полосы пропускания порядка нескольких мегагерц.

(рассеянного поля в точке r) по плоскости раскрыва приемной антенны Σ , центр которой помещен в точку r_0 :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_s(r_0) &= \frac{1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} E_s(r_0 + \rho) d\xi d\eta = \\ &= \frac{k^2}{4\pi\Sigma} \int_V d^3r' \varepsilon_1(r') [n(r') [E_0(r') n(r')]] \iint_{\Sigma} \frac{e^{ik|r_0-r'+\rho|}}{|r_0-r'+\rho|} d\xi d\eta. \quad (2) \end{aligned}$$

Разлагая $|r_0 - r' + \rho|$ в ряд, получаем равенство

$$\frac{e^{ik|r_0-r'+\rho|}}{|r_0-r'+\rho|} \approx \frac{e^{ik|r_0-r'| - ikn(r')\rho}}{|r_0-r'|}, \quad (3)$$

справедливое при выполнении условия $k\rho^2/|r_0 - r'| \ll 1$, когда можно не учитывать следующий член разложения.

Но величина ρ имеет порядок размера антенны D . Следовательно, это условие можно записать в виде

$$r_0 \gg \frac{D^2}{\lambda}. \quad (4)$$

Условие (4) означает, что рассеивающий объем находится в зоне дифракции Фраунгофера, или в зоне, где сформировалась диаграмма направленности антенны $f_1(n)$. Последняя представляет собой функцию

$$\frac{1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} e^{-ikn\rho} d\xi d\eta = f_1(n). \quad (5)$$

Используя (5) и (1), мы можем записать $\mathcal{E}_s(r_0)$ в виде

$$\mathcal{E}_s(r_0) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \varepsilon_1(r') [n[e_0n]] f_0(m) f_1(n) \frac{e^{ik|r_0-r'|}}{|r_0-r'|} d^3r'. \quad (6)$$

Эта формула отличается от (8а.25) лишь тем, что в ней область интегрирования бесконечна, но под интегралом стоят два дополнительных множителя $f_0(m(r'))$ и $f_1(n(r'))$, описывающих диаграммы направленности излучающей и приемной антенн. Эти множители принимают максимальные значения на осях диаграмм направленности и быстро спадают при удалении от этих осей. Поэтому интеграл (6) фактически распространен на область пересечения диаграмм направленности передающей и приемной антенн.

Если, пользуясь выражением (6), вычислить плотность потока рассеянной энергии, то мы снова придем к формуле, аналогичной (28.26), но под знаком интеграла появится дополнительный множитель $|f_1(n)|^2$, описывающий диаграмму направленности приемной антенны (по мощности), а область интегрирования будет

бесконечной:

$$\langle S(r) \rangle = \int n(r') \frac{s_0(r') \sigma_0(r')}{|r - r'|^2} |f_1(n)|^2 dV'. \quad (7)$$

Еще более наглядный вид этой формуле можно придать, если положить

$$S_0(r') = s_0(r') |f_0(m(r'))|^2, \quad (8)$$

где $s_0(r')$ — плотность потока энергии, создаваемая диполем e_0 (см. (1)), и $|f_0(m)|^2$ — нормированная диаграмма направленности излучателя по мощности (в направлении максимального излучения $f_0 = 1$). Тогда

$$\langle S(r) \rangle = \int n(r') \frac{s_0(r') \sigma_0(r')}{|r - r'|^2} |f_0(m(r'))|^2 |f_1(n(r'))|^2 dV'. \quad (9)$$

Два различных случая могут осуществляться в зависимости от скорости изменения функций $s_0(r') \sigma_0(r')/|r - r'|^2$ и $|f_0 f_1|^2$. Пусть диаграммы направленности f_0 и f_1 являются «острыми», т. е. меняются много быстрее, чем функция $s_0(r') \sigma_0(r')/|r - r'|^2$ (ниже мы подробнее остановимся на условиях, когда этот случай осуществляется). В этом случае интеграл (9) можно вычислить приближенно, вынося значение $n(r') s_0(r') \sigma_0(r')/|r - r'|^2$, взятое в точке пересечения осей диаграмм направленности. Обозначая эту точку через r_1 , получим

$$\langle S(r) \rangle \approx n(r_1) \frac{s_0(r_1) \sigma(r_1)}{|r - r_1|^2} V_0, \quad (10)$$

где эффективный рассеивающий объем V_0 равен

$$V_0 = \int |f_0(m(r')) f_1(n(r'))|^2 d^3 r'. \quad (11)$$

В некоторых простых случаях величину V_0 можно вычислить. Например, если поверхности раскрыва передающей и приемной антенн — одинаковые прямоугольники, то

$$V_0 = \frac{d^3 \sin^2 \gamma_1 \sin \gamma_2}{12 \cos^3(\theta/2) \sin \theta} \approx \frac{d^3 \gamma_1^2 \gamma_2}{12\theta} \quad (\gamma_i \ll \theta \ll 1). \quad (12)$$

Здесь d — расстояние между антеннами (по прямой), γ_1 — угол между осью диаграмм направленности и направлением на первый минимум диаграммы направленности антенны в вертикальной плоскости (совпадающей с плоскостью векторов k_0 и k_s), γ_2 — аналогичный угол для диаграммы направленности антенны в горизонтальной плоскости (рис. 29).

В общем случае произвольной формы сечения раскрыва антенны для V (в случае $\gamma < \theta_0$) можно легко получить приближенную формулу

$$V_a \approx \frac{d^3 \gamma_{1a}^2 \gamma_{2a}}{8\theta} \quad (\theta \ll 1), \quad (12')$$

где в отличие от (12) γ_{1a} и γ_{2a} — эффективная ширина диаграммы направленности по половинной мощности в вертикальной и горизонтальной плоскостях (в (12) γ_1 и γ_2 — полуширина по первым минимумам).

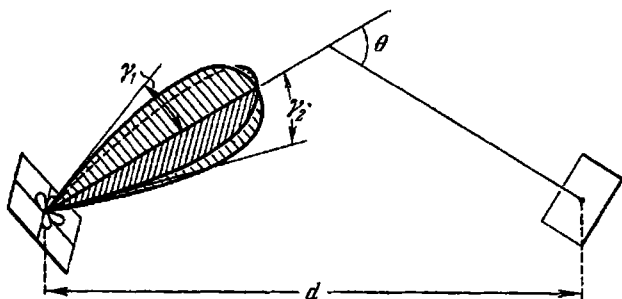


Рис. 29. К вычислению эффективного рассеивающего объема антенны с прямоугольным сечением раскрыва.

Рассмотрим пример, когда величина $K = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ лежит внутри инерционного интервала спектра флуктуаций ϵ . В этом случае

$$\Phi_\epsilon(K) = 0,033 C_\epsilon^2(K)^{-11/3}$$

и согласно (27.26)

$$\sigma_0(r') \approx 0,052 C_\epsilon^2 k^{1/3} \sin^2 \chi \left(2 \sin \frac{\theta(r')}{2} \right)^{-11/3}. \quad (13)$$

Пусть r' получает приращение $\Delta r'$ такое, что угол рассеяния θ_0 меняется на величину порядка γ , где γ — ширина диаграммы направленности. В этом случае величины $f_0(m)$ и $f_1(n)$ резко меняются от своих максимальных до минимальных значений.

Подсчитаем, насколько при этом изменится величина σ_0 . Ее относительное изменение имеет порядок

$$\left| \frac{\Delta \sigma_0}{\sigma_0} \right| \sim \frac{11}{3} \frac{\Delta \theta}{\theta_0} = \frac{11}{3} \frac{\gamma}{\theta_0}. \quad (14)$$

Следовательно, если выполняется условие

$$\gamma \ll \theta_0, \quad (15)$$

то изменение величины σ_0 несущественно и можно пользоваться формулой (11). В случае же, когда выполняется обратное соотношение

$$\gamma \gg \theta_0, \quad (16)$$

величина подынтегрального выражения в (9) меняется в большей степени из-за изменения множителя $\sigma_0(r')$, нежели из-за множителей f_0/f_1 . В этом случае эффективный рассеивающий объем ограничивается уже не шириной диаграммы направленности γ , а уменьшением интенсивности рассеяния из-за увеличения угла θ .

Дополнительные изменения $\sigma_0(r')$ могут быть вызваны изменением с высотой величины C_s^2 . Например, в случае свободной конвекции величина $C_s^2(z)$ убывает с ростом высоты z над поверхностью земли как $z^{-4/3}$ (см. гл. 1, раздел Б). В этом случае

$$\sigma_0(r') \sim z^{-5} \sim \theta^{-5}, \quad (17)$$

так как $\theta(r') \approx 4z/d$.

Таким образом, в случае широких диаграмм направленности при изменении угла рассеяния θ от своего минимального значения θ_0 на величину порядка самого θ_0 интенсивность рассеяния резко падает. Это означает, что величина эффективного рассеивающего объема в этом случае определяется не величиной γ , а величиной θ_0 .

Подставляя в (12) θ_0 вместо γ , получим

$$V_s \sim d^3 \theta_0^2 \text{ при } \theta_0 \ll \gamma; \theta_0 \ll 1. \quad (18)$$

Величина рассеивающего объема, как было выяснено выше, определяет корреляционные свойства рассеянного поля. Следовательно, радиусы корреляции рассеянных полей, а также полоса пропускания Δf будут в случае узких и широких диаграмм направленности выражаться различными формулами. Например, угловая корреляция рассеянных в двух направлениях полей распространяется до углов порядка

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{\gamma d} \quad \text{при } \gamma \ll \theta_0, \quad (19)$$

$$\Delta\theta \sim \frac{\lambda}{\theta_0 d} \quad \text{при } \gamma \gg \theta_0,$$

откуда следует, что при разное точек наблюдения перпендикулярно направлению на источник радиусы корреляции имеют порядок

величины

$$a_{\kappa} \sim \frac{\lambda}{\gamma} \quad \text{при } \gamma \ll \theta_0, \quad (20)$$

$$a_{\kappa} \sim \frac{\lambda}{\theta_0} \quad \text{при } \gamma \gg \theta_0.$$

Формулы для величины полосы пропускания Δf имеют вид

$$\Delta f \sim \frac{c}{\gamma \theta_0 d} = \frac{1}{\gamma \theta T_0} \quad \text{при } \gamma \ll \theta_0, \quad (21)$$

$$\Delta f \sim \frac{c}{\theta_0^2 d} = \frac{1}{\theta_0^2 T_0} \quad \text{при } \gamma \gg \theta_0,$$

где $T_0 = d/c$ — время распространения волны от передающего до приемного пункта.

Все формулы (19) — (21) написаны с точностью до численных коэффициентов, и некоторые из них будут уточнены ниже.

§ 29. Частотный спектр рассеянного поля

До сих пор мы ограничивались вычислением средней интенсивности рассеянного поля. Обратимся теперь к временной автокорреляционной функции и частотному спектру флуктуаций рассеянного поля. Для облегчения вычислений заметим, что формула (27.26) для эффективного поперечника рассеяния, выведенная нами при условии $L_0 \ll \sqrt{\lambda r}$ (L_0 — радиус корреляции неоднородностей среды, r — расстояние до источника или точки наблюдения), может быть получена значительно проще, если выполняется значительно более жесткое условие $L \ll \sqrt{\lambda r}$, где L — размер рассеивающего объема. Поскольку результаты в обоих случаях совпадают, при выводе выражения для временной автокорреляционной функции мы будем предполагать выполненным условие $L \ll \sqrt{\lambda r}$. В этом случае, воспользовавшись разложением

$$\exp \{ik |r - r'\} \approx \exp \{ikr - ikn_0 r'\} \quad (1)$$

для фигурирующей в (8а.25) экспоненты, где $n_0 = r/r$, а r' пробегает рассеивающий объем, и заменив в знаменателе $|r - r'| \approx r$, мы получаем

$$E_s(r) \approx \frac{k^2 e^{ikr}}{4\pi r} \int_V \varepsilon_1(r') [n [E_0(r') n]] e^{-ikn_0 r'} d^3 r'. \quad (2)$$

Считая, что падающая волна $E_0(r')$ плоская (для этого необходимо выполнение условия $L \ll \sqrt{\lambda R}$, где R — расстояние до излучателя), положим

$$E_0(r) = A_0 e^{ik_0 r}.$$

Кроме того, под знаком интеграла будем считать $n(r') = n_0$ (что законно при соблюдении условия $L \ll r$). Обозначая $[n[A_0 n]] \equiv a$ и $k_0 = km_0$, получим

$$E_s(r) \approx \frac{k^2 a e^{ikr}}{4\pi r} \int_V \varepsilon_1(r') e^{ik(m_0 - n_0)r'} d^3 r'. \quad (3)$$

E_s представляет собой комплексную амплитуду рассеянного поля, связанную с полем \mathcal{E}_s формулой

$$\mathcal{E}_s(r, t) = E_s(r, t) e^{-i\omega t}.$$

До сих пор мы явно не выписывали зависимость величин ε_1 и E_s от времени. При переходе к \mathcal{E} мы учтем и эту зависимость:

$$\mathcal{E}_s(r, t) \approx \frac{k^2 a e^{i(kr - \omega t)}}{4\pi r} \int_V \varepsilon_1(r, t) e^{ik(m_0 - n_0)r'} d^3 r'. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь временную автокорреляционную функцию рассеянного поля

$$B_g(\tau) = \langle \mathcal{E}_s(r, t) \mathcal{E}_s^*(r, t + \tau) \rangle. \quad (5)$$

Подставляя (4) и учитывая, что в случае статистически однородной и стационарной турбулентности

$$\langle \varepsilon_1(r', t) \varepsilon_1(r'', t + \tau) \rangle = B_\varepsilon(r' - r'', \tau), \quad (6)$$

получим

$$B_g(\tau) = \frac{k^4 a^2}{(4\pi r)^2} e^{i\omega\tau} \iint_V B_\varepsilon(r' - r'', \tau) e^{ik(m_0 - n_0)(r' - r'')} d^3 r' d^3 r''. \quad (7)$$

Введем в (7) вместо r'' новую переменную интегрирования $\rho = r' - r''$. Тогда подынтегральное выражение будет зависеть лишь от ρ и интегрирование по r' можно выполнить в явной форме *); оно дает величину рассеивающего объема V . Подставляя, кроме того, $a^2 = A_0^2 \sin^2 \chi$, где χ — угол между векторами A_0 и

*) Вообще говоря, пределы интегрирования по ρ зависят от r' , однако учет этого обстоятельства приводит лишь к несущественным поправкам.

\mathbf{n}_0 , получаем

$$B_g(\tau) = \frac{k^4 A_0^2 V \sin^2 \chi}{(4\pi r)^2} e^{i\omega\tau} \int_V B_\varepsilon(\rho, \tau) e^{ik(\mathbf{m}_0 - \mathbf{n}_0)\rho} d^3\rho. \quad (8)$$

Воспользуемся теперь спектральным разложением пространственно-временной корреляционной функции, введенным в гл. 1:

$$B_\varepsilon(\rho, \tau) = \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\mathbf{x}\rho + \Omega\tau)} u_\varepsilon(\mathbf{x}, \Omega) d^3\mathbf{x} d\Omega, \quad (9)$$

где $u_\varepsilon(\mathbf{x}, \Omega)$ — пространственно-временной спектр неоднородностей (четность функции u_ε как по \mathbf{x} , так и по Ω позволяет писать экспоненту вместо косинуса). Подставив (9) в (8) и вспоминая определение функции $\delta_V(\mathbf{x})$ и операции усреднения по объему $T = 8\pi^3/V$ в пространстве волновых чисел \mathbf{x} , получим формулу

$$B_g(\tau) = \frac{\pi k^4 A_0^2 V \sin^2 \chi}{2r^2} e^{i\omega\tau} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega\tau} \bar{u}_\varepsilon(\mathbf{K}, \Omega) d\Omega, \quad (10)$$

где снова обозначено $\mathbf{K} = k(\mathbf{m}_0 - \mathbf{n}_0)$ — разность волновых векторов падающей и рассеянной волн.

Производя в (10) замену переменной $\Omega' = \omega - \Omega$, можно записать $B_g(\tau)$ в виде интеграла Фурье по времени:

$$B_g(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\Omega'\tau} \frac{\pi k^4 A_0^2 V \sin^2 \chi}{2r^2} \bar{u}_\varepsilon(\mathbf{K}, \omega - \Omega') d\Omega'. \quad (11)$$

Отсюда следует, что частотный спектр рассеянного поля $W_g(\Omega)$ имеет вид

$$W_g(\Omega) = \frac{\pi k^4 A_0^2 V \sin^2 \chi}{2r^2} \bar{u}_\varepsilon(\mathbf{K}, \omega - \Omega), \quad (12)$$

т. е. функция $W_g(\Omega)$ пропорциональна пространственно-временному спектру неоднородностей диэлектрической проницаемости. При этом пространственное разложение в спектр осуществляется самим процессом рассеяния, а временное разложение — прибором, анализирующим частотный спектр рассеянного поля.

Заметим, что функция $\bar{u}_\varepsilon(\mathbf{K}, \omega - \Omega)$ отлична от нуля лишь в области небольших значений своего аргумента: $|\omega - \Omega| < \Delta\Omega$ (обычно $\Delta\Omega$ имеет порядок 10^3 гц).

Так как частота электромагнитного поля ω значительно превышает частоты флуктуаций диэлектрической проницаемости, то

функция (12) будет отлична от нуля лишь при

$$|\omega - \Omega| \lesssim \Delta\Omega. \quad (13)$$

Таким образом, спектр рассеянного поля сосредоточен вблизи несущей частоты ω и занимает область частот порядка $\Delta\Omega$.

Если же мы рассмотрим автокорреляционную функцию огибающей поля, т. е. величины E , то соответствующая формула будет отличаться от (10) лишь отсутствием множителя $e^{i\omega\tau}$ и поэтому спектр огибающей $W_E(\Omega)$ будет иметь вид

$$W_E(\Omega) = \frac{\pi k^4 A_0^2 V \sin^2 \chi}{2r^2} u_\varepsilon(\mathbf{K}, \Omega) \quad (14)$$

и в отличие от $W_g(\Omega)$ спектр огибающей $W_E(\Omega)$ сосредоточен вблизи нулевой частоты (по форме же он совпадает со спектром поля \mathcal{E}).

Рассмотрим подробнее случай «замороженной турбулентности», когда согласно (10.6) имеет место соотношение

$$u_\varepsilon(\mathbf{K}, \Omega) = \Phi_\varepsilon(\mathbf{K}) \delta(\Omega + \mathbf{K}v), \quad (15)$$

где v — скорость движения неоднородностей (скорость ветра). В (14) фигурирует не сама величина $u_\varepsilon(\mathbf{K}, \Omega)$, а величина

$$\bar{u}_\varepsilon(\mathbf{K}, \Omega) \approx \frac{1}{T} \int_T u_\varepsilon(\mathbf{K} + \boldsymbol{\kappa}, \Omega) d^3\boldsymbol{\kappa}, \quad (16)$$

где $T = \frac{8\pi^3}{V}$ — объем в пространстве волновых чисел вблизи точки $\boldsymbol{\kappa} = 0$. При вычислении (16) функцию $\Phi_\varepsilon(\mathbf{K})$, как сравнительно плавную, можно вынести за знак интеграла, и мы получаем

$$\bar{u}_\varepsilon(\mathbf{K}, \Omega) \approx \Phi_\varepsilon(\mathbf{K}) \cdot \frac{1}{T} \int_T \delta(\Omega + \mathbf{K}v + \boldsymbol{\kappa}v) d^3\boldsymbol{\kappa}. \quad (16')$$

Направим ось x_1 по вектору v , так что $v = \{v, 0, 0\}$. Тогда $\boldsymbol{\kappa}v = \kappa_1 v$. Для простоты вычислений предположим, что объем T представляет собой прямоугольный параллелепипед с одной из осей по вектору v . Тогда $T = \frac{8\pi^3}{L_1 L_2 L_3}$ и

$$\bar{u}_\varepsilon(\mathbf{K}, \Omega) \approx \Phi_\varepsilon(\mathbf{K}) \frac{L_1 L_2 L_3}{8\pi^3} \int_{-\pi/L_2}^{\pi/L_2} dx_2 \int_{-\pi/L_3}^{\pi/L_3} dx_3 \int_{-\pi/L_1}^{\pi/L_1} \delta(\Omega + \mathbf{K}v + \kappa_1 v) dx_1. \quad (16'')$$

Так как

$$\delta(\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v} + \nu\kappa_1) = \frac{1}{\nu} \delta\left(\frac{\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v}}{\nu} + \kappa_1\right),$$

то внутренний интеграл в (16'') легко вычисляется и равен

$$\int_{-\pi/L_1}^{\pi/L_1} \delta(\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v} + \kappa_1\nu) d\kappa_1 = \frac{1}{\nu} \cdot \theta\left(\frac{\pi\nu}{L_1} - |\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v}|\right), \quad (17)$$

где

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

и, следовательно,

$$\bar{u}_e(\mathbf{K}, \Omega) \approx \Phi_e(\mathbf{K}) \frac{L_1}{2\pi\nu} \theta\left(\frac{\pi\nu}{L_1} - |\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v}|\right).$$

Введем $\tau = L_1/\nu$ — время, за которое движущаяся неоднородность пересекает рассеивающий объем. Тогда, подставляя \bar{u}_e в (14), получим

$$W_E(\Omega) = \frac{\pi k^4 A_0^2 V \sin^2 \chi}{2r^2} \Phi_e(\mathbf{K}) \frac{\tau}{2\pi} \theta\left(\frac{\pi}{\tau} - |\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v}|\right). \quad (18)$$

Функция $\theta\left(\frac{\pi}{\tau} - |\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v}|\right)$ равна нулю при $|\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v}| > \frac{\pi}{\tau}$, т. е. при $\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v} > \frac{\pi}{\tau}$ и при $\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v} < -\frac{\pi}{\tau}$, иными словами, при $\Omega > -\mathbf{K}\mathbf{v} + \frac{\pi}{\tau}$ и при $\Omega < -\mathbf{K}\mathbf{v} - \frac{\pi}{\tau}$. Внутри же этого интервала, т. е. при

$$-\mathbf{K}\mathbf{v} - \frac{\pi}{\tau} < \Omega < -\mathbf{K}\mathbf{v} + \frac{\pi}{\tau}, \quad (19)$$

функция $\theta\left(\frac{\pi}{\tau} - |\Omega + \mathbf{K}\mathbf{v}|\right)$ равна единице.

Таким образом, в случае «замороженной турбулентности» спектр частот лежит вблизи частоты

$$\Omega_0 = -\mathbf{K}\mathbf{v} \quad (20)$$

и занимает полосу частот

$$\Delta\Omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} = \frac{2\pi\nu}{L_1}; \quad (21)$$

Ω_0 представляет собой доплеровский сдвиг частоты, обусловленный движением неоднородностей.

В случае, если $L_1 \rightarrow \infty$,

$$\frac{\tau}{2\pi} \theta\left(\frac{\pi}{\tau} - |\Omega + K\mathbf{v}|\right) \rightarrow \delta(\Omega + K\mathbf{v}),$$

так как интеграл от этой функции всегда равен единице, а значение ее в максимуме, равное $\tau/2\pi$, стремится к бесконечности при $L_1 \rightarrow \infty$. В случае конечного L_1 мы имеем «размазанную» δ -функцию, дающую конечную ширину для полосы частот. Форма спектра в виде единичной функции $\theta\left(\frac{\pi}{\tau} - |\Omega + K\mathbf{v}|\right)$ в нашем расчете является следствием примененной аппроксимации объема T в виде прямоугольного параллелепипеда. В действительности T является областью с «размазанными» границами, и в связи с этим вид спектра также не является столь простым, как это следует из (18). Однако, очевидно, формулы (20) и (21) сохраняют свою силу, причем (21) дает уже не точную, а эффективную ширину спектра.

В случае, если, помимо общего движения со скоростью v , имеются также относительные скорости различных рассеивателей (со средним значением, равным нулю), происходит дополнительное уширение полосы частот на величину порядка $(\Delta\Omega)' \sim \omega \frac{\delta v}{c}$, где δv — порядок величины относительных скоростей внутри рассеивающего объема. Отношение этих величин имеет порядок

$$\frac{(\Delta\Omega)'}{\Delta\Omega_0} \sim \frac{Lk\delta v}{v}. \quad (22)$$

В реальных условиях параметр $kL \gg 1$, а $\frac{\delta v}{v} \ll 1$, однако в случае турбулентных пульсаций скорости величина $\delta v/v$ обычно имеет порядок 0,1—0,3, так что отношение (22) может быть большим. Это означает, что в реальных условиях ширина спектра определяется не конечностью размеров рассеивающего объема, а относительными скоростями рассеивателей внутри него. (Этот эффект, конечно, также описывается формулой (14).)

Общее же смещение спектра на величину $\Omega_0 = -K\mathbf{v}$ имеет место во всех случаях (при наличии случайных флуктуаций скорости под \mathbf{v} следует понимать среднюю скорость движения внутри рассеивающего объема).

Более подробно вопрос о частотном спектре рассеянного сигнала в случае рассеяния на блуждающих неоднородностях исследовался в работах [66—70]. Мы подойдем к этому рассмотрению на основании общей формулы (12).

Для расчета пространственно-временной спектральной плотности $u(\mathbf{x}, \Omega)$ можно применить метод, аналогичный использованному в [70]. Ниже будет показано, что временная автокорреляционная функция огибающей рассеянного поля быстро спадает до

малых значений за столь короткое время, в течение которого скорости движения отдельных неоднородностей (которые мы теперь предполагаем различными в разных точках) можно считать постоянными. Это означает, что для достаточно малых времен τ выполняется соотношение

$$\varepsilon_1(r, t + \tau) = \varepsilon_1(r - v(r, t)\tau, t), \quad (23)$$

где $v(r, t)$ — скорость (лагранжева) того элемента среды, который в момент $(t + \tau)$ проходит через точку r .

Поскольку мы считаем τ достаточно малым, то при изменении t на величину порядка τ скорость v практически не меняется (ниже будут произведены соответствующие оценки). Поэтому в (23) мы не делаем различия между $v(r, t + \tau)$ и $v(r, t)$ и пишем $v\tau$ вместо $\int v d\tau$. Условие (23) означает консервативность переносимой турбулентностью характеристики жидкости — в данном случае диэлектрической проницаемости. Таким образом, мы пренебрегаем эффектом выравнивания неоднородностей за счет процессов молекулярной диффузии и теплопроводности за малое время (возникающие при учете этого эффекта поправки имеют тот же порядок малости, что и непостоянство локальной скорости переноса v).

Условие (23) по внешнему виду напоминает условие замороженности, но в отличие от него скорость v в (23) меняется от точки к точке и не является постоянной в течение длительных промежутков времени. Условие (23) можно назвать условием «локальной замороженности».

При подсчете пространственно-временной корреляционной функции мы будем считать, что флуктуации величин ε_1 и v статистически независимы. В действительности эти величины в локально изотропном турбулентном потоке являются некоррелированными (см. гл. 1). Если предполагать, что закон распределения ε_1, v является нормальным, то отсюда вытекает и их независимость*). Чтобы получить пространственно-временную корреляционную функцию для ε_1 , умножим равенство

$$\varepsilon_1(r + \rho, t + \tau) = \varepsilon_1(r + \rho - v(r + \rho, t)\tau, t)$$

на $\varepsilon_1(r, t)$ и произведем усреднение как по флуктуациям ε_1 , так и по флуктуациям v . Так как мы предположили независимость ε_1 и v , то эти два усреднения можно выполнить независимо. Усредняя выражение

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(r + \rho, t + \tau) \varepsilon_1(r, t) &= \\ &= \varepsilon_1(r + \rho - v(r + \rho, t)\tau, t) \varepsilon_1(r, t) \end{aligned}$$

*) Законы распределения величины ε_1 и v близки к нормальным. Что касается закона распределения для разности скоростей в двух точках, то он заведомо не является нормальным, так как $\langle (\Delta v_i)^2 \rangle \neq 0$ (см. гл. 1).

по e_1 , мы получаем (согласно определению) корреляционную функцию B_e , которая, однако, содержит еще случайный параметр v :

$$\langle e_1(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) e_1(\mathbf{r}, t) \rangle_{e_1} = B_e(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t) \tau). \quad (24)$$

Это выражение должно быть дополнительно усреднено по v :

$$B_e(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \langle \langle e_1(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t + \tau) e_1(\mathbf{r}, t) \rangle_{e_1} \rangle_v = \langle B_e(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t) \tau) \rangle_v. \quad (25)$$

Представим $B_e(\boldsymbol{\rho})$ в виде интеграла Фурье. Тогда

$$\begin{aligned} B_e(\boldsymbol{\rho}, \tau) &= \left\langle \int e^{i\mathbf{x}[\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t)\tau]} \Phi_e(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x} \right\rangle_v = \\ &= \int e^{i\mathbf{x}\boldsymbol{\rho}} \langle e^{-i\tau\mathbf{x}\mathbf{v}(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t)} \rangle_v \Phi_e(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (26)$$

Но согласно определению

$$\langle e^{i\mathbf{a}\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)} \rangle_v = \chi_{\mathbf{r}, t}(\mathbf{a}), \quad (27)$$

— характеристическая функция закона распределения вероятностей для скорости \mathbf{v} в точке \mathbf{r} в момент t . Так как мы предполагали статистическую однородность поля \mathbf{v} , то χ фактически не зависит от \mathbf{r}, t . Следовательно,

$$B_e(\boldsymbol{\rho}, \tau) = \int e^{i\mathbf{x}\boldsymbol{\rho}} \chi(-\mathbf{x}\tau) \Phi_e(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (28)$$

Взяв преобразования Фурье по $\boldsymbol{\rho}$ и τ от (28), получаем

$$u_e(\mathbf{x}, \Omega) = \frac{1}{2\pi} \Phi_e(\mathbf{x}) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\Omega\tau} \chi(-\mathbf{x}\tau) d\tau. \quad (29)$$

Формула (29) и определяет пространственно-временной спектр диэлектрической проницаемости при условии «локальной замороженности». Взяв преобразование Фурье по Ω от (29), можно получить формулу

$$\chi(-\mathbf{a}) = \frac{1}{\Phi_e(\mathbf{a}\tau^{-1})} \int u_e(\mathbf{a}\tau^{-1}, \Omega) e^{i\Omega\tau} d\Omega,$$

позволяющую построить функцию $\chi(\mathbf{a})$, если из экспериментов известна $u_e(\mathbf{x}, \Omega)$.

Рассмотрим пример, когда $\mathbf{v}(\mathbf{r}, t)$ имеет нормальный закон распределения со средним значением \mathbf{v}_0 и дисперсией каждой компоненты

$$\langle (v_i - v_{0i})^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle (\delta\mathbf{v})^2 \rangle = \frac{1}{3} \sigma_v^2$$

(здесь суммирование по i нет). В этом случае

$$\chi(\alpha) = e^{i\alpha v_0 - \frac{1}{2} \langle (\alpha(v-v_0))^2 \rangle} = e^{i\alpha v_0 - \frac{1}{6} \alpha^2 \sigma_v^2} \quad (30)$$

Подставляя (30) в (29) и выполняя интегрирование, получаем формулу

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, \Omega) = \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \frac{1}{\sqrt{2\kappa^2 \sigma_v^2/3}} \exp\left(-\frac{(\Omega + \kappa v_0)^2}{2\kappa^2 \sigma_v^2/3}\right) \quad (31)$$

Формула (31) является обобщением формулы

$$u_\varepsilon(\mathbf{x}, \Omega) = \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}) \delta(\Omega + \kappa v_0),$$

которая справедлива для чисто «замороженной» турбулентности, на случай «локально замороженной» турбулентности. В случае, если $\sigma_v^2 = 0$, (31) переходит в эту формулу.†

Из (31) следует, что эффективная ширина спектра имеет порядок

$$\sqrt{\frac{\kappa^2 \sigma_v^2}{3}} \sim \Delta\Omega.$$

Оценим время корреляции τ_0 из соотношения $\tau_0 \cdot \Delta\Omega \sim 1$, откуда $\tau_0 \sim (\kappa\sigma_v)^{-1}$. Вместо величины κ мы должны поставить L_0^{-1} , где L_0 — характерный масштаб, т. е. внешний масштаб турбулентности. Таким образом,

$$\tau_0 \sim \frac{L_0}{\sigma_v}.$$

При выводе соотношения (29) было сделано предположение, что скорость жидкого элемента можно считать постоянной за время τ . Так как время корреляции имеет порядок $\tau_0 \sim L_0/\sigma_v$, то фактически требуется, чтобы скорость жидкого элемента мало менялась за время τ_0 . Но изменение скорости жидкого элемента за время τ_0 имеет порядок [13]

$$\Delta v_{\tau_0} \sim \sqrt{\varepsilon \tau_0} \sim \sqrt{\frac{\varepsilon L_0}{\sigma_v}},$$

где ε — скорость диссипации энергии турбулентности (не смешивать с диэлектрической проницаемостью!). С другой стороны, на основании «закона 2/3» имеем $(\varepsilon L_0)^{2/3} \sim \sigma_v^2$, откуда $\Delta v_{\tau_0} \sim \sigma_v$. Требование малости изменения скорости за время τ_0 по срав-

нению со средним значением скорости v_0 принимает поэтому вид

$$\sigma_v \ll v_0. \quad (32)$$

Это условие хорошо выполняется в реальной атмосфере. Таким образом, сделанное при выводе формулы (29) предположение о постоянстве v за время τ выполняется при выполнении условия (32).

Подставляя (31) в формулу (14) (и пренебрегая различием между u и \bar{u} , подробно проанализированным выше), получим

$$W_E(\Omega) = \frac{\pi k^4 A_0^2 V \sin^2 \chi}{2r^2} \Phi_\varepsilon(\mathbf{K}) \frac{1}{\sqrt{2\pi K^2 \sigma_v^2/3}} \exp\left(-\frac{(\Omega + \mathbf{K}v_0)^2}{2K^2 \sigma_v^2/3}\right). \quad (33)$$

Из этой формулы следует, что максимум спектра лежит на доплеровской частоте $-\mathbf{K}v_0$, связанной со средним движением рассеивателей, а форма частотного спектра повторяет закон распределения вероятностей для флуктуаций компоненты скорости, направленной по вектору рассеяния \mathbf{K} .

Представляет интерес рассмотреть также частотный спектр флуктуаций интенсивности рассеянного поля. Последняя пропорциональна величине $I = \mathcal{E}\mathcal{E}^* = \mathbf{E}\mathbf{E}^*$. Используя (3), имеем

$$I(t) = \frac{k^4 A_0^2 \sin^2 \chi}{(4\pi r)^2} \iiint_{VV} \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t) \varepsilon_1(\mathbf{r}_2, t) e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} d^3r_1 d^3r_2. \quad (34)$$

Рассмотрим величину

$$B_I(\tau) = \langle (I(t + \tau) - \langle I(t + \tau) \rangle) (I(t) - \langle I(t) \rangle) \rangle = \langle I(t + \tau) I(t) \rangle - (\langle I \rangle)^2 \quad (35)$$

(в последнем равенстве использована стационарность турбулентности). В величину $\langle I(t + \tau) I(t) \rangle$, как видно из (34), входят четвертные моменты поля $\varepsilon_1(\mathbf{r}, t)$:

$$\begin{aligned} \langle I(t + \tau) I(t) \rangle &= \\ &= \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r}\right)^4 \left(\iiint_{VVV} \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t + \tau) \varepsilon_1(\mathbf{r}_2, t + \tau) \varepsilon_1(\mathbf{r}_3, t) \varepsilon_1(\mathbf{r}_4, t) \times \right. \\ &\quad \left. \times e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_4)} d^3r_1 d^3r_2 d^3r_3 d^3r_4. \right) \quad (36) \end{aligned}$$

Для вычисления (36) сделаем предположение, что четвертные моменты поля ε_1 связаны со вторыми таким же соотношением, как при нормальном законе распределения (так называемая гипотеза Миллионщикова). Если a_1, a_2, a_3, a_4 — случайные величины подчиненные четырехмерному гауссовскому закону распределения

вероятностей и $\langle a_i \rangle = 0$, то

$$\langle a_1 a_2 a_3 a_4 \rangle = \langle a_1 a_2 \rangle \langle a_3 a_4 \rangle + \langle a_1 a_3 \rangle \langle a_2 a_4 \rangle + \langle a_1 a_4 \rangle \langle a_2 a_3 \rangle.$$

Применяя это соотношение, получим

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(r_1, t+\tau) \varepsilon_1(r_2, t+\tau) \varepsilon_1(r_3, t) \varepsilon_1(r_4, t) \rangle &\equiv A(r_1, r_2, r_3, r_4, t, \tau) = \\ &= \langle \varepsilon_1(r_1, t+\tau) \varepsilon_1(r_2, t+\tau) \rangle \cdot \langle \varepsilon_1(r_3, t) \varepsilon_1(r_4, t) \rangle + \\ &+ \langle \varepsilon_1(r_1, t+\tau) \varepsilon_1(r_3, t) \rangle \cdot \langle \varepsilon_1(r_2, t+\tau) \varepsilon_1(r_4, t) \rangle + \\ &+ \langle \varepsilon_1(r_1, t+\tau) \varepsilon_1(r_4, t) \rangle \cdot \langle \varepsilon_1(r_2, t+\tau) \varepsilon_1(r_3, t) \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Применяя теперь соотношение (23), получим

$$\begin{aligned} A &= B_\varepsilon(r_1 - r_2) B_\varepsilon(r_3 - r_4) + B_\varepsilon(r_1 - r_3 - v(r_1, t) \tau) \times \\ &\quad \times B_\varepsilon(r_2 - r_4 - v(r_2, t) \tau) + \\ &\quad + B_\varepsilon(r_1 - r_4 - v(r_1, t) \tau) B_\varepsilon(r_2 - r_3 - v(r_2, t) \tau). \end{aligned} \quad (38)$$

Подставим (38) в (36). При этом, как легко видеть, первое слагаемое в (38) приводит к величине $\langle I \rangle^2$; вычитая ее из обеих частей (36), получим формулу

$$\begin{aligned} B_I(\tau) &= \langle I(t+\tau) I(t) \rangle - \langle I \rangle^2 = \\ &= \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r} \right)^4 \left\langle \left[\iint_V B_\varepsilon(r_1 - r_3 - v(r_1, t) \tau) e^{i\mathbf{K}(r_1+r_3)} d^3 r_1 d^3 r_3 \right] \times \right. \\ &\quad \times \left[\iint_V B_\varepsilon(r_2 - r_4 - v(r_2, t) \tau) e^{-i\mathbf{K}(r_2+r_4)} d^3 r_2 d^3 r_4 \right] + \\ &\quad + \left[\iint_V B_\varepsilon(r_1 - r_4 - v(r_1, t) \tau) e^{i\mathbf{K}(r_1-r_4)} d^3 r_1 d^3 r_4 \right] \times \\ &\quad \left. \times \left[\iint_V B_\varepsilon(r_2 - r_3 - v(r_2, t) \tau) e^{-i\mathbf{K}(r_2-r_3)} d^3 r_2 d^3 r_3 \right] \right\rangle_v, \end{aligned} \quad (39)$$

где скобки $\langle \rangle_v$ означают усреднение по случайному полю v .

Прежде чем выполнять это усреднение, заметим, что первое слагаемое в (39) равно нулю, если только $\mathbf{K} \neq 0$. Действительно, вводя в первом интеграле новые переменные $(r_1 - r_3)$ и $(r_1 + r_3)$ и выполняя интегрирование по переменной $(r_1 + r_3)$, которая входит лишь в $\exp(i\mathbf{K}(r_1 + r_3))$, получим $\delta_v(\mathbf{K})$. Однако при $\mathbf{K} \neq 0$ величина $\delta_v(\mathbf{K}) \approx 0$, так что первым слагаемым в (39) действительно можно пренебречь. Во втором слагаемом в (39) введем вместо r_4 новую переменную $\rho_1 = r_1 - r_4$, а вместо r_3 — переменную $\rho_2 = r_2 - r_3$. После этого получаем

$$\begin{aligned} B_I(\tau) &= \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r} \right)^4 \int_V d^3 r_1 \int_V d^3 r_2 \left\langle \int_V B_\varepsilon(\rho_1 - v(r_1, t) \tau) e^{i\mathbf{K}\rho_1} d^3 \rho_1 \times \right. \\ &\quad \left. \times \int_V B_\varepsilon(\rho_2 - v(r_2, t) \tau) e^{-i\mathbf{K}\rho_2} d^3 \rho_2 \right\rangle_v. \end{aligned} \quad (40)$$

Рассмотрим интегралы по ρ :

$$\int_V B_\varepsilon(\rho - v_1\tau) e^{iK\rho} d^3\rho = \int_V B_\varepsilon(\rho - v_1\tau) e^{iK(\rho - v_1\tau)} e^{iKv_1\tau} d^3\rho = \\ = e^{iKv_1\tau} 8\pi^3 \overline{\Phi}_\varepsilon(K),$$

где $\overline{\Phi}$ — усредненный (согласно (22.26)) по некоторому объему пространства волновых чисел спектр. Аналогично

$$\int_V B_\varepsilon(\rho_2 - v_2\tau) e^{-iK\rho_2} d^3\rho_2 = e^{-iKv_2\tau} 8\pi^3 \overline{\Phi}_\varepsilon(K),$$

и формула (40) принимает вид

$$B_I(\tau) = \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r} \right)^4 (2\pi)^6 [\overline{\Phi}_\varepsilon(K)]^2 \int_V d^3r_1 \int_V d^3r_2 \langle e^{iK[v(r_1, t) - v(r_2, t)]\tau} \rangle_V. \quad (41)$$

В отличие от формул для спектра поля, в спектр флуктуаций интенсивности входят лишь разности скоростей в двух точках. Обозначим через $v_K(r, t)$ проекцию скорости в точке r на направление K :

$$Kv = Kv_K \text{ и } \Delta v_K(r_1, r_2) = v_K(r_1, t) - v_K(r_2, t).$$

В (41) входит выражение

$$\langle e^{iK\tau \Delta v_K(r_1, r_2)} \rangle_V = \chi_{\Delta v_K(r_1, r_2)}(K\tau), \quad (42)$$

где

$$\chi_{\Delta v_K(r_1, r_2)}(\mu) \equiv \langle e^{i\mu(v_K(r_1, t) - v_K(r_2, t))} \rangle_V$$

— характеристическая функция распределения вероятностей для K -компоненты разности скоростей в двух точках r_1 и r_2 . Таким образом,

$$B_I(\tau) = \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r} \right)^4 (2\pi)^6 [\overline{\Phi}_\varepsilon(K)]^2 \int_V \int_V d^3r_1 d^3r_2 \chi_{\Delta v_K(r_1, r_2)}(K\tau). \quad (43)$$

Перейдем к частотному спектру флуктуаций интенсивности. Вычисляя преобразование Фурье по τ от (43) и учитывая, что характеристическая функция случайной величины Δv_K связана с плотностью вероятностей $P_{\Delta v_K}(u)$ формулой

$$\chi_{\Delta v_K}(\mu) = \langle e^{i\mu \Delta v_K} \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\mu u} P_{\Delta v_K}(u) du,$$

получим

$$W_I(\Omega) = \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r}\right)^4 (2\pi)^6 [\overline{\Phi}_e(\mathbf{K})]^2 \frac{1}{K} \int_V P_{\Delta v_{K(\rho)}} \left(\frac{\Omega}{K}\right) d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (44)$$

В локально однородном турбулентном потоке распределение вероятностей для разности скоростей в двух точках r_1 и r_2 зависит лишь от $r_1 - r_2$. То же, очевидно, относится и к характеристической функции этого распределения. Поэтому в (43) и (44) можно ввести новые переменные интегрирования r_1 и $\rho = r_1 - r_2$ и выполнить интегрирование по r_1 , дающее величину V . В этом случае получаем

$$B_I(\tau) = \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r}\right)^4 (2\pi)^6 [\overline{\Phi}_e(\mathbf{K})]^2 V \int_V \chi_{\Delta v_{K(\rho)}}(K\tau) d^3 \rho, \quad (43')$$

$$W_I(\Omega) = \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r}\right)^4 (2\pi)^6 [\overline{\Phi}_e(\mathbf{K})]^2 V \frac{1}{K} \int_V P_{\Delta v_{K(\rho)}} \left(\frac{\Omega}{K}\right) d^3 \rho. \quad (44')$$

Заметим, кроме того, что, полагая в (10) $\tau = 0$ и учитывая, что

$$B_g(0) = \langle I \rangle, \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_e(\mathbf{K}, \Omega) d\Omega = \Phi_e(\mathbf{K}),$$

имеем

$$\langle I \rangle = \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r}\right)^2 (2\pi)^3 \overline{\Phi}_e(\mathbf{K}) V. \quad (45)$$

Поэтому формулы (43') и (44') можно представить в виде

$$B_I(\tau) = \langle I \rangle^2 \frac{1}{V} \int_V \chi_{\Delta v_{K(\rho)}}(K\tau) d^3 \rho, \quad (43'')$$

$$W_I(\Omega) = \langle I \rangle^2 \frac{1}{KV} \int_V P_{\Delta v_{K(\rho)}} \left(\frac{\Omega}{K}\right) d^3 \rho. \quad (44'')$$

Полагая в (43'') $\tau = 0$ и учитывая, что $\chi_{\Delta v_{K(\rho)}}(0) = 1$, получаем $B_I(0) = \langle I \rangle^2$, откуда для коэффициента корреляции $b_I(\tau)$ имеем формулу

$$b_I(\tau) = \frac{B_I(\tau)}{B_I(0)} = \frac{1}{V} \int_V \chi_{\Delta v_{K(\rho)}}(K\tau) d^3 \rho. \quad (45')$$

Заметим, что величина Ω/K является тем значением K -компоненты разности скоростей, которой соответствует разность доплеровских частот, равная Ω .

В качестве грубого примера можно рассмотреть модель гауссовского распределения вероятностей для разности скоростей. В действительности, как уже отмечалось, это распределение заведомо не является гауссовским и наш пример должен лишь дать порядок входящих в (43''), (44'') величин.

Для гауссовского закона распределения

$$\chi_{\Delta v_K(\rho)}(\mu) = e^{-\frac{1}{2} \mu^2 \langle [\Delta v_K(\rho)]^2 \rangle}. \quad (46)$$

Но

$$\Delta v_K(\rho) = \frac{1}{K} \mathbf{K} \Delta \mathbf{v}(\rho) = \frac{1}{K} K_i \Delta v_i(\rho),$$

так что

$$\langle [\Delta v_K(\rho)]^2 \rangle = \frac{1}{K^2} K_i K_j D_{ij}(\rho).$$

Подставляя выражение

$$D_{ij}(\rho) = D_{ii}(\rho) \delta_{ij} + (D_{rr}(\rho) - D_{ii}(\rho)) n_i n_j,$$

где $\mathbf{n} = \rho/\rho$ (см. гл. 1), получаем

$$\begin{aligned} \langle [\Delta v_K(\rho)]^2 \rangle &= D_{ii}(\rho) + [D_{rr}(\rho) - D_{ii}(\rho)] \cos^2 \vartheta = \\ &= D_{ii}(\rho) \sin^2 \vartheta + D_{rr}(\rho) \cos^2 \vartheta, \end{aligned}$$

где ϑ — угол между векторами \mathbf{K} и ρ . Подставляя также

$$D_{rr}(\rho) = C^2 \varepsilon^2 / \rho^2 \text{ и } D_{ii} = \frac{4}{3} D_{rr}$$

(формулы, справедливые в инерционном интервале), получаем

$$\chi_{\Delta v_K(\rho)}(\mu) = e^{-\frac{\mu^2}{2} C^2 (\varepsilon \rho)^{2/3} \left[1 + \frac{1}{3} \sin^2 \vartheta \right]}. \quad (46')$$

Подставим (46') в (45') и введем сферические координаты с центром внутри рассеивающего объема и полярной осью вдоль вектора \mathbf{K} . Тогда

$$b_I(\tau) = \frac{1}{V} \int_V e^{-\frac{1}{2} \tau^2 K^2 C^2 (\varepsilon \rho)^{2/3} \left[1 + \frac{1}{3} \sin^2 \vartheta \right]} \rho^2 \sin \vartheta d\rho d\varphi d\vartheta. \quad (47)$$

Пусть размер рассеивающего объема V имеет порядок $V^{1/3} = L$, так что $\rho \leq V^{1/3}$. В случае, если $\tau^2 K^2 C^2 (\varepsilon V^{1/3})^{2/3} \ll 1$, или $\tau^2 \ll \tau_0^2$, где

$$\tau_0 = \frac{1}{CK (\varepsilon)^{1/3} V^{1/3}}, \quad (48)$$

имеем $b_I(\tau) \approx 1$. В случае же, когда $\tau^2 \gg \tau_0^2$ или $\tau^2 K^2 C^2 (\epsilon L)^{1/2} \gg 1$, интегрирование по ρ в (47) можно распространить от 0 до ∞ . В этом случае простое, но довольно громоздкое вычисление приводит к формуле

$$b_I(\tau) = \left(\frac{N\tau_0}{\tau}\right)^9, \quad \text{где } N = \sqrt[9]{\frac{83 \cdot 3^2 \pi^{1/2}}{2^{1/2}}} = 2,35. \quad (49)$$

Таким образом, величина τ_0 является временем корреляции флуктуаций интенсивности рассеянного сигнала. В отличие от времени корреляции для флуктуаций поля (эта величина, определенная выше, имела порядок L_0/σ_v) величина τ_0 определяется лишь локальными характеристиками флуктуаций (а именно скоростью диссипации энергии ϵ). Это связано с тем, что спектр флуктуаций интенсивности определяется лишь разностями доплеровских частот различных рассеивателей, а следовательно, только разностями их скоростей. В связи с этим условия, при которых применимы формулы (43), (44), могут оказаться более широкими, чем это имело место для соответствующих формул (28), (31), определивших спектр флуктуаций поля.

Действительно, τ_0 имеет порядок величины $\lambda/\Delta v(L)$, где $\Delta v(L)$ — порядок разности скоростей на краях рассеивающего объема. Так как при достаточно больших размерах объема V величина $\Delta v(L) \sim \sigma_v$, то время корреляции флуктуаций интенсивности в λ/L_0 раз меньше времени корреляции флуктуаций поля (напоминаем, что L_0 — радиус корреляции флуктуаций скорости). Поэтому условие постоянства скорости движения жидкого элемента за время τ_0 , положенное в основу проведенного вывода, выполняется лучше, чем условие (32).

Изменение скорости движения за время τ_0 имеет порядок $\sqrt{\epsilon\tau_0}$. Однако эта величина теперь должна быть малой не по сравнению со скоростью движения рассеивателей, а по сравнению с характерной разностью их скоростей. Последняя величина имеет порядок $(\epsilon L)^{1/2}$. Требуя выполнения неравенства $\sqrt{\epsilon\tau_0} \ll (\epsilon L)^{1/2}$ и подставляя выражение (48) для τ_0 , получим условие

$$(KL)^{1/2} \gg 1 \quad \text{или} \quad \theta^{1/2} \gg (kL)^{-1/2} \quad (50)$$

(θ — угол рассеяния), при выполнении которого можно пользоваться принципом «локальной замороженности». Условие (50) не содержит характеристик турбулентности и выполняется почти во всех реально осуществляемых опытах.

Заметим, что при исследованиях турбулентности формулы (48), (49) можно попытаться использовать для определения величины ϵ из наблюдений за спектром интенсивности рассеянного сигнала

[69], хотя при этом лучше исходить из формул (43^а), (44^а), не основанных на предположении о нормальном распределении разности скоростей.

Следует подчеркнуть, что выражение (48) для времени корреляции флуктуаций интенсивности не зависит (с точностью до численного множителя) от принятого закона распределения разности скоростей. В то же время асимптотическое поведение функции $b_I(\tau)$ при $\tau \gg \tau_0$, выражаемое формулой (49), является следствием принятого при вычислениях нормального закона распределения для Δv .

§ 30. Рассеяние импульса

В современной технике связи передаваемые сигналы очень часто имеют импульсный характер. Поэтому представляет интерес рассмотреть вопрос о рассеянии импульсов. Мы рассмотрим задачу о рассеянии прямоугольного импульса с огибающей

$$A(t) = \begin{cases} A_0 & \text{при } |t| < \frac{T}{2}, \\ 0 & \text{при } |t| > \frac{T}{2}. \end{cases} \quad (1)$$

Для упрощения задачи рассмотрим случай скалярного уравнения в приближении дифракции Фраунгофера. Затем результаты будут распространены и на более общий случай.

Уравнение, определяющее рассеяние в скалярном приближении, имеет вид

$$\Delta \mathcal{E}_1 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \mathcal{E}_1}{\partial t^2} = -k^2 \varepsilon_1(\mathbf{r}) \mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t), \quad (2)$$

причем

$$\mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t) = A\left(t - \frac{m\mathbf{r}}{c}\right) e^{i(k\mathbf{r} - \omega t)}, \quad (3)$$

где функция $A(t)$ определена равенством (1). В (3) $\mathbf{m} = \mathbf{k}/k$ — единичный вектор в направлении распространения падающей плоской волны. Функция $\mathcal{E}_0(\mathbf{r}, t)$ отлична от нуля в слое

$$ct - \frac{cT}{2} \leq m\mathbf{r} \leq ct + \frac{cT}{2}$$

толщиной cT , движущемся в направлении \mathbf{m} со скоростью c . Решением уравнения (2) является, как известно, функция

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \varepsilon_1(\mathbf{r}') \mathcal{E}_0\left(\mathbf{r}', t - \frac{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}{c}\right) \frac{d^3 r'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}. \quad (4)$$

В зоне френгоферовой дифракции можно, как это уже неоднократно делалось выше, положить $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = r - n r' + \dots$, где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ — единичный вектор, направленный из центра рассеивающего объема на точку наблюдения, и r — расстояние от центра рассеивающего объема до этой точки. В знаменателе (4) можно считать $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \approx r + \dots$ В этом случае

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{k^2}{4\pi r} \int_V \varepsilon_1(\mathbf{r}') \mathcal{E}_0\left(\mathbf{r}', t - \frac{r}{c} + \frac{n r'}{c}\right) d^3 r', \quad (5)$$

и после подстановки выражения (3) мы получаем

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{k^2}{4\pi r} e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \int_V \varepsilon_1(\mathbf{r}') e^{ik(m-n)r'} A\left[t - \frac{r}{c} - \frac{(m-n)r'}{c}\right] d^3 r'. \quad (6)$$

Обозначим через $V'(t)$ общую часть (пересечение) рассеивающего объема V и движущегося плоского слоя

$$-r + ct - \frac{cT}{2} < (m-n)r < ct + \frac{cT}{2} - r;$$

$V'(t) = 0$, если эти области не перекрываются, и $V'(t) = V$, если рассеивающий объем целиком лежит внутри указанного слоя. В общем случае $V'(t)$ равно той части рассеивающего объема, которая лежит внутри слоя.

Используя обозначение $V'(t)$, можно переписать (6) в виде

$$\mathcal{E}_1(\mathbf{r}, t) = \frac{k^2 A_0}{4\pi r} e^{-i\omega\left(t - \frac{r}{c}\right)} \int_{V'(t)} \varepsilon_1(\mathbf{r}') e^{ik(m-n)r'} d^3 r'. \quad (7)$$

Огибающая рассеянного поля (которая теперь зависит от t) дается формулой

$$E_1(\mathbf{r}, t) = \frac{k^2 A_0}{4\pi r} \int_{V'(t)} \varepsilon_1(\mathbf{r}') e^{ik(m-n)r'} d^3 r'. \quad (8)$$

Это выражение отличается от аналогичной формулы (3.29) лишь заменой V на $V'(t)$.

Рассмотрим теперь среднее значение потока рассеянной энергии, пропорциональное $\overline{E_1 E_1^*}$. Так как в случае монохроматической волны это выражение было пропорционально V , то в нашем случае оно будет пропорционально $V'(t)$. Следовательно, зависимость интенсивности рассеяния от времени определяется лишь этим множителем (так как остальные величины от времени не за-

висят)*. Заменяя в выражении (45.29) для $I = \overline{E_1 E_1^*}$ величину V на $V'(t)$ и учитывая множитель $\sin^2 \chi$, появляющийся при переходе от случая скалярной волны к электромагнитному полю, будем иметь

$$I(t) = \left(\frac{k^2 A_0 \sin \chi}{4\pi r} \right)^2 (2\pi)^3 \overline{\Phi}_e(\mathbf{K}) V'(t). \quad (9)$$

Исследуем более подробно функцию $V'(t)$. Введем внутри рассеивающего объема систему координат с осью z , направленной по вектору $\mathbf{m} - \mathbf{n}$. Тогда $\mathbf{m} - \mathbf{n} = \left\{ 0, 0, 2 \sin \frac{\theta}{2} \right\}$ и уравнения границ слоя

$$ct - r - \frac{cT}{2} < (\mathbf{m} - \mathbf{n}) r' < ct - r + \frac{cT}{2}$$

имеют вид

$$z'_1 = \frac{ct - r + \frac{1}{2} cT}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \quad z'_2 = \frac{ct - r - \frac{1}{2} cT}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (10)$$

Толщина этого слоя

$$h = z'_1 - z'_2 = \frac{cT}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \quad (11)$$

его скорость движения

$$v = \frac{dz'_1}{dt} = \frac{c}{2 \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (12)$$

Таким образом, чтобы найти среднюю форму принятого сигнала, мы должны рассмотреть равномерное движение в направлении вектора $\mathbf{m} - \mathbf{n}$ со скоростью $v = \frac{c}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$ плоского слоя толщины h .

Средняя мощность принятого сигнала пропорциональна (если пренебречь общим запаздыванием сигнала) той части рассеивающего объема V , которая находится в данный момент внутри этого слоя. Если толщина слоя h превосходит размер H (в направлении вектора $\mathbf{m} - \mathbf{n}$) объема V , то некоторое время весь рассеивающий объем будет находиться внутри слоя, следовательно, принятый сигнал

*) Некоторое различие имеется в операции усреднения функции по пространству волновых чисел, приводящей от Φ к $\overline{\Phi}$, так как в нашем случае объем волнового пространства, по которому производится усреднение, является непрерывным. Но так как $\overline{\Phi} \approx \Phi$, т. е. операция усреднения мало меняет функцию $\Phi(\mathbf{K})$, то отмеченное различие несущественно.

будет иметь плоскую (в среднем) вершину. При этом время нарастания (и спада) импульса определяется размером H и скоростью движения v плоскости z'_2 , т. е. временем прохождения фронта импульса через рассеивающий объем

$$\tau_{\text{фр}} = \frac{H}{v} = \frac{2H}{c} \sin \frac{\theta}{2}. \quad (13)$$

Это время тем меньше, чем меньше угол рассеяния θ . Легко понять (рис. 30), что плоская (в среднем) часть импульса длится время $T - \tau_{\text{фр}}$, а весь импульс имеет длительность $T + \tau_{\text{фр}}$.

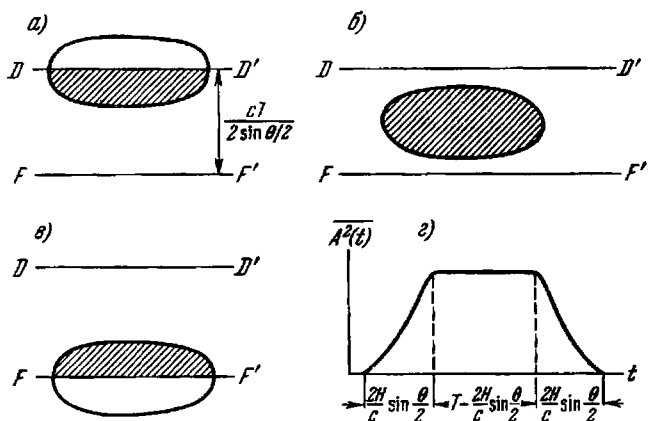


Рис. 30. Три последовательных момента прохождения импульса через рассеивающий объем (а, б, в) и средняя форма рассеянного сигнала (г) в случае, когда вертикальный размер рассеивающего объема меньше, чем $cT/2\sin \frac{\theta}{2}$.

На рис. 30 схематически изображено построение формы импульса в случае, когда $h > H$, а на рис. 31 — в случае $h < H$. При $H > h$ весь рассеивающий объем ни в один из моментов времени целиком не принимает участия в рассеянии и поэтому амплитуда принятого сигнала падает по сравнению с предыдущим случаем. Общая длительность импульса в этом случае также равна $T + \tau_{\text{фр}}$, но эта величина может уже значительно превышать первоначальную длительность T . Искажения формы импульса малы, если выполняется соотношение $\tau_{\text{фр}} \ll T$, и велики, если величины $\tau_{\text{фр}}$ и T сравнимы или если $\tau_{\text{фр}} > T$. Поэтому естественно назвать величину $1/\tau_{\text{фр}}$ «полосой пропускания» канала связи,

работающего на рассеянии,

$$\Delta f = \frac{c}{2H \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (14)$$

Заметим, что Δf совпадает с величиной максимальной расстройки, при которой еще наблюдается корреляция интенсивности двух рассеянных сигналов, имеющих частоты f и $f + \Delta f$.

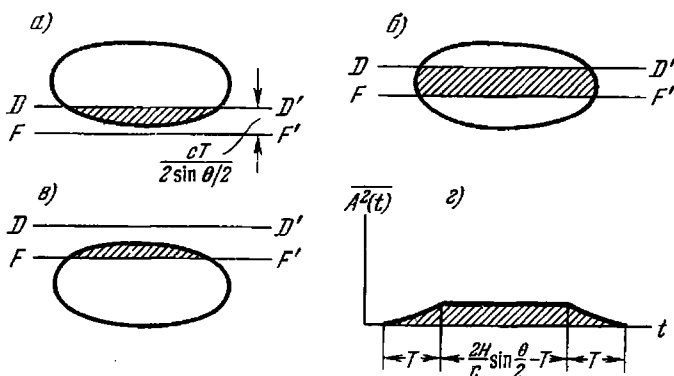


Рис. 31. Три последовательных момента прохождения импульса через рассеивающий объем (а, б, в) и средняя форма рассеянного сигнала (г) в случае, когда вертикальный размер рассеивающего объема больше, чем $\frac{cT}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$.

В случае «узких» диаграмм направленности $H \approx \alpha R = \frac{1}{2} \alpha d$ (α — угловая ширина диаграммы направленности) и

$$\Delta f = \frac{c}{\alpha d \sin \frac{\theta}{2}} \approx \frac{2c}{\alpha \theta d}. \quad (15)$$

Для «широких» диаграмм направленности $H \approx \theta R = \frac{1}{2} \theta d$ и

$$\Delta f = \frac{c}{\theta d \sin \frac{\theta}{2}} \approx \frac{2c}{\theta^2 d}. \quad (16)$$

При обычных значениях α , θ и d величина Δf может достигать значений нескольких мегагерц, что удовлетворительно даже для целей телевидения.

Остановимся на физической интерпретации выведенных формул. Представим себе, что в точке P_1 (рис. 32) находится передаю-

щая, а в точке Π_2 — приемная антенна. Если в некоторый момент t из Π_1 излучается «мгновенный» сигнал, то в момент $t + \tau$ в Π_2 будут поступать сигналы, рассеянные теми рассеивателями, сумма расстояний которых до Π_1 и Π_2 равна $c\tau$. Все эти рассеиватели располагаются на поверхности эллипсоида вращения с фокусами в Π_1 и Π_2 , величина большой полуоси которого равна $a = \frac{1}{2}c\tau$ (ось проходит через Π_1 и Π_2), малая полуось равна $b = \frac{1}{2}\sqrt{c^2\tau^2 - d^2}$ (d — расстояние между Π_1 и Π_2). Пусть рассеивающий объем, малый по сравнению с d , находится вблизи конца малой полуоси эллипсоида. Угол рассеяния θ связан с d и τ соотношением $c\tau =$

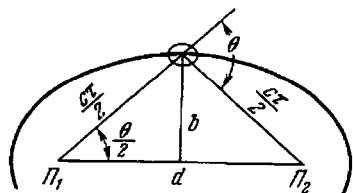


Рис. 32. К построению формы рассеянного сигнала.

$= \frac{d}{\cos \frac{\theta}{2}}$. В момент $\tau' > \tau$ в точку

Π_2 будут проходить волны от рассеивателей, расположенных на поверхности большего эллипсоида с полуосями $a' = \frac{1}{2}c\tau'$ и

$b' = \frac{1}{2}\sqrt{c^2\tau'^2 - d^2}$. При этом по-

верхность эллипсоида, пересекающая рассеивающий объем, переместится вверх. Скорость движения этой поверхности равна

$$v = \frac{db}{d\tau} = \frac{c}{2} \frac{c\tau}{\sqrt{c^2\tau^2 - d^2}} = \frac{c}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$$

и совпадает с (12).

В случае, если объем V достаточно мал, в его пределах поверхность эллипсоида можно заменить касательной плоскостью, и мы приходим к изложенным выше результатам. Приведенные рассуждения поясняют, какие видоизменения надо внести в наши результаты, если отказаться от приближения френгоферовой дифракции. В этом случае все построения формы импульса, приведенные выше, останутся в силе, если плоские границы движущегося слоя заменить поверхностями увеличивающегося со временем эллипсоида.

§ 31. Корреляционные функции рассеянного поля

Выше мы уже рассматривали качественно вопрос о корреляции рассеянных под различными углами полей. Здесь мы рассмотрим этот вопрос более подробно [71, 72]. Напряженность рассеянного

поля в точке \mathbf{r}_1 определяется формулой (8а.25):

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_1) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \frac{e^{ik|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'|} \varepsilon_1(\mathbf{r}') [\mathbf{n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') [E_0(\mathbf{r}') \mathbf{n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')]] d^3r', \quad (1)$$

где $\mathbf{n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}')/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}'|$. Рассеянное поле в точке \mathbf{r}_2 имеет вид

$$\mathbf{E}_s(\mathbf{r}_2) = \frac{k^2}{4\pi} \int_V \frac{e^{ik|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}''|}}{|\mathbf{r}_2-\mathbf{r}''|} \varepsilon_1(\mathbf{r}'') [\mathbf{n}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') [E_0(\mathbf{r}'') \mathbf{n}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'')]] d^3r''. \quad (2)$$

Вычисляя среднее значение от произведения (1) на комплексно сопряженное к (2) выражение, получим

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}_2) \rangle &= \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \iiint_V \frac{e^{ik[|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'| - |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}''|]}}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'| |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}''|} B_\varepsilon(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \times \\ &\times [\mathbf{n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') [E_0(\mathbf{r}') \mathbf{n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}')]] \times \\ &\times [\mathbf{n}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') [E_0^*(\mathbf{r}'') \mathbf{n}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'')]] d^3r' d^3r''. \quad (3) \end{aligned}$$

Как и при выводе выражения для средней интенсивности рассеяния, будем считать, что $E_0(\mathbf{r})$ имеет вид

$$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = A_0(\mathbf{r}) e^{ik|\mathbf{R}-\mathbf{r}|}, \quad (4)$$

где \mathbf{R}_0 — точка расположения излучателя, а $A_0(\mathbf{r})$ — амплитуда, зависящая от диаграммы направленности передающей антенны. Выражение (3) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{E}_s(\mathbf{r}_1) \mathbf{E}_s^*(\mathbf{r}_2) \rangle &= \\ &= \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \iiint_V \frac{\exp\{ik[|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'| - |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}''| + |\mathbf{R}_0-\mathbf{r}'| - |\mathbf{R}_0-\mathbf{r}''|]\}}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}'| \cdot |\mathbf{r}_2-\mathbf{r}''|} B_\varepsilon(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') \times \\ &\times \{A_0(\mathbf{r}') - \mathbf{n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}') (A_0(\mathbf{r}') \mathbf{n}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}'))\} \times \\ &\times \{A_0(\mathbf{r}'') - \mathbf{n}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}'') (A_0(\mathbf{r}'') \mathbf{n}(\mathbf{r}_2, \mathbf{r}''))\} d^3r' d^3r''. \quad (5) \end{aligned}$$

Введем новые переменные интегрирования $\mathbf{x} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')$, $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{r}' - \mathbf{r}''$ и координату $\mathbf{R} = \frac{1}{2}(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2)$ для центра отрезка, соединяющего точки наблюдения \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 , а также $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$.

Выразим все величины, входящие в (5), через новые переменные:

$$r_1 - r' = R - x + \frac{1}{2}(r - \rho); \quad r_2 - r'' = R - x - \frac{1}{2}(r - \rho),$$

$$|r_1 - r'| = \sqrt{(R - x)^2 + (R - x)(r - \rho) + \frac{1}{4}(r - \rho)^2}.$$

Разлагая модули этих выражений в ряд по формуле бинома, получим

$$|r_1 - r'| = |R - x| + \frac{R - x}{|R - x|} \cdot \frac{r - \rho}{2} + \frac{1}{2|R - x|} \left[\left(\frac{r - \rho}{2} \right)^2 - \left(\frac{R - x}{|R - x|} \cdot \frac{r - \rho}{2} \right)^2 \right] + \dots, \quad (6)$$

$$|r_2 - r''| = |R - x| - \frac{R - x}{|R - x|} \frac{r - \rho}{2} + \frac{1}{2|R - x|} \left[\left(\frac{r - \rho}{2} \right)^2 - \left(\frac{R - x}{|R - x|} \cdot \frac{r - \rho}{2} \right)^2 \right] + \dots, \quad (7)$$

$$|r_1 - r'| - |r_2 - r''| = \frac{R - x}{|R - x|} (r - \rho) + O\left(\frac{|r - \rho|^3}{|R - x|^3}\right), \quad (8)$$

где $O(x)$ — члены порядка, не превосходящего x . Аналогично

$$|R_0 - r'| = \left| R_0 - x - \frac{1}{2} \rho \right| = |R_0 - x| - \frac{R_0 - x}{|R_0 - x|} \cdot \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2|R_0 - x|} \left[\left(\frac{\rho}{2} \right)^2 - \left(\frac{R_0 - x}{|R_0 - x|} \cdot \frac{\rho}{2} \right)^2 \right] + \dots,$$

$$|R_0 - r''| = \left| R_0 - x + \frac{1}{2} \rho \right| = \quad (9)$$

$$= |R_0 - x| + \frac{R_0 - x}{|R_0 - x|} \frac{\rho}{2} + \frac{1}{2|R_0 - x|} \left[\left(\frac{\rho}{2} \right)^2 - \left(\frac{R_0 - x}{|R_0 - x|} \frac{\rho}{2} \right)^2 \right] + \dots,$$

$$|R_0 - r'| - |R_0 - r''| = - \frac{R_0 - x}{|R_0 - x|} \rho + O\left(\frac{\rho^3}{|R_0 - x|^3}\right). \quad (10)$$

Введем

$$m(R_0, x) = \frac{x - R_0}{|x - R_0|} \quad (11)$$

— единичный вектор, направленный из точки R_0 в x . Выведем условия, при которых в формулах (8) и (10) можно ограничиться первыми членами.

Величины (8) и (10), умноженные на k , входят в (5) в экспоненту. Величина ρ ограничена неравенством $\rho \leq L_0$, где L_0 — радиус корреляции флуктуаций ε , так как при больших значениях ρ подынтегральное выражение в (5) близко к нулю за счет множителя $B_\varepsilon(\rho)$.

Величина $|R - x|$ имеет порядок R . Поэтому условие, при котором в (10) можно ограничиться первым членом, имеет вид

$$\frac{kL_0^3}{R^2} \ll 1 \quad \text{или} \quad L_0^3 \ll \lambda R^2. \quad (12)$$

Условие (12) хорошо выполняется в реальных условиях при дальнем тропосферном распространении радиоволн.

Из (8), помимо того же условия (12), вытекает также ограничение на величину допустимого разнесения r точек наблюдения:

$$r^3 \ll \lambda R^2. \quad (13)$$

Но выше, при качественном анализе, было найдено, что при поперечном разнесении точек наблюдения радиус корреляции r_0 имеет порядок $r_0 \sim \lambda R/L$, где L — размер рассеивающего объема. Подставляя в (13) вместо r указанное значение r_0 , получим условие:

$$\lambda^2 R \ll L^3, \quad (14)$$

которое также не является существенным ограничением в практически важных случаях.

Величины $|r_1 - r'|$ и $|r_2 - r''|$ в знаменателе (5) можно заменить первыми членами разложений (6) и (7) при выполнении очевидных условий $r \ll R$, $L_0 \ll R$. При выполнении этих же условий можно считать $n(r_1, r') \approx n(r_2, r'') \approx n(R, x)$. Кроме того, если функция $A_0(r)$ мало меняется при изменении r на величину порядка L_0 , то можно считать $A_0(r') \approx A_0(r'') = A_0(x)$. Так как функция A_0 существенно изменяется на расстоянии порядка L (величина рассеивающего объема как раз и определяется той областью, где A_0 отлична от нуля), то последнее условие имеет вид

$$L_0 \ll L. \quad (15)$$

При выполнении всех перечисленных условий можно записать (5) в виде

$$\begin{aligned} \langle E_s(r_1) E_s^*(r_2) \rangle &= \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \iint_V \frac{e^{ik \cdot (m(R, x) - n(R, x))\rho + ikn(R, x)r}}{|R - x|^2} \times \\ &\quad \times A_0^2(x) \sin^2 \chi(x) B_z(\rho) d^3\rho d^3x. \end{aligned} \quad (16)$$

Выражение (16) отличается от аналогичной формулы (17.26) помимо множителя $c/8\lambda$ множителем $\exp(iknr)$, с которым и связана зависимость корреляционной функции рассеянного поля от r . Выполняя в (16) интегрирование по ρ и снова вводя обозначение

$\mathbf{K}(\mathbf{x}) = k(m(\mathbf{R}, \mathbf{x}) - n(\mathbf{R}, \mathbf{x}))$, получим

$$\langle E_s(\mathbf{r}_1) E_s^*(\mathbf{r}_2) \rangle \equiv B_E(\mathbf{r}) = (2\pi)^3 \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \int_V \frac{e^{ikn(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \mathbf{r}}}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}|^2} \times \\ \times A_0^2(\mathbf{x}) \sin^2 \chi(\mathbf{x}) \overline{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{K}(\mathbf{x})) d^3x. \quad (17)$$

При выводе формулы (17) мы предполагали, что флуктуации диэлектрической постоянной статистически однородны, т. е. $B_\varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') = B_\varepsilon(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')$. Это предположение, по существу, не является необходимым. Все вычисления можно провести и в том случае, когда статистические характеристики флуктуаций плавно меняются, т. е. корреляционная функция $B_\varepsilon(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')$ имеет вид (см. раздел А)

$$B_\varepsilon(\mathbf{r}'; \mathbf{r}'') = \overline{\varepsilon}_1^2 \left(\frac{\mathbf{r}' + \mathbf{r}''}{2} \right) b_\varepsilon(\mathbf{r}' - \mathbf{r}''), \quad (18)$$

где $b_\varepsilon(\rho)$ — нормированная ($b_\varepsilon(0) = 1$) корреляционная функция флуктуаций ε_1 , зависящая лишь от разности аргументов $\rho = \mathbf{r}' - \mathbf{r}''$, а $\overline{\varepsilon}_1^2(\mathbf{r})$ — зависящий от координат средний квадрат флуктуаций. В этом случае и спектральная плотность флуктуаций зависит от координат:

$$\Phi_\varepsilon(\mathbf{r}, \mathbf{x}) = C_\varepsilon^2(\mathbf{r}) \Phi_\varepsilon^{(0)}(\mathbf{x}). \quad (19)$$

В рассматриваемом случае проведенный выше вывод формулы (17) не изменяется и следует лишь заменить $\overline{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{K}(\mathbf{x}))$ на выражение (19)

$$B_E(\mathbf{r}) = (2\pi)^3 \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \int_V \frac{e^{ikn(\mathbf{R}, \mathbf{x}) \mathbf{r}}}{|\mathbf{R} - \mathbf{x}|^2} A_0^2(\mathbf{x}) \sin^2 \chi(\mathbf{x}) \times \\ \times C_\varepsilon^2(\mathbf{x}) \overline{\Phi}_\varepsilon^{(0)}(\mathbf{K}(\mathbf{x})) d^3x. \quad (20)$$

Чтобы более ясно представить физический смысл формулы (20), предположим, что вектор $\mathbf{n}(\mathbf{R}, \mathbf{x})$ можно разложить в ряд по степеням \mathbf{x}/R

$$\mathbf{n}(\mathbf{R}, \mathbf{x}) = \mathbf{n}_0 - \frac{1}{R}(\mathbf{x} - \mathbf{n}_0(n_0 \mathbf{x})) + O\left(\frac{x^2}{R^2}\right). \quad (21)$$

Здесь $\mathbf{n}_0 = \mathbf{R}/R$ — единичный вектор, направленный из центра рассеивающего объема в центр отрезка, соединяющего обе точки наблюдения. Последним членом в (21) можно пренебречь при условии (более жестком, чем (13)):

$$\frac{L^2 r}{R^2 \lambda} \ll 1. \quad (22)$$

В этом случае

$$n(R, x) r \cong n_0 r - \frac{1}{R} (x r - (n_0 r) (n_0 x)) = n_0 r - x \Delta n, \quad (23)$$

где

$$\Delta n = \frac{r - n_0 (n_0 r)}{R} = \frac{[n_0 [r n_0]]}{R} \quad (24)$$

— разность двух единичных векторов, направленных из центра рассеивающего объема в точки наблюдения.

Как и при рассмотрении средней интенсивности рассеяния положим

$$A_0^2(x) = A_{0/0}^2(m(x)),$$

где функция $f(m(x))$ описывает диаграмму направленности излучателя. Кроме того, введем под интеграл (20) функцию $f_1^2(n(x))$, описывающую диаграммы направленности приемных антенн*), но пределы интегрирования распространим на бесконечную область. В результате получаем

$$B_E(r) = (2\pi)^3 \left(\frac{k^3 A_0}{4\pi}\right)^2 e^{ikn_0 r} \int e^{-ik\Delta n x} \frac{f_0^2(m(x)) f_1^2(n(x))}{|R - x|^2} \times \\ \times C_z^2(x) \overline{\Phi}_z^{(0)}(K(x)) d^3x. \quad (25)$$

Множитель $\exp(ikn_0 r)$ перед интегралом обусловлен систематической разностью фаз между рассеянными полями в точках $R \pm \frac{1}{2}r$, если эти точки расположены на разных расстояниях от рассеивающего объема (лишь в этом случае $rn_0 \neq 0$). Интеграл в (25) имеет вид преобразования Фурье (при $x = k\Delta n$) от произведения

$$F(x) = f_0^2(m(x)) f_1^2(n(x)) C_z^2(x) \overline{\Phi}_z^{(0)}(K(x)) |R - x|^{-2}. \quad (26)$$

Прежде всего следует отметить, что этот интеграл зависит лишь от $\Delta n(r)$, но не от самого значения r . Таким образом, корреляция рассеянных полей в двух точках не изменится (за исключением фазового множителя $\exp(ikn_0 r)$), если эти точки перемещать вдоль лучей, проходящих через центр рассеивающего объема (при таких перемещениях $\Delta n(r)$ не изменяется). Иными словами, корреляция рассеянных полей зависит лишь от угла, под которым

*) При более строгом рассмотрении следовало бы вводить в отдельности каждую из диаграмм направленности приемных антенн. Если, однако, считать, что диаграммы направленности идентичны и мало меняются при изменении угла на величину порядка L_0/R (L_0 — радиус корреляции флуктуаций), то мы придем к результату, указанному в тексте.

видны точки наблюдения из центра рассеивающего объема. Однако это справедливо лишь в случае выполнения неравенства (22) и не имеет места в общем случае, когда формула (23) несправедлива.

Радиус корреляции флуктуаций определяется размерами той области, в которой заметно отлична от нуля функция $F(x)$ (26).

Пусть размер этой области имеет порядок a . В этом случае величина Δn , при которой еще наблюдается корреляция рассеянных полей, связана с a соотношением

$$k\Delta n_0 \sim \frac{2\pi}{a}, \text{ т. е. } \Delta n_0 \sim \frac{\lambda}{a}.$$

Эта формула совпадает с приведенной в § 28.

Величина a может в основном определяться или диаграммами направленности антенн (это — рассмотренный в § 28 случай острых диаграмм), или убыванием с высотой множителя $C_e^2(x)$, или уменьшением $\Phi_e^0(K(x))$ при увеличении угла рассеяния. Вообще говоря, все факторы действуют совместно.

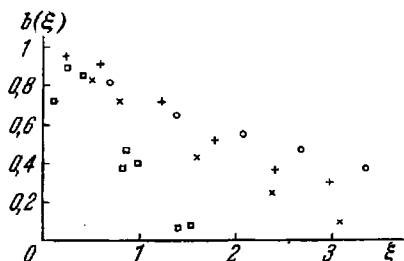
Рис. 33. Корреляционные функции рассеянного поля при поперечном разнесении точек наблюдения в случае широких диаграмм направленности.

По оси абсцисс отложено расстояние между точками наблюдения, отнесенное к величине λ/θ , где λ — длина волны и θ — угол рассеяния. На графике сведены результаты различных экспериментов:

○ — $\lambda = 3$ м, $\theta = 6$ м, $d = 1200$ км; + — $\lambda = 3$ см, $d = 120$ км; × — $\lambda = 10$ см, $d = 190$ км; □ — $\lambda = 30$ см, $\theta = 3$ м, $d = 365$ км.

Радиус корреляции флуктуаций возрастает при уменьшении эффективного рассеивающего объема: при сужении диаграмм направленности антенны, при более резком убывании интенсивности флуктуаций диэлектрической проницаемости с высотой.

На рис. 33 приведены экспериментальные данные о корреляции рассеянного поля при разнесении точек наблюдения поперек трассы. Отобраны эксперименты, в которых угловая ширина диаграмм направленности превышала угол рассеяния. В этом случае эффективный рассеивающий объем имеет размер (в направлении поперек трассы) порядка $a \sim \theta R$, откуда $\Delta n_0 \sim \frac{\lambda}{\theta R}$. Но $\Delta n \approx \frac{S}{R}$, где S — расстояние между точками наблюдения. Следовательно, радиус корреляции флуктуаций S_0 имеет порядок λ/θ , а величина $\frac{S}{S_0} = \frac{\theta S}{\lambda}$ или пропорциональная ей величина $\xi = \frac{1}{2} kS\theta$ является безразмерным универсальным аргументом корреляционной функции. Если откладывать коэффициент корреляции $b(\xi)$ как функцию величины ξ , то вид функции не должен зависеть от конкрет-



ных значений k и θ , имевших место в опытах. Это хорошо подтверждается приведенными на рис. 33 экспериментальными данными.

Конкретные расчеты по формуле (25) производились в работах [71, 72] для различных моделей флуктуаций и их зависимости от высоты.

Следует заметить, что вид корреляционных функций сильно зависит от распределения интенсивности флуктуаций по высоте. Поэтому на основании сравнения экспериментально определенных корреляционных функций с теоретическими едва ли можно надеяться получить какие-либо сведения о спектре турбулентных флуктуаций ϵ . Более того, так как в реальной атмосфере распределение интенсивности флуктуаций с высотой может, вообще говоря, иметь самый причудливый вид и сильно меняться от случая к случаю, то экспериментально измеренные корреляционные функции рассеянного поля в деталях могут отличаться друг от друга весьма значительно. Можно лишь утверждать, что в случае «широких» диаграмм направленности радиус корреляции при поперечном (по отношению к трассе) разнесении антенн имеет порядок λ/θ , а при разнесении вдоль трассы λ/θ^2 .

§ 32. Законы распределения вероятностей рассеянного поля

Рассеянное поле (в приближении однократного рассеяния, которое мы здесь рассматриваем) является интегралом от произведения детерминированной функции и случайной функции $\epsilon_1(\mathbf{r}')$. Размеры рассеивающего объема значительно превосходят радиус корреляции L_0 флуктуаций ϵ_1 . В этом случае закон распределения рассеянного поля близок к нормальному в силу предельной теоремы теории вероятностей*). Более того, можно считать, что случайное поле $E_s(\mathbf{r})$ является гауссовским.

Для упрощения дальнейших выкладок мы рассмотрим случай скалярного уравнения в приближении дифракции Фраунгофера. В этом случае рассеянное поле имеет вид (2.29)

$$E_s(\mathbf{r}) = \frac{k^2 A_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int_V \epsilon_1(\mathbf{r}') e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}'} d^3r' \quad (1)$$

(начало координат помещено в центре рассеивающего объема). Нас будут интересовать законы распределения вероятностей для значений рассеянного поля в двух точках \mathbf{r}_1 и \mathbf{r}_2 . Так как E_s —

*) Для применения предельных теорем требуется выполнение некоторых специальных условий (в частности, достаточно быстро должна убывать корреляционная функция флуктуаций ϵ_1). Не вдаваясь в этот вопрос подробно, будем считать необходимые условия выполненными.

комплексная величина, то в каждой из точек \mathbf{r}_1 , \mathbf{r}_2 мы имеем две случайные величины:

$$C(\mathbf{r}_i) + iD(\mathbf{r}_i) = E_s(\mathbf{r}_i).$$

Так как величины C_1, D_1, C_2, D_2 подчинены четырехточечному нормальному закону распределения, то для нахождения его параметров, как известно, достаточно найти матрицу вторых моментов для величин C_i, D_i .

Рассмотрим сначала $\langle E_s(\mathbf{r}_1) E_s(\mathbf{r}_2) \rangle$. Используя (1) и предполагая статистическую однородность флуктуаций ε , имеем

$$\langle E_s(\mathbf{r}_1) E_s(\mathbf{r}_2) \rangle = \left(\frac{k^2 A_0}{4\pi r} \right)^2 e^{2ikr} \iint_V B_\varepsilon(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'') e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')} d^3r' d^3r''. \quad (2)$$

В (2) можно ввести переменные интегрирования $(\mathbf{r}' - \mathbf{r}'')$ и $(\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')$. Интеграл по $(\mathbf{r}' + \mathbf{r}'')$ дает функцию $\delta_V(\mathbf{K})$, которая для достаточно больших V близка к нулю при $\mathbf{K} \neq 0$. Таким образом, можно считать, что

$$\langle E_s(\mathbf{r}_1) E_s(\mathbf{r}_2) \rangle = 0. \quad (3)$$

Подставляя $E_s(\mathbf{r}_i) = C(\mathbf{r}_i) + iD(\mathbf{r}_i)$, получаем

$$\begin{aligned} \langle [C(\mathbf{r}_1) + iD(\mathbf{r}_1)] [C(\mathbf{r}_2) + iD(\mathbf{r}_2)] \rangle &= \\ &= [\langle C(\mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_2) \rangle - \langle D(\mathbf{r}_1) D(\mathbf{r}_2) \rangle] + \\ &\quad + i[\langle C(\mathbf{r}_1) D(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle C(\mathbf{r}_2) D(\mathbf{r}_1) \rangle] = 0, \end{aligned}$$

откуда

$$\langle C(\mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle D(\mathbf{r}_1) D(\mathbf{r}_2) \rangle, \quad (4)$$

$$\langle C(\mathbf{r}_1) D(\mathbf{r}_2) \rangle = -\langle C(\mathbf{r}_2) D(\mathbf{r}_1) \rangle. \quad (5)$$

Найдем теперь $\langle E_s(\mathbf{r}_1) E_s^*(\mathbf{r}_2) \rangle = B_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$. Эта величина была вычислена в предыдущем параграфе. Подставляя $E_s = C + iD$, получаем с учетом (4) и (5)

$$\begin{aligned} B_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) &= \langle [C(\mathbf{r}_1) + iD(\mathbf{r}_1)] [C(\mathbf{r}_2) - iD(\mathbf{r}_2)] \rangle = \\ &= 2\langle C(\mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_2) \rangle + 2i\langle D(\mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_2) \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\alpha = \langle C(\mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle D(\mathbf{r}_1) D(\mathbf{r}_2) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Re} B_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (6)$$

$$\beta = \langle D(\mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_2) \rangle = -\langle C(\mathbf{r}_1) D(\mathbf{r}_2) \rangle = \frac{1}{2} \operatorname{Im} B_E(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (7)$$

Рассмотрим, прежде всего, закон распределения поля в одной точке r . Полагая в (4) и (5) $r_1 = r_2 = r$, получаем

$$\langle C^2 \rangle = \langle D^2 \rangle, \quad \langle C(r) D(r) \rangle = 0.$$

Из (6) при $r_1 = r_2$ имеем

$$\langle C^2 \rangle = \langle D^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |E|^2 \rangle.$$

Таким образом, величины C и D распределены по нормальному закону с равными дисперсиями и не коррелированы. Следовательно, плотность вероятностей распределения величин $P(C, D)$ равна

$$P(C, D) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(C^2+D^2)}, \quad (8)$$

где

$$\sigma^2 = \langle C^2 \rangle = \frac{1}{2} \langle |E|^2 \rangle.$$

Перейдем к законам распределения амплитуды рассеянного поля $A = \sqrt{C^2 + D^2}$ и фазы $\varphi = \arctg \frac{D}{C}$:

$$P(A, \varphi) = P(C, D) \frac{d(C, D)}{d(A, \varphi)} = \frac{A}{2\pi\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}. \quad (9)$$

Из (9) следует, что фаза рассеянного поля распределена равномерно в интервале $(-\pi, \pi)$, а амплитуда распределена по закону Релея:

$$P(A) = \frac{A}{\sigma^2} e^{-\frac{A^2}{2\sigma^2}}. \quad (10)$$

Воспользуемся формулой (10) для подсчета флуктуаций мощности рассеянного поля. Последняя пропорциональна величине $I = A^2$. Используя (10), легко подсчитать, что $\langle A^2 \rangle = 2\sigma^2$ и $\langle A^4 \rangle = 8\sigma^4$. Следовательно,

$$\langle [I - \langle I \rangle]^2 \rangle = \langle A^4 \rangle - \langle A^2 \rangle^2 = 4\sigma^4 = \langle A^2 \rangle^2,$$

или

$$\langle [I - \langle I \rangle]^2 \rangle = \langle I \rangle^2. \quad (11)$$

Таким образом, среднеквадратическое значение флуктуаций мощности рассеянного сигнала равно среднему значению мощности, т. е. вся принятая мощность имеет «флуктуационный» характер.

Обратимся теперь к закону распределения вероятностей для совокупности величин $C(\mathbf{r}_1)$, $D(\mathbf{r}_1)$, $C(\mathbf{r}_2)$, $D(\mathbf{r}_2)$. Предполагая, что интенсивности рассеяния в обеих точках одинаковы, т. е. что

$$\langle C^2(\mathbf{r}_1) \rangle = \langle C^2(\mathbf{r}_2) \rangle = \sigma^2,$$

получим для матрицы вторых моментов

$$\begin{pmatrix} \langle C(\mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_1) \rangle & \langle C(\mathbf{r}_1) D(\mathbf{r}_1) \rangle & \langle C(\mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_2) \rangle & \langle C(\mathbf{r}_1) D(\mathbf{r}_2) \rangle \\ \langle D(\mathbf{r}_1) C(\mathbf{r}_1) \rangle & \dots & \dots & \dots \\ \langle C(\mathbf{r}_2) C(\mathbf{r}_1) \rangle & \dots & \dots & \dots \\ \langle D(\mathbf{r}_2) C(\mathbf{r}_1) \rangle & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sigma^2 & 0 & \alpha & -\beta \\ 0 & \sigma^2 & \beta & \alpha \\ \alpha & \beta & \sigma^2 & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 & \sigma^2 \end{pmatrix} = (B_{ik}). \quad (12)$$

Характеристическая функция закона распределения вероятностей для C_1 , D_1 , C_2 , D_2 равна

$$\chi(u_1, u_2, u_3, u_4) = e^{-\frac{1}{2} \sum \sum B_{ik} u_i u_k}, \quad (13)$$

а плотность вероятности определяется обратной квадратичной формой.

Если в законе распределения для C_1 , D_1 , C_2 , D_2 перейти к новым переменным — амплитудам $A(\mathbf{r}_j) = \sqrt{C^2(\mathbf{r}_j) + D^2(\mathbf{r}_j)}$ и фазам $\varphi(\mathbf{r}_j) = \text{arctg} \frac{D(\mathbf{r}_j)}{C(\mathbf{r}_j)}$, и затем полученный совместный закон распределения амплитуд и фаз проинтегрировать по φ_1 , φ_2 , то мы получим совместный закон распределения для $A(\mathbf{r}_1)$, $A(\mathbf{r}_2)$. Результат такого преобразования хорошо известен [73]:

$$P(A_1, A_2) = \frac{A_1 A_2}{\sigma^4 (1-p^2)} I_0 \left(\frac{p A_1 A_2}{\sigma^2 (1-p^2)} \right) \exp \left(-\frac{A_1^2 + A_2^2}{2\sigma^2 (1-p^2)} \right). \quad (14)$$

Здесь $p = \frac{\sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sigma^2}$, $I_0(x)$ — функция Бесселя от мнимого аргумента.

Зная $P(A_1, A_2)$, можно найти ковариацию флуктуаций амплитуды в точках r_1 и r_2 [73]:

$$\langle A(r_1) A(r_2) \rangle = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} A_1 A_2 P(A_1, A_2) dA_1 dA_2 = \\ = \sigma^2 [2E(p) - (1 - p^2) K(p)]. \quad (15)$$

Здесь $K(p)$, $E(p)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода.

Найдем также коэффициент корреляции флуктуаций амплитуды

$$b_A(r_1, r_2) = \frac{\langle A_1 A_2 \rangle - \langle A \rangle^2}{\langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2}.$$

Воспользовавшись разложениями в ряды функций E и K , легко получить формулу

$$b_A = \frac{\pi}{4 - \pi} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 p^2 + \left(\frac{1}{2.4} \right)^2 p^4 + \dots \right] = \\ = 0,921 p^2 + 0,058 p^4 + 0,014 p^6 + \dots \quad (16)$$

Таким образом, коэффициент корреляции для флуктуаций амплитуды выражается через квадрат модуля корреляционной функции флуктуаций поля

$$p^2 = \frac{B_E(r) B_E^*(r)}{B_E(0) B_E^*(0)} = b_E(r) b_E^*(r). \quad (17)$$

Имея конкретные выражения для $b_E(r)$, легко по (16) найти соответствующее значение $b_A(r)$.

§ 33. Распространение ультракоротких радиоволн в тропосфере

В этом параграфе мы сопоставим экспериментальные данные о дальнем тропосферном распространении УКВ с теорией рассеяния турбулентными неоднородностями тропосферы.

Прежде всего произведем сравнение наблюдаемых значений мощности сигнала с величиной, рассчитанной на основании теории рассеяния. При этом мы будем пользоваться простейшим вариантом формулы (28.26), считая, что плотность потока рассеянной энергии S дается формулой

$$S \approx \frac{S_0 \alpha_0 V}{r^2}, \quad (1)$$

где S_0 — плотность потока энергии падающей волны, V — величина рассеивающего объема, r — расстояние от его центра до точки наблюдения,

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2} k^4 \overline{\Phi_\epsilon(K)} \sin^2 \chi \quad (2)$$

— эффективный поперечник рассеяния из единицы рассеивающего объема в единичный телесный угол.

Считая, что $K = 2k \sin \frac{\theta}{2}$ (θ — угол рассеяния) лежит внутри инерционного интервала турбулентности, имеем

$$\Phi_\epsilon(K) = 0,033 C_\epsilon^2 K^{-11/3} \left(\frac{2\pi}{L_0} < 2k \sin \frac{\theta}{2} < \frac{2\pi}{l_0} \right), \quad (3)$$

так что [74]

$$\sigma_0(\theta) = 0,052 k^{11/3} C_\epsilon^2 \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-11/3} \sin^2 \chi. \quad (4)$$

Сравнение с экспериментальными данными удобно производить не для величины S , а для принятой за счет рассеяния мощности

$$P_s = AS = \frac{S_0 \sigma_0 VA}{r^2}, \quad (5)$$

где A — эффективная площадь приемной антенны. В свою очередь

$$S_0 = \frac{P_0 G_0}{4\pi R_0^2}, \quad (6)$$

где P_0 — излучаемая мощность, R_0 — расстояние от излучателя до центра рассеивающего объема и G_0 — усиление (по мощности) излучающей антенны. Подставляя (6) в (5), получаем

$$\frac{1}{N} \equiv \frac{P_s}{P_0} = \frac{\sigma_0 V A G_0}{4\pi r^2 R_0^2}. \quad (7)$$

Величина N носит название «потерь передачи».

Вместо N иногда удобнее пользоваться отношением мощности, принятой за счет рассеяния, к мощности, которая была бы принята при тех же антеннах и аппаратуре в свободном пространстве. Если расстояние от передающей до приемной антенны равно d (обычно $d \approx r + R_0$), то мощность, принятая в свободном пространстве $P_{сп}$, равна

$$P_{сп} = \frac{P_0 G_0 A}{4\pi d^2}. \quad (8)$$

Сравнивая это выражение с (7), найдем

$$\frac{P_s}{P_{\text{сн}}} = \frac{\varepsilon_0 V}{R_0^2}, \quad R_* = \frac{rR}{d} \approx \frac{rR_0}{r + R_0}. \quad (9)$$

В (9) явно не фигурируют параметры применяемых антенн, что удобно для сравнения различных экспериментов. Однако величина рассеивающего объема V зависит от углов раствора диаграмм направленности применяемых антенн.

В случае, когда ширина диаграммы направленности мала по сравнению с углом рассеяния θ и $\theta \ll 1$,

$$V \approx \frac{d^2 \gamma_1^2 \gamma_2}{8\theta} \quad (10)$$

(см. § 28), где γ_1 — эффективная ширина диаграммы направленности в вертикальной плоскости, γ_2 — то же в горизонтальной плоскости, причем предполагается идентичность принимающей и передающей антенн.

Коэффициент усиления G для остронаправленных антенн связан с γ_1 , γ_2 приближенным соотношением $G = 4\pi/\gamma_1\gamma_2$ (отношение полного телесного угла 4π к телесному углу $\gamma_1\gamma_2$, в котором сосредоточено излучение). Поэтому, если принять $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$, то

$$V \approx 5,6 \frac{d^3}{\theta G^{3/2}}. \quad (10')$$

Величина A связана с G общим соотношением (вытекающим из термодинамических соображений [75])

$$\lambda^2 G = 4\pi A.$$

Используя это соотношение и (10'), получим для входящего в (7) произведения

$$VAG_0 \approx 0,44d^3\lambda^2 \sqrt{\frac{G}{\theta}}.$$

Таким образом, величина P_s/P_0 возрастает при увеличении коэффициентов усиления обеих антенн как \sqrt{G} , в то время как при передаче в свободном пространстве $P_{\text{сн}}/P_0 \sim G^2$. Этот эффект носит название падения усиления антенн при дальнем тропосферном распространении и хорошо изучен экспериментально. Он является прямым следствием того факта, что рассеянная мощность пропорциональна объему, участвующему в рассеянии.

Используя формулы (9), (10) и (4), можно по экспериментально измеренным значениям $P_s/P_{\text{сн}}$ и известным для экспериментов

значениям θ , G и т. д. установить необходимое значение величины C_ϵ , входящей в выражение для спектральной плотности флуктуаций ϵ .

Обработка результатов таких экспериментов (см., например, [76, 77]) приводит к значениям $C_\epsilon = (4 \cdot 10^{-9} \div 1,5 \cdot 10^{-7}) \text{ см}^{-1/2}$, необходимым для объяснения реально наблюдаемых уровней полей при дальнем тропосферном распространении УКВ. Если ввести величину $C_n = 2C_\epsilon$, характеризующую флуктуации показателя преломления n ($n^2 = \epsilon$), то необходимые значения C_n составляют $0,002 \div 0,080 \text{ N-ед/см}^{1/2}$ ($1 \text{ N-единица} = 10^{-6}$). Прямые измерения флуктуаций показателя преломления, выполненные при помощи рефрактометров [35, 61], приводят к значениям C_n порядка $0,020 \text{ N-ед/см}^{1/2}$.

Более многочисленные измерения флуктуаций температуры в тропосфере после пересчета на значения C_n приводят к значениям $0,001 \div 0,020 \text{ N-ед/см}^{1/2}$. Сопоставление приведенных значений C_n с экспериментами по дальнему тропосферному распространению УКВ приводит к выводу, что эффект рассеяния радиоволн турбулентными неоднородностями спо-

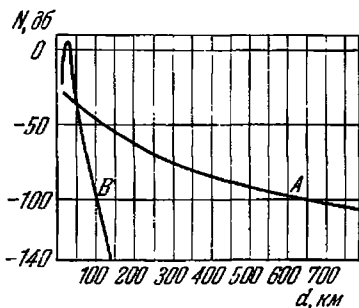


Рис. 34. Зависимость интенсивности сигнала от расстояния при дальнем тропосферном распространении (A) и соответствующая кривая, рассчитанная по дифракционным формулам (B).

собен объяснить «слабую компоненту» принимаемого сигнала, наблюдающуюся большую часть времени. По-видимому, более редкие и интенсивные поля при дальнем распространении УКВ могут быть обусловлены и другими механизмами распространения (атмосферные волноводы, отражение от слоев атмосферы с сильными градиентами показателя преломления и т. д.).

Рассмотрим также зависимость интенсивности рассеянного поля от расстояния. На рис. 34 приведены значения $N = 10 \lg \frac{P_s}{P_{\text{сп}}}$ в зависимости от расстояния d [78], полученные экспериментально в различных работах (кривая A), и кривая B, рассчитанная по дифракционным формулам. Кривая A приблизительно соответствует закону $P_s/P_{\text{сп}} \sim d^{-6}$.

Найдем теперь эту зависимость, исходя из теоретических соображений. Подставляя в (9) выражения (4) и (10'), получим

$$\frac{P_s}{P_{\text{сп}}} = \frac{0,29k^{1/2} d^2 C_\epsilon^2(z)}{G^{1/2} R^2 \theta^{1/2}} \quad (11)$$

Величина R пропорциональна d , так что $d^3/R^2 \sim d$. Угол рассеяния θ также связан с d . Если a — радиус Земли, то $\theta \approx d/a$. Таким образом, $d^3 R^{-2} \theta^{-1/2} \sim d^{-11/2}$. Однако величина $C_\varepsilon^2(z)$ также зависит от d . Действительно, z (высота рассеивающего объема) связана с d и a соотношением

$$z \approx \frac{d^2}{8a}.$$

Величина же C_ε^2 зависит от высоты. В дневных условиях, когда хорошо оправдывается схема свободной конвекции (см. гл. 1),

$$C_\varepsilon^2(z) \sim z^{-1/2} \sim d^{-1/2}.$$

Следовательно,

$$\frac{P_s}{P_{\text{сп}}} \sim d^{-2/2} = d^{-1,33},$$

что находится в хорошем согласии с экспериментальными данными по дальнему тропосферному распространению УКВ.

Наконец, рассмотрим зависимость мощности рассеянного поля от частоты. Согласно (4) она определяется лишь множителем $k^{1/2}$, т. е. $P_s/P_{\text{сп}} \sim \lambda^{-1/2}$. Однако большинство экспериментов свидетельствует о том, что эта величина скорее пропорциональна первой степени длины волны. Был поставлен специальный эксперимент, описанный в [35], когда одновременно на двух частотах (417 и 2290 Мгц) из одного и того же рассеивающего объема принимался рассеянный сигнал (для этого диаграммы направленности всех антенн были сделаны идентичными). В описываемом эксперименте отношение величин $P_s/P_{\text{сп}}$, полученных на двух частотах, прямо позволяло определить зависимость интенсивности рассеяния от частоты. Было выяснено, что примерно в 99% случаев показатель степени в формуле $P_s/P_{\text{сп}} \sim \lambda^\alpha$ превышает значение $(-\frac{1}{3})$, в 50% случаев его значение больше, чем $+1$, и в 1% больше, чем $+2$. Среднее значение этого показателя степени близко к $+1$. Таким образом, частотная зависимость интенсивности сигнала при дальнем тропосферном распространении УКВ не согласуется с теорией рассеяния на турбулентных неоднородностях.

Резюмируя, можно сказать, что явление рассеяния радиоволн турбулентностью атмосферы, несомненно, играет определенную роль в явлении дальнего тропосферного распространения, так как наблюдаемые уровни сигнала (точнее, слабая компонента сигнала, существующая большую часть времени) хорошо соответствуют экспериментально исследованному уровню флуктуаций показателя преломления.

Теория рассеяния хорошо объясняет такие эффекты, как быстрые замирания сигнала, падение усиления антенн, зависимость от расстояния и некоторые другие. В то же время имеются факты, которые не находят объяснения в рамках теории рассеяния (зависимость от частоты), что свидетельствует о наличии одновременно действующих других механизмов дальнего тропосферного распространения.

Б. РАССЕЯНИЕ ЗВУКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ

Рассеяние звуковых волн в турбулентном потоке во многом аналогично рассеянию электромагнитных волн. Скорость распространения звука зависит от температуры и от скорости ветра. Обе эти величины испытывают флуктуации, обусловленные турбулентностью, что и приводит к рассеянию. Рассеяние звука в турбулентной атмосфере рассматривалось А. М. Обуховым [79] в 1941 г. В дальнейшем появилось большое количество работ по этому вопросу [80—86], в которых проводилось уточнение постановки задачи*). Наконец, в работах [87, 88] это явление было детально изучено экспериментально.

§ 34. Вывод уравнений распространения звука в турбулентной атмосфере

Распространение звука в турбулентной среде описывается уравнениями гидродинамики. Если пренебрегать диссипативными процессами при распространении звука, то уравнением движения будет являться уравнение Эйлера

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i}. \quad (1)$$

К этому уравнению добавляется уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \mathbf{v}) = 0. \quad (2)$$

Распространение звука является адиабатическим процессом. Поэтому третье уравнение имеет вид

$$\frac{dS}{dt} = \frac{\partial S}{\partial t} + \mathbf{v} \text{grad} S = 0, \quad (3)$$

*) В большинстве ранних работ по рассеянию звука в турбулентной атмосфере исходили из слишком грубых исходных уравнений. Этот вопрос был окончательно выяснен в работах Крейчана [85] и Моница [86].

где S — энтропия. Для идеального газа

$$S = C_V \ln p - C_p \ln \rho, \quad (4)$$

где C_V и C_p — удельные теплоемкости при постоянных объеме и давлении.

Уравнение (2) может быть представлено в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \rho + \rho \operatorname{div} \mathbf{v} = 0$$

или, после деления на ρ ,

$$\frac{\partial \ln \rho}{\partial t} + \mathbf{v} \operatorname{grad} \ln \rho = - \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (2a)$$

Из уравнений (3) и (4) мы имеем ($\gamma = C_p/C_V$)

$$\frac{d \ln p}{dt} = \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln \rho}{dt}. \quad (3a)$$

Подставляя (3a) в (2a), получим

$$\frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} = - \operatorname{div} \mathbf{v}. \quad (5)$$

Кроме того, преобразуем последний член в правой части уравнения (1):

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{p}{\rho} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} = \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i},$$

где $c^2 = \gamma RT = \gamma \frac{p}{\rho}$ — квадрат скорости звука, который мы считаем заданной функцией координат и времени. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = - v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{c^2}{\gamma} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i}. \quad (6)$$

Уравнения (5) и (6) образуют замкнутую систему относительно функций p , \mathbf{v} .

Положим $v_i = \xi_i + u_i$, где ξ_i — акустическая скорость и u_i — заданная скорость турбулентного движения. Мы будем считать, что $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, т. е. турбулентное движение несжимаемо. Положим также $p = p_0 + p_a$, где p_0 — постоянное внешнее давление и p_a — акустическое давление. Тогда

$$\frac{1}{\gamma} \ln p = \frac{1}{\gamma} \ln \left[p_0 \left(1 + \frac{p_a}{p_0} \right) \right] = \frac{1}{\gamma} \ln p_0 + \frac{1}{\gamma} \ln \left(1 + \frac{p_a}{p_0} \right).$$

Считая, что $|p_a/p_0| \ll 1$, положим $\ln(1 + \frac{p_a}{p_0}) \approx \frac{p_a}{p_0}$ и введем величину

$$\Pi = \frac{p_a}{\gamma p_0} = \frac{p_a}{\rho_0 c_0^2}, \quad (7)$$

пропорциональную акустическому давлению. Так как мы предполагаем, что $p_0 = \text{const}$, то

$$\frac{1}{\gamma} \frac{\partial \ln p}{\partial x_i} = \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \quad \text{и} \quad \frac{1}{\gamma} \frac{d \ln p}{dt} = \frac{d \Pi}{dt}.$$

Наконец, будем считать, что температура T испытывает флуктуации, и положим $T = T_0 + T'$, где $T_0 = \text{const}$. Тогда

$$c^2 = c_0^2 \left(1 + \frac{T'}{T_0}\right), \quad \text{где} \quad c_0^2 = \gamma R T_0 = \text{const}. \quad (8)$$

Подставляя все указанные величины в (5) и (6) и линеаризуя получающиеся уравнения относительно акустических величин, получим *)

$$\frac{\partial \xi_i}{\partial t} = -c_0^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - c_0^2 \frac{T'}{T_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} - u_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} - \xi_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad (9)$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial t} = -\frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} - u_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k}. \quad (10)$$

В дальнейшем мы будем считать, что акустические величины Π и ξ_i зависят от времени лишь посредством множителя $\exp(-i\omega t)$. Функции u и T' также зависят от времени, однако мы будем предполагать, что все характерные частоты их спектра малы по сравнению с ω . В этом случае при решении задачи мы можем считать u , T' не зависящими от времени и ввести эту зависимость в окончательные результаты (подробнее этот вопрос обсуждался в разделе А для электромагнитных волн).

Заменяя в (9), (10) $\frac{\partial}{\partial t}$ на $(-i\omega)$, получим

$$i\omega \xi_i = c_0^2 \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + c_0^2 \frac{T'}{T_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + u_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \xi_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k}, \quad (11)$$

$$i\omega \Pi = \frac{\partial \xi_k}{\partial x_k} + u_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k}. \quad (12)$$

*) Мы отбрасываем все члены уравнения, содержащие лишь u , так как они должны скомпенсироваться в силу уравнений движения для u .

Взяв дивергенцию уравнения (11) и подставляя ее в (12), получим

$$i\omega\Pi = \frac{1}{i\omega} \left[c_0^2 \Delta\Pi + c_0^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{T'}{T_0} \frac{\partial\Pi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial x_i} \left(u_k \frac{\partial \xi_i}{\partial x_k} + \xi_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] + u_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k}. \quad (13)$$

Чтобы исключить из (13) акустическую скорость ξ , снова воспользуемся уравнением (11). При этом мы можем взять лишь первый член в правой части (11), так как учет остальных членов после подстановки в (13) приводит к величинам второго порядка малости по u , T' . Умножая, кроме того, (13) на $(-i\omega)$, получим

$$c_0^2 \Delta\Pi + \omega^2 \Pi = -i\omega u_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} - c_0^2 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{T'}{T_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) + \frac{ic_0^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_k \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right]. \quad (14)$$

Рассмотрим члены правой части (14), содержащие u . Используя уравнение $\partial u_k / \partial x_k = 0$, можно внести величину u_k под знак производной

$$\begin{aligned} A &= -i\omega u_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} + \frac{ic_0^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_k \frac{\partial^2 \Pi}{\partial x_i \partial x_k} + \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] = \\ &= \frac{ic_0^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] - \frac{\omega^2}{c_0^2} (u_i \Pi) \right\}. \end{aligned}$$

Используя тождество

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(u_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \right) - u_i \Delta \Pi,$$

получим

$$A = \frac{ic_0^2}{\omega} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left[u_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \right] - \frac{ic_0^2}{\omega} \frac{\partial}{\partial x_i} \left[u_i \left(\Delta \Pi + \frac{\omega^2}{c_0^2} \Pi \right) \right].$$

Но, как видно из уравнения (14), выражение $\Delta \Pi + \frac{\omega^2}{c_0^2} \Pi$ линейно по малым величинам u , T' , следовательно, последнее слагаемое в выражении для A имеет второй порядок малости и его можно отбросить.

Учитывая, что

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left[u_k \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} + u_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \right] = 2 \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(u_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \right),$$

окончательно запишем уравнение (14) в виде ($k = \frac{\omega}{c_0}$)

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{T'}{T_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{i\omega} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(u_i \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \right). \quad (15)$$

Уравнение (15), правая часть которого выписана с точностью до членов первого порядка по u , T' , описывает распространение звука в атмосфере с флуктуирующими значениями температуры и скорости ветра [86]. Так как уравнение (15) линейно, то такому же уравнению удовлетворяет и сама величина акустического давления p_a , отличающаяся от Π лишь постоянным множителем.

Заметим, что после того, как из уравнения (15) определена величина Π , акустическая скорость ξ может быть найдена из уравнения (11), в котором сохранен лишь первый член справа (учет остальных слагаемых приводит к величинам второго порядка малости по u , T').

Вектор плотности потока энергии определяется через комплексные величины p_a , ξ :

$$S = \text{Re } p_a \cdot \text{Re } \xi. \quad (16)$$

Выражая p_a и ξ через Π , легко получить формулу

$$S = \frac{\rho_0 c_0^3}{2k} \text{Im} [\Pi \nabla \Pi + \Pi^* \nabla \Pi]. \quad (17)$$

Нас будет интересовать среднее за период одного колебания T значение $S_{\text{ср}}$:

$$S_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T S(t) dt.$$

Так как $\Pi \sim e^{-i\omega t}$, то величина $\Pi \nabla \Pi$ содержит множитель $e^{-2i\omega t}$, который после усреднения по времени дает нуль. В то же время $\Pi^* \nabla \Pi$ от времени не зависит и не меняется после усреднения. Следовательно,

$$S_{\text{ср}} = \frac{\rho_0 c_0^3}{2k} \text{Im} (\Pi^* \nabla \Pi). \quad (18)$$

В дальнейшем мы не будем писать индекс «ср».

§ 35. Эффективный поперечник рассеяния

Найдем выражение для рассеянного поля. Для этого положим в (15.34)

$$\Pi = \Pi_0 + \Pi_s,$$

где Π_0 — падающая волна, удовлетворяющая уравнению $\Delta \Pi_0 + k^2 \Pi_0 = 0$, и Π_s — рассеянное поле. Так как рассеянное поле

Π_s зависит линейно от u , T' , то в правой части (15.34) можно положить $\Pi = \Pi_0$. Таким образом, мы получаем уравнение

$$\Delta \Pi_s + k^2 \Pi_s = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{T'}{T_0} \frac{\partial \Pi_0}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{i\omega} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(u_i \frac{\partial \Pi_0}{\partial x_j} \right), \quad (1)$$

описывающее однократное рассеяние звука. Решение (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \Pi_s(\mathbf{r}) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_V d^3 r' \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\frac{T'(\mathbf{r}')}{T_0} \frac{\partial \Pi_0(\mathbf{r}')}{\partial x'_i} + \frac{2}{i\omega} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(u_i(\mathbf{r}') \frac{\partial \Pi_0(\mathbf{r}')}{\partial x'_j} \right) \right]. \quad (2) \end{aligned}$$

Как мы видели в предыдущем разделе, выражение для эффективного поперечника рассеяния можно получить, вычисляя интеграл (2) в приближении дифракции Фраунгофера (для этого необходимо выполнение условий $L \ll r$, $\lambda r \gg L^2$, где L — размер рассеивающего объема и r — расстояние от него до точки наблюдения). Однако получаемый таким образом результат, как было показано в предыдущем разделе, справедлив при выполнении менее жесткого условия $\lambda r \gg L_0^2$, где L_0 — радиус корреляции флуктуаций. Положим в (2)

$$\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \approx \frac{e^{ikr}}{r} e^{-ikn\mathbf{r}'},$$

где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный вдоль \mathbf{r} . В качестве Π_0 возьмем плоскую волну:

$$\Pi_0(\mathbf{r}') = A e^{ikr'}. \quad (3)$$

Тогда для Π_s получим выражение

$$\Pi_s(\mathbf{r}) = \frac{iA_0 e^{ikr}}{4\pi r} \int_V d^3 r' e^{-ikn\mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial x'_i} \left[\frac{T'(\mathbf{r}')}{T_0} k_i e^{ikr'} + \frac{2}{i\omega} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(u_i(\mathbf{r}') k_j e^{ikr'} \right) \right]. \quad (4)$$

Преобразуем интеграл (4) по теореме Гаусса, причем пренебрежем получающимся при этом поверхностным интегралом, так как поверхностные эффекты малы по сравнению с объемными. Получим

$$\begin{aligned} \Pi_s(\mathbf{r}) &= - \frac{iA_0 e^{ikr}}{4\pi r} \cdot kn_i \left[\int_V e^{i(k-kn)\mathbf{r}'} \frac{T'(\mathbf{r}')}{T_0} k_i d^3 r' + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2}{i\omega} \int_V e^{-ikn\mathbf{r}'} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(u_i(\mathbf{r}') k_j e^{ikr'} \right) d^3 r' \right]. \quad (5) \end{aligned}$$

Второй интеграл в (5) снова преобразуем по теореме Гаусса, пренебрегая при этом поверхностным интегралом. В результате получаем

$$\Pi_s(\mathbf{r}) = -\frac{A_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{4\pi r} k \left[n_i k_i \int_V e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}'} \frac{T'(\mathbf{r}')}{T_0} d^3 r' + \right. \\ \left. + \frac{2}{i\omega} i k n_j k_j n_i \int_V e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}'} u_i(\mathbf{r}') d^3 r' \right], \quad \mathbf{K} = \mathbf{k} - k\mathbf{n},$$

или, после замены в первом слагаемом индекса суммирования i на j ,

$$\Pi_s(\mathbf{r}) = -\frac{A_0 e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}}{4\pi r} k n_j k_j \int_V e^{i\mathbf{K}\mathbf{r}'} \left[\frac{T'(\mathbf{r}')}{T_0} + 2n_i \frac{u_i(\mathbf{r}')}{c_0} \right] d^3 r'. \quad (6)$$

Чтобы найти плотность потока рассеянной энергии, необходимо вычислить $\nabla \Pi_s$. Дифференцируя (6) по \mathbf{r} , можно ограничиться лишь дифференцированием множителя $e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, так как при $kr \gg 1$ (волновая зона) дифференцирование второго множителя r^{-1} дает слагаемое порядка $(kr)^{-1}$

$$\frac{\partial \Pi_s(\mathbf{r})}{\partial x_i} \approx i k n_i \Pi_s(\mathbf{r}); \quad (7)$$

следовательно,

$$S_i = \frac{\rho_0 c_0^3}{2k} \text{Im} (\Pi^* \nabla \Pi) = \frac{1}{2} \rho_0 c_0^3 n_i \Pi_s(\mathbf{r}) \Pi_s^*(\mathbf{r}). \quad (8)$$

Таким образом, поток рассеянной энергии направлен по вектору \mathbf{n} . Его среднее значение равно

$$\langle S \rangle = \frac{\rho_0 c_0^3}{2} \mathbf{n} \langle \Pi_s(\mathbf{r}) \Pi_s^*(\mathbf{r}) \rangle. \quad (9)$$

Воспользовавшись выражением (6), получим

$$\langle S \rangle = \mathbf{n} \frac{\rho_0 c_0^3}{2} \frac{k^2 A_0^2}{16\pi^2 r^2} (k\mathbf{n})^2 \iint_V e^{i\mathbf{K}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)} \times \\ \times \left\langle \left[\frac{T'(\mathbf{r}_1)}{T_0} + 2n_i \frac{u_i(\mathbf{r}_1)}{c_0} \right] \left[\frac{T'(\mathbf{r}_2)}{T_0} + 2n_j \frac{u_j(\mathbf{r}_2)}{c_0} \right] \right\rangle d^3 r_1 d^3 r_2. \quad (10)$$

Предполагая, что турбулентность статистически изотропна, будем иметь (см. гл. 1)

$$\langle T'(\mathbf{r}_1) u_i(\mathbf{r}_2) \rangle = 0,$$

$$\langle T'(\mathbf{r}_1) T'(\mathbf{r}_2) \rangle = B_T(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2), \quad \langle u_i(\mathbf{r}_1) u_j(\mathbf{r}_2) \rangle = B_{ij}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Вводя координаты $\rho = r_1 - r_2$, выполним интегрирование по r_2 , которое дает величину V рассеивающего объема:

$$\langle S \rangle = n \frac{\rho_0 c_0^3}{2} \frac{k^2 l_0^2}{16\pi^2 r^2} (kn)^2 V \int_V e^{i\mathbf{K}\rho} \left[\frac{B_T(\rho)}{T_0^2} + 4n_i n_j \frac{B_{ij}(\rho)}{c_0^2} \right] d^3\rho. \quad (11)$$

Аналогично формулам предыдущего параграфа

$$\int_V e^{i\mathbf{K}\rho} B_T(\rho) d^3\rho = (2\pi)^3 \overline{\Phi}_T(\mathbf{K}), \quad (12)$$

$$\int_V e^{i\mathbf{K}\rho} B_{ij}(\rho) d^3\rho = (2\pi)^3 \overline{\Phi}_{ij}(\mathbf{K}), \quad (13)$$

и мы получаем для $\langle S \rangle$

$$\langle S \rangle = n \frac{\rho_0 c_0^3}{2} \frac{k^2 l_0^2}{16\pi^2 r^2} (kn)^2 V \cdot 8\pi^3 \left[\frac{\overline{\Phi}_T(\mathbf{K})}{T_0^2} + 4n_i n_j \frac{\overline{\Phi}_{ij}(\mathbf{K})}{c_0^2} \right]. \quad (14)$$

В рассматриваемом случае статистически изотропной турбулентности $\Phi_{ij}(\mathbf{K})$ имеет вид (3.9)

$$\Phi_{ij}(\mathbf{K}) = \frac{1}{4\pi K^2} \left(\delta_{ij} - \frac{K_i K_j}{K^2} \right) E(K), \quad (15)$$

где $E(K)$ — спектральная плотность энергии турбулентности, Обозначим через θ угол рассеяния. Тогда $kn = k \cos \theta$ и

$$n_i n_j \Phi_{ij}(\mathbf{K}) = \frac{1}{4\pi K^2} \left(1 - \frac{(n\mathbf{K})^2}{K^2} \right) E(K).$$

Но если $k = mk$, то

$$\frac{\mathbf{K}}{K} = \frac{m - n}{|m - n|} \quad \text{и} \quad n \frac{\mathbf{K}}{K} = \frac{mn - 1}{|m - n|} = \frac{\cos \theta - 1}{2 \sin \frac{\theta}{2}} = -\sin \frac{\theta}{2}.$$

Следовательно,

$$n_i n_j \Phi_{ij}(\mathbf{K}) = \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{4\pi K^2} E(K), \quad (16)$$

и выражение (14) принимает вид

$$\langle S \rangle = n \cdot \frac{\pi}{4} \rho_0 c_0^3 \frac{k^2 A_0^2}{r^2} V \cos^2 \theta \left[\frac{\overline{\Phi}_T(K)}{T_0^2} + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\pi} \frac{E(K)}{c_0^2 K^2} \right]. \quad (17)$$

Введем эффективный поперечник рассеяния из единицы рассеивающего объема в единичный телесный угол $\sigma_0(\theta)$

$$\sigma_0(\theta) = \frac{\langle S \rangle r^2}{S_0 V}, \quad (18)$$

где S_0 — плотность потока энергии падающей волны, равная согласно формулам (18.34) и (3)

$$S_0 = \left| \frac{\rho_0 c_0^3}{2k} \operatorname{Im} (\Pi_0^* \nabla \Pi_0) \right| = \frac{1}{2} \rho_0 c_0^3 A_0^2. \quad (19)$$

Подставляя в (18) выражения (17) и (19), получим

$$\sigma_0(\theta) = \frac{\pi}{2} k^4 \cos^2 \theta \left[\frac{\overline{\Phi_T} \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right)}{T_0^2} + \frac{\cos^2 \frac{\theta}{2}}{\pi} \frac{E \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right)}{c_0^2 \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right)^2} \right]. \quad (20)$$

Из (20) следует, что рассеяние на угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ отсутствует (обращается в нуль множитель $\cos^2 \theta$) при любом виде спектральных функций $\Phi_T(k)$ и $E(k)$. Рассеяние же на угол $\theta = \pi$ (рассеяние назад) происходит в основном лишь на температурных неоднородностях, так как множитель $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ при $\theta = \pi$ обращается в нуль (но этот эффект частично компенсируется операцией усреднения по пространству волновых чисел). Отсутствие рассеяния назад на пульсациях скорости является следствием несжимаемости турбулентного течения. Отсутствие же рассеяния на угол $\frac{\pi}{2}$ может быть легко интерпретировано на основании формул Френеля*).

Действительно, при падении под углом α на границу раздела двух сред с параметрами ρ_1, c_1 и ρ_2, c_2 коэффициент отражения Френеля R равен

$$R = \frac{\rho_2 c_2 \cos \alpha - \rho_1 c_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha \right)^2}}{\rho_2 c_2 \cos \alpha + \rho_1 c_1 \sqrt{1 - \left(\frac{c_2}{c_1} \sin \alpha \right)^2}}$$

(мы рассматриваем лишь случай температурных флуктуаций). Он обращается в нуль при $\alpha = \alpha_0$, где

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{\rho_1^3 (c_1^2 - c_2^2)}{c_2^2 (\rho_2^2 - \rho_1^2)}.$$

Для идеального газа $c_1^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_1}$, $c_2^2 = \frac{\gamma P_0}{\rho_2}$, где P_0 — гидростатиче-

* Приводимые ниже соображения принадлежат В. М. Бовшерову.

скос давление, одинаковое по обе стороны границы раздела. Подставляя эти значения, получим

$$\cos^2 \alpha_0 = \frac{\rho_1}{\rho_1 + \rho_2}.$$

В рассматриваемом случае слабых температурных флуктуаций $\rho_1 \approx \rho_2$, так что $\cos^2 \alpha_0 = \frac{1}{2}$ и $\alpha_0 = \frac{\pi}{4}$. Следовательно, рассеяние на угол $\theta_0 = \pi - 2\alpha_0 = \frac{\pi}{2}$ не происходит. Аналогично, но несколько более сложным образом можно показать, что и отражение звука от слабого скачка скорости не происходит для угла $\theta_0 = \frac{\pi}{2}$. Выше (§ 24) мы убедились в том, что рассеяние на определенный угол определяется лишь одной спектральной компонентой неоднородностей, соответствующей пространственной синусоидальной дифракционной решетке, ориентированной так, чтобы выполнялось условие зеркальности (как и в формулах Френеля). Но такую дифракционную решетку можно составить из совокупности небольших скачков, к каждому из которых применима формула Френеля для коэффициента отражения. Таким образом, рассеяние на угол $\theta = \frac{\pi}{2}$ не должно происходить в случае слабых флуктуаций температуры.

Вернемся к формуле (20). В случае, если величина $2k \sin \frac{\theta}{2}$ лежит внутри инерционного интервала спектра турбулентности, т. е.

$$\frac{2\pi}{L_0} < 2k \sin \frac{\theta}{2} < \frac{2\pi}{l_0},$$

имеют место формулы (см. гл. 1)

$$\Phi_T(\kappa) = 0,033 C_T^2 \kappa^{-11/2}, \quad (21)$$

$$E(\kappa) = 0,76 C^2 \varepsilon^{3/2} \kappa^{-5/2}. \quad (22)$$

($C^2 \approx 1,9$ — численная константа). Здесь C_T^2 — характеристика температурных пульсаций, входящая в «закон 2/3» для температурного поля: $\langle [T(\mathbf{r}_1) - T(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle = C_T^2 |\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^{2/3}$; ε — скорость диссипации энергии турбулентности. Подставляя (21) и (22) в формулу (20), получим

$$\sigma_0(\theta) = 0,38 k^{1/2} \cos^2 \theta \left(2 \sin \frac{\theta}{2} \right)^{-11/2} \left[\frac{C^2 \varepsilon^{3/2}}{c_0^2} \cos^2 \frac{\theta}{2} + 0,13 \frac{C_T^2}{T_0^2} \right]. \quad (23)$$

В условиях реальной атмосферы $C^2 \varepsilon^{3/2} / c_0^2$ и C_T^2 / T_0^2 имеют одинаковый порядок величины. Так как их соотношение зависит от метеорологических условий, то и вид функции $\sigma_0 = \sigma_0(\theta)$ зависит от них, что несколько затрудняет экспериментальную проверку формулы (23).

§ 36. Эксперименты по рассеянию звука в турбулентной атмосфере

Косвенные указания на существование эффекта рассеяния звука в турбулентной атмосфере были получены еще в 1940 г. Зигом [89], обнаружившим связь между наблюдаемым ослаблением звука и скоростью ветра. Однако сравнить эти измерения

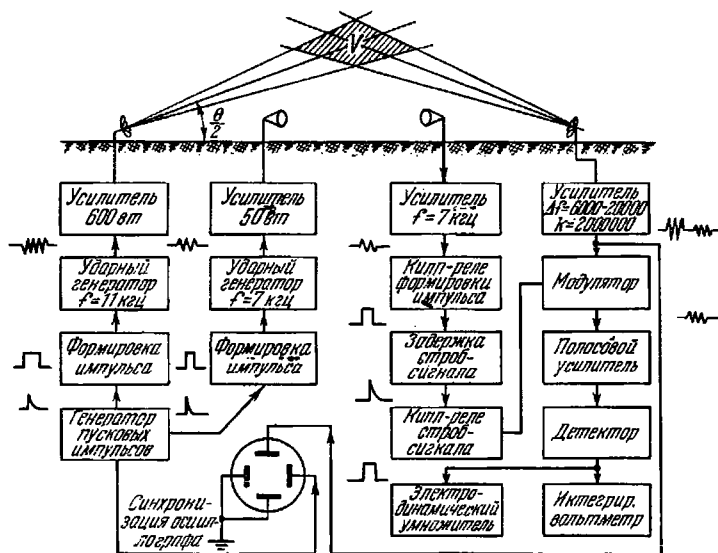


Рис. 35. Блок-схема установки для исследования рассеяния звука в атмосфере.

с теорией рассеяния весьма затруднительно, так как при расчете ослабления необходимо учитывать многократное рассеяние (см. гл. 3 и 5).

Эксперименты по рассеянию звука, специально поставленные с целью сравнения их результатов с теорией, были проведены М. А. Каллистратовой [87, 88].

Для проведения эксперимента были разработаны специальные конденсаторные излучатели и микрофоны с размерами 100×120 см², которые на рабочей частоте 11 кГц имели ширину диаграммы направленности по половинной мощности -1° . Излучатель и микрофон располагались на расстоянии нескольких десятков метров друг от друга. Для того чтобы избавиться от прямого сигнала, поступающего непосредственно с излучателя на микро-

фон (без рассеяния) за счет боковых лепестков диаграммы направленности, применялся импульсный режим работы. При этом прямой и рассеянный сигналы приходили в точку расположения микрофона с временным сдвигом, достаточным для их разделения. Блок-схема эксперимента представлена на рис. 35. На ней, помимо основного канала, предназначенного для измерений рассеяния (на частоте 11 кГц, $\lambda = 3$ см), изображен дополнительный

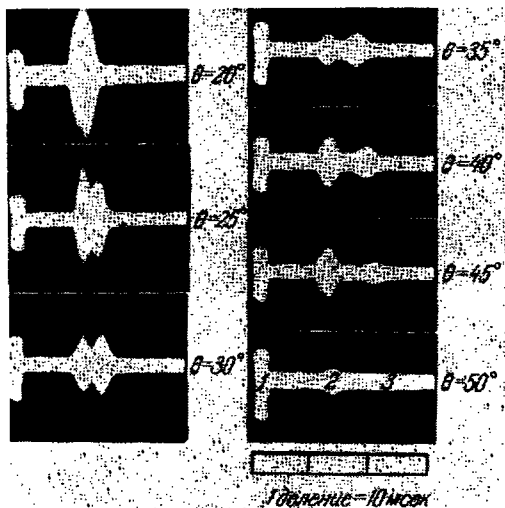


Рис. 36. Фотографии излученного (1), прямого (2) и рассеянного (3) импульсов с экрана осциллографа при различных значениях угла рассеяния.

Видно увеличение временного расстояния между прямым и рассеянным импульсами и уменьшение амплитуды рассеянного импульса с увеличением угла рассеяния.

канал, работающий на частоте 7 кГц и предназначенный для отделения прямого и рассеянного сигналов.

На рис. 36 приведены фотографии излученного, прямого и рассеянного импульсов, полученные с экрана осциллографа при различных значениях угла рассеяния.

При помощи описанной аппаратуры были проведены многочисленные измерения рассеяния звука в диапазоне углов θ от 16° до 180° при различных метеорологических условиях,

контролировавшихся путем измерений вертикальных профилей скорости ветра и температуры.

Для исключения влияния нестационарности метеорологических условий измерения величины $\sigma_0(\theta)$ всегда сопровождалось

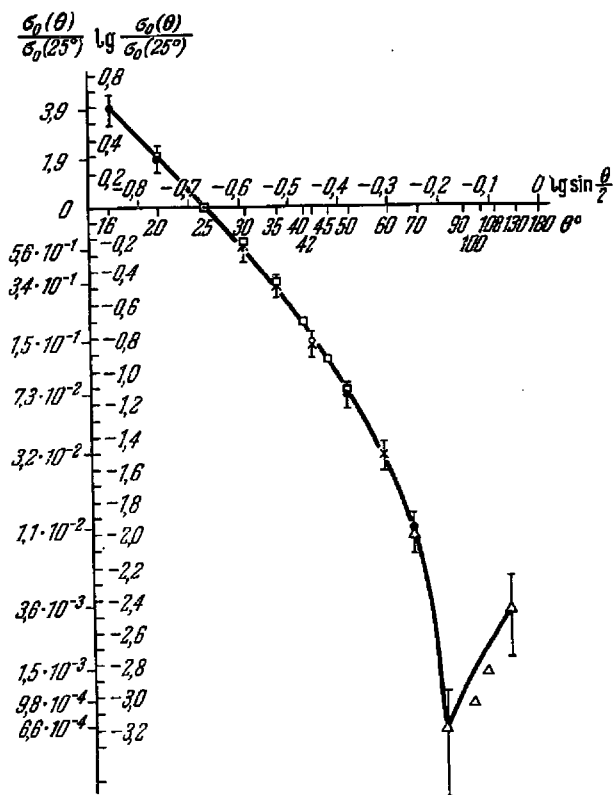


Рис. 37 Эмпирическая зависимость эффективного поперечника рассеяния звука (в относительных единицах) от угла рассеяния.

● — $d = 140$ м; ○ — $d = 80$ м; × — $d = 40$ м; △ — $d = 20$ м (по измерениям 1959 г.); □ — $d = 40$ м (по измерениям 1958 г.).

«стандартным» измерением величины $\sigma_0(25^\circ)$ (в некоторых случаях значение стандартного угла было другим). Для получения индикатрисы рассеяния сравнивались не зависящие от метеорологических условий отношения $\sigma_0(\theta)/\sigma_0(25^\circ)$ при разных θ . На рис. 37 приведены экспериментально полученные значения $\sigma_0(\theta)/\sigma_0(25^\circ)$. Вер-

тикальными черточками обозначен 5%-ный доверительный интервал. Сплошная кривая построена по теоретической формуле, соответствующей рассеянию на неоднородностях скорости ветра. Данные рис. 37 представлены также в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

θ	16 °	20 °	25 °	30 °	35 °	42 °
$l = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \text{ см}$	11	8,6	6,9	5,8	5,0	4,2
$\sigma_0(\theta)/\sigma_0(25^\circ), \text{ теор.}$	5,5	2,4	1	0,45	0,23	0,094
$\sigma_0(\theta)/\sigma_0(25^\circ), \text{ эксп.}$	4,8	2,2	1	0,49	0,25	0,086
Число измерений	17	42	—	43	36	53
θ	50 °	60 °	70 °	90 °	130 °	
$l = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}, \text{ см}$	3,5	3,0	2,6	2,1	1,7	
$\sigma_0(\theta)/\sigma_0(25^\circ), \text{ теор.}$	0,035	$1 \cdot 10^{-2}$	$2,7 \cdot 10^{-3}$	0	$5 \cdot 10^{-4}$	
$\sigma_0(\theta)/\sigma_0(25^\circ), \text{ эксп.}$	0,029	$0,76 \cdot 10^{-2}$	$1,3 \cdot 10^{-3}$	$0,9 \cdot 10^{-5}$	$2 \cdot 10^{-4}$	
Число измерений	50	25	23	4	4	

Приведенные данные свидетельствуют о хорошем согласии теоретических и экспериментальных результатов. Кроме того, не наблюдается заметных отступлений от закономерностей, соответствующих инерционному участку спектра. Последнее обстоятельство позволяет утверждать, что внутренний масштаб турбулентности в приземном слое атмосферы не превышает значения нескольких миллиметров.

Проводились также сопоставления абсолютной величины рассеянного сигнала со значениями, рассчитанными на основании теоретической формулы. Для отношения мощности, принятой за счет рассеяния, к мощности, принимаемой при прямом наведении излучателя и микрофона друг на друга, справедлива формула (9.33)

$$\frac{P_s}{P_{\text{пр}}} = \frac{\sigma_0(\theta)V}{R^2}, \quad R_* = \frac{rR}{d}, \quad (1)$$

где r и R — расстояния от центра рассеивающего объема V до микрофона и излучателя и d — расстояние между микрофоном и излучателем. В экспериментах отношение $P_s(0)/P_{\text{сп}}$ измерялось непосредственно для $\theta = 30^\circ$ (так как индикатриса рассеяния хорошо согласуется с теоретической, то достаточно проверить соотношение (1) лишь для одного угла). Выражение для $\sigma_0(\theta)$, входящее в (1), дается формулой (23.35).

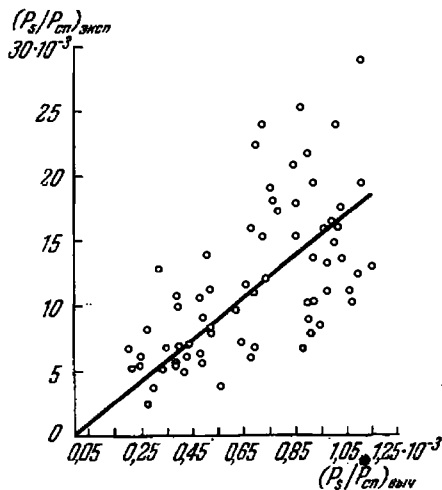


Рис. 38. Сопоставление измеренных значений рассеянного сигнала ($\theta = 30^\circ$) с ожидаемыми значениями этой величины, вычисленными на основании измерений средних профилей скорости ветра и температуры в приемном слое.

(в 2 раза) различие между этими величинами, которое, по-видимому, может быть объяснено неточностью при вычислении величины рассеивающего объема и при измерениях прямого сигнала. Несмотря на отмеченное расхождение в численном множителе, соответствие между теоретическими и экспериментальными значениями следует признать хорошим.

Таким образом, приведенные в работах [87, 88] эксперименты являются прямым подтверждением изложенной теории рассеяния. Эти эксперименты можно также рассматривать как веский аргумент, подтверждающий правильность развитых выше представлений о рассеянии электромагнитных волн в тропосфере.

Величины C_T^2 и ϵ , входящие в (23.35), рассчитывались на основании измерений вертикальных профилей ветра и температуры по формулам, полученным в гл. 1. При этом учитывалось влияние температурной стратификации на турбулентный режим, выражаемое функциями $f_1(Ri)$ и $f_2(Ri)$ (см. рис. 17, 18 на стр. 131, 132).

На рис. 38 приведена зависимость экспериментально измеренной величины $P_s/P_{\text{сп}}$ от рассчитанной на основании измерений профилей ветра и температуры. Коэффициент корреляции между теоретическими и экспериментальными значениями величины $P_s/P_{\text{сп}}$ равен 0,7. Однако имеется систематическое

РАСПРОСТРАНЕНИЕ КОРОТКИХ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ И ЗВУКОВЫХ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ В ПРЕДЕЛАХ ПРЯМОЙ ВИДИМОСТИ

В предыдущей главе было подробно рассмотрено однократное рассеяние электромагнитных и звуковых волн в турбулентной среде. Приближение однократного рассеяния оказывается достаточным при рассмотрении поля вне пределов прямой видимости. Однако в том случае, когда точка наблюдения лежит на пути распространения основной (падающей) волны, становятся существенными эффекты многократного рассеяния. Действительно, как было установлено выше, индикатриса рассеяния в случае коротких волн сильно вытянута вперед. Поэтому при распространении волн в неоднородной среде на значительные расстояния возможно многократное рассеяние.

В результате воздействия неоднородностей среды возникают флуктуации фазы, амплитуды, частоты, направления распространения и других параметров волны. Эти эффекты имеют существенное значение в целом ряде прикладных вопросов, связанных с распространением радиоволн, света и звука в атмосфере (точность работы навигационных систем, атмосферные шумы в линиях связи и т. п.).

В настоящей главе мы рассмотрим распространение коротких волн, длина волны которых мала по сравнению с внутренним масштабом турбулентности*) ($\lambda \ll l_0$).

При изучении распространения коротких волн в среде со случайными неоднородностями с успехом применяются метод геометрической оптики (когда наряду с условием $\lambda \ll l_0$ выполнено условие малости радиуса первой зоны Френеля по сравнению с внутренним масштабом турбулентности) и метод плавных возмущений (при нарушении второго условия).

А. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИКА

§ 37. Учет многократного рассеяния при распространении коротких волн в неоднородной среде

Рассмотрение геометрической оптики мы начнем с выяснения связи этого метода с многократным рассеянием волн на неоднород-

*) Влияние эффекта многократного рассеяния на распространение длинных волн рассмотрено в гл. 5.

ностях среды. Уравнения геометрической оптики обычно выводятся из волнового уравнения (см. § 38). Здесь мы получим решение, соответствующее этому методу, путем приближенного учета многократного рассеяния. Приводящийся ниже вывод не претендует на строгость; его цель — в явном виде показать, как геометрическая оптика приближенно учитывает многократное рассеяние волн на малые углы.

Как было установлено в предыдущей главе, рассеяние электромагнитных волн на малые углы вперед можно рассматривать с достаточной точностью на основании скалярного волнового уравнения, так как в этом случае дополнительный множитель $\sin \chi$, связанный с поляризацией волны, близок к единице. Поэтому рассмотрим скалярное уравнение

$$\Delta E + k^2 [1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}_1, t)]E = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) \quad (1)$$

в безграничном пространстве. Здесь E — комплексная амплитуда одной из компонент электрического поля, ε_1 — отклонение диэлектрической проницаемости от среднего значения, равного 1. Для достаточно малых значений $\varepsilon_1(\mathbf{r}, t)$ решение (1) можно записать в виде ряда теории возмущений.

Пусть

$$G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') = - \frac{\exp(ik|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2)$$

— решение уравнения

$$\Delta G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + k^2 G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}') = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'),$$

удовлетворяющее условиям излучения (предполагается, что $\text{Im } k > 0$), при помощи которого решение уравнения

$$\Delta E + k^2 E = f(\mathbf{r})$$

записывается в виде

$$E(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') f(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (3)$$

Запишем уравнение (1) в форме

$$\Delta E + k^2 E = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{R}) - k^2 \varepsilon_1 E$$

и применим к нему формулу (3):

$$E(\mathbf{r}) = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{R}) - k^2 \int G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \varepsilon_1(\mathbf{r}') E(\mathbf{r}') d^3r'. \quad (4)$$

В (4) неизвестная функция E входит в правую часть.

Подставляя в правую часть (4) выражение $E(r')$, даваемое формулой (4) (т. е. итерируя уравнение (4)), получаем

$$E(r) = G_0(r - R) - k^2 \int G_0(r - r') \varepsilon_1(r') G_0(r' - R) d^3r' + \\ + k^4 \iint G_0(r - r') \varepsilon_1(r') G_0(r' - r'') \varepsilon_1(r'') E(r'') d^3r' d^3r''.$$

Повторяя эту операцию, можно получить бесконечный ряд

$$E(r) = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(r), \quad (5)$$

где

$$E_0(r) = G_0(r - R),$$

$$E_n(r_0) = (-k^2)^n \int \dots \int_{(n)} G_0(r_0 - r_1) G_0(r_1 - r_2) \dots \\ \dots G_0(r_{n-1} - r_n) G_0(r_n - R) \varepsilon_1(r_1) \varepsilon_1(r_2) \dots \varepsilon_1(r_n) d^3r_1 \dots d^3r_n \quad (6)$$

(здесь ради единообразия обозначено $r_0 = r$). n -й член ряда (5), даваемый выражением (6), представляет собой n -кратно рассеянную волну и ряд (5) учитывает эффекты рассеяния сколь угодно большой кратности.

Исследуем выражение (6) в случае, когда длина волны много меньше характерных размеров неоднородностей. Выделим в (6) интеграл по переменной r_k :

$$I_k = \int G_0(r_{k-1} - r_k) G_0(r_k - r_{k+1}) \varepsilon_1(r_k) d^3r_k = \\ = \frac{1}{16\pi^2} \int \frac{\exp\{ik[|r_{k-1} - r_k| + |r_k - r_{k+1}|]\}}{|r_{k-1} - r_k| |r_k - r_{k+1}|} \varepsilon_1(r_k) d^3r_k. \quad (7)$$

Рассмотрим подробнее структуру экспоненциального множителя.

Если r_k пробегает прямую, соединяющую точки r_{k-1} и r_{k+1} , т. е.

$$r_k = r_{k-1} + \alpha(r_{k+1} - r_{k-1}), \quad \text{где } 0 \leq \alpha \leq 1,$$

то $|r_{k-1} - r_k| + |r_k - r_{k+1}| = |r_{k-1} - r_{k+1}| = \text{const}$ и экспонента не испытывает осцилляций.

Рассмотрим теперь другой случай. Пойдем геометрическое место точек, для которого величина $k[|r_{k-1} - r_k| + |r_k - r_{k+1}|]$ принимает заданное значение a , т. е.

$$|r_{k-1} - r_k| + |r_k - r_{k+1}| = \frac{a}{k}. \quad (8)$$

Так как $|r_{k-1} - r_k|$ — расстояние от точки r_k до r_{k-1} , а $|r_k - r_{k+1}|$ — ее расстояние до r_{k+1} , то поверхность, задаваемая уравнением (8), — эллипсоид вращения с фокусами в точках r_{k-1} , r_{k+1} , большой полуосью $a/2k$ и малой полуосью $\sqrt{a^2 - k^2 |r_{k-1} - r_{k+1}|^2} / 2k$. При $a = a_0 = k |r_{k-1} - r_{k+1}|$ мы получаем рассмотренную выше прямую. При изменении a на величину π экспонента умножается на -1 . Ближайшая к оси поверхность задается уравнением $a_1 = a_0 + \pi$. Малая полуось этого эллипсоида равна

$$\frac{1}{2k} \sqrt{(a_0 + \pi)^2 - a_0^2} = \frac{1}{2k} \sqrt{2a_0\pi + \pi^2}.$$

Величина $|r_{k-1} - r_{k+1}|$ имеет тот же порядок, что и расстояние $|r - R|$ от источника до точки наблюдения. В случае, если $k|r - R| \gg \pi$ (т. е. точка наблюдения находится в волновой зоне), $a_0 \gg \pi$ и малая полуось первого эллипсоида приближенно равна

$$\rho_1 \approx \sqrt{\frac{a_0\pi}{2k^2}} = \frac{1}{2} \sqrt{\lambda |r_{k-1} - r_{k+1}|}.$$

Точно так же, если a отличается от a_0 на величину $m\pi$, то на соответствующей поверхности эллипсоида подынтегральное выражение в (7) получает дополнительный множитель $(-1)^m$. Малая полуось соответствующего эллипсоида равна

$$\rho_m \approx \frac{1}{2} \sqrt{m\lambda |r_{k-1} - r_{k+1}|}.$$

Рассмотренные эллипсоиды отделяют друг от друга области пространства (зоны Френеля), в которых сохраняется знак экспоненциальный множитель в (7). Расстояние между соседними поверхностями вблизи середины отрезка, соединяющего точки r_{k-1} и r_{k+1} , имеет порядок ρ_1 и медленно убывает с ростом номера зоны Френеля. Вблизи концов большой оси это расстояние имеет порядок $\frac{\pi}{2k} = \frac{\lambda}{4}$.

Сделаем теперь предположение, что минимальные размеры неоднородностей диэлектрической проницаемости, которые мы обозначим через l_0 , удовлетворяют двум следующим условиям:

$$l_0 \gg \lambda, \quad (9)$$

$$l_0 \gg \sqrt{\lambda L}, \quad \text{где } L = |r - R|. \quad (10)$$

Проведем через точки r_{k-1} и r_{k+1} две плоскости, перпендикулярные вектору $r_{k-1} - r_{k+1}$. Построенные выше эллипсоиды пересе-

как эти плоскости по окружностям с радиусами $\lambda n/2$ (для n -го эллипсоида и не слишком больших n). Таким образом, вне слоя, заключенного между этими плоскостями, экспонента в (7) меняет знак при изменении r_k на величину порядка $\lambda/2$. В силу условия (9) остальная часть подынтегрального выражения меняется на расстояниях порядка λ очень слабо. Отсюда следует, что интеграл по внешним областям будет близок к нулю, так как подынтегральное выражение быстро осциллирует и амплитуды положительных и отрицательных осцилляций практически совпадают.

Таким образом, при выполнении условия (9) можно, не делая заметной ошибки, распространить интеграл (7) лишь на область, заключенную между проведенными плоскостями. Направим ось x_k по вектору $r_{k+1} - r_{k-1}$. Тогда (7) можно записать в виде

$$I_k \approx \frac{1}{16\pi^2} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} dx_k \iint_{-\infty}^{\infty} dy_k dz_k \frac{\exp\{ik[|r_{k-1} - r_k| + |r_k - r_{k+1}|]\}}{|r_{k-1} - r_k| |r_k - r_{k+1}|} e_1(r_k). \quad (11)$$

Используя также условие (10), можно произвести дальнейшее упрощение в (11). Для этого заметим, что I_k представляет собой однократно рассеянную волну от точечного источника, помещенного в точке r_{k-1} , которая наблюдается в точке r_{k+1} . Но, как мы знаем, максимальный угол рассеяния имеет порядок $\theta \sim \frac{\lambda}{l_0}$. Так как расстояние $|x_{k+1} - x_{k-1}|$ между источником и точкой наблюдения имеет порядок L , то рассеянные волны приходят в r_{k+1} лишь из тех точек, которые удалены от оси x на расстояния, не превышающие $\theta L \sim \frac{\lambda L}{l_0} = \sqrt{\lambda L} \cdot \frac{\sqrt{\lambda L}}{l_0} \ll \sqrt{\lambda L}$ (так как в силу (10) $\frac{\sqrt{\lambda L}}{l_0} \ll 1$).

Таким образом, в (11) существенное значение имеет лишь первый эллипсоид (или несколько первых эллипсоидов). Но поперечные размеры такого эллипсоида значительно меньше его продольных размеров. Поэтому величины $|r_{k-1} - r_k|$ и $|r_k - r_{k+1}|$ можно разложить в ряды:

$$|r_{k-1} - r_k| = |x_{k-1} - x_k| + \frac{(y_{k-1} - y_k)^2 + (z_{k-1} - z_k)^2}{2|x_{k-1} - x_k|} - \frac{[(y_{k-1} - y_k)^2 + (z_{k-1} - z_k)^2]^2}{8|x_{k-1} - x_k|^3} + \dots \quad (12)$$

В экспоненте в (11) мы ограничимся первыми двумя членами этого разложения. Так как величина $[(y_{k-1} - y_k)^2 + (z_{k-1} - z_k)^2]^2$

имеет порядок $(\lambda L)^2$, то это будет законно при выполнении условия

$$\frac{k(\lambda L)^2}{L^3} \ll 1 \text{ или } \lambda \ll L$$

(т. е. точка наблюдения должна находиться в волновой зоне). В знаменателе же (11) мы ограничимся лишь первым членом разложения (12). В силу условия (10) можно пренебречь также зависимостью $\varepsilon_1(x, y, z)$ от поперечных координат y, z , так как эта функция является достаточно плавной по сравнению с экспонентой. В результате мы получаем

$$I_k \approx \frac{e^{ik(x_{k-1} - x_{k-1})}}{16\pi^2} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \frac{\varepsilon_1(x_k, 0, 0) dx_k}{(x_k - x_{k-1})(x_{k+1} - x_k)} \iint_{-\infty}^{\infty} dy_k dz_k \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ik}{2} \left[\frac{(y_{k+1} - y_k)^2 + (z_{k-1} - z_k)^2}{(x_{k+1} - x_k)} + \frac{(y_k - y_{k-1})^2 + (z_k - z_{k-1})^2}{(x_k - x_{k-1})} \right] \right\}. \quad (13)$$

Внутренний интеграл по y_k, z_k может быть легко вычислен*) и оказывается равным

$$\frac{2\pi i (x_{k+1} - x_k)(x_k - x_{k-1})}{k(x_{k+1} - x_{k-1})} \exp \left\{ \frac{ik[(y_{k+1} - y_{k-1})^2 + (z_{k+1} - z_{k-1})^2]}{2(x_{k+1} - x_{k-1})} \right\}.$$

После этого мы получаем для I_k формулу

$$I_k \approx \frac{G_0(r_{k-1} - r_{k+1})}{2ik} \int_{x_{k-1}}^{x_{k+1}} \varepsilon_1(x_k, 0, 0) dx_k, \quad (14)$$

где под G_0 следует понимать не точное значение (2), а получаемое из него с применением разложения (12):

$$G_0(x, y, z) \approx -\frac{1}{4\pi|x|} \exp \left\{ ik \left[|x| + \frac{y^2 + z^2}{2|x|} \right] \right\}.$$

Применим формулу (14) для приближенного вычисления величины E_n . Предварительно сделаем замечание относительно выбора направления интегрирования вдоль оси x_k . Эта ось была направлена от точки r_{k-1} к r_{k+1} . Сами же точки r_1, r_2, \dots могут, вообще говоря, быть расположенными в пространстве произвольным образом, так как они являются переменными интегрирования. Поэтому и направления осей x_k при различных k могут не совпадать

*) При вычислении используется предположение, что $\text{Im } k > 0$, т. е. что среда обладает поглощением.

друг с другом. Мы сделаем дополнительное предположение, что все оси x_k совпадают с направлением $\mathbf{r} - \mathbf{R}$. Такой выбор осей соответствует в методе геометрической оптики интегрированию вдоль спрямленного луча, что законно лишь в случае слабых флуктуаций ε_1 (см. § 39).

Перейдем теперь к вычислению E_n . Проводя в (6) сначала интегрирование по y_1, z_1 , получим согласно (14)

$$E_n(\mathbf{r}_0) \approx (-k^2)^n \frac{1}{2ik} \int_{(n-1)} d^3r_2 \dots d^3r_n G_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \times \dots \\ \dots \times G_0(\mathbf{r}_n - \mathbf{R}) \varepsilon_1(\mathbf{r}_2) \varepsilon_1(\mathbf{r}_3) \dots \varepsilon_1(\mathbf{r}_n) \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon_1(x_1, 0, 0) dx_1. \quad (15)$$

Появляющийся здесь $(n-1)$ -кратный интеграл по переменным r_2, \dots, r_n имеет в точности такой же вид, что и n -кратный интеграл в E_n . Таким образом, интегрирование по переменным y_1, z_1 понизило кратность объемного интеграла на единицу, не изменяя его вида, и добавило под знаком интеграла множитель

$$(2ik)^{-1} \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon_1(x_1, 0, 0) dx_1.$$

Применяя теперь формулу (14) к интегралу по y_2, z_2 , получим

$$E_n(\mathbf{r}_0) \approx (-k^2)^n \frac{1}{(2ik)^2} \int_{(n-2)} d^3r_3 \dots d^3r_n G_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_3) \dots G_0(\mathbf{r}_n - \mathbf{R}) \times \\ \times \varepsilon_1(\mathbf{r}_3) \dots \varepsilon_1(\mathbf{r}_n) \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon_1(x_2, 0, 0) dx_2 \int_{x_0}^{x_1} \varepsilon_1(x_1, 0, 0) dx_1. \quad (16)$$

Пределы интегрирования переменной x_2 выбраны от x_0 до x_3 , так как в (15) r_2 входит в множитель $G_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3)$. Применяя аналогичные рассуждения n раз, получим формулу

$$E_n(\mathbf{r}_0) \approx (-k^2)^n \frac{G_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R})}{(2ik)^n} \int_{x_0}^x dx_n \varepsilon_1(x_n, 0, 0) \times \\ \times \int_{x_0}^{x_n} dx_{n-1} \varepsilon_1(x_{n-1}, 0, 0) \dots \int_{x_0}^{x_2} dx_1 \varepsilon_1(x_1, 0, 0). \quad (17)$$

Это выражение может быть значительно упрощено. Введем функцию

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0. \end{cases}$$

Тогда можно записать равенство

$$\int_{x_0}^{x_k} dx_{k-1} \varepsilon_1(x_{k-1}, 0, 0) = \int_{x_0}^X \theta(x_k - x_{k-1}) \varepsilon_1(x_{k-1}, 0, 0) dx_{k-1},$$

при помощи которого интеграл (17) записывается в виде

$$E_n(r_0) = G_0(r_0 - R) \left(\frac{ik}{2}\right)^n \int_{x_0}^X \dots \int_{x_0}^X \theta(x_n - x_{n-1}) \theta(x_{n-1} - x_{n-2}) \dots \\ \dots \theta(x_2 - x_1) \varepsilon_1(x_n, 0, 0) \dots \varepsilon_1(x_1, 0, 0) dx_1 \dots dx_n. \quad (18)$$

Произведем в (18) замену переменных интегрирования, обозначив $x_1 = x'_k$, $x_k = x'_1$, а затем отбросим штрихи. Это приведет лишь к перемене местами величин x_1 , x_k . Выражение $\varepsilon_1(x_n, 0, 0) \dots \varepsilon_1(x_1, 0, 0)$ при этом не изменится, так как все переменные входят в него симметрично, и изменится лишь множитель, содержащий функции θ . Таких замен переменных можно совершить $n!$ Они соответствуют всем возможным перестановкам величин x_1, \dots, x_n . Совершим в (18) все возможные перестановки и возьмем среднее арифметическое получающихся выражений. В результате получим

$$E_n(r_0) = G_0(r_0 - R) \left(\frac{ik}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{x_0}^X \dots \int_{x_0}^X \varepsilon_1(x_1, 0, 0) \dots \varepsilon_1(x_n, 0, 0) \times \\ \times [\theta(x_n - x_{n-1}) \theta(x_{n-1} - x_{n-2}) \dots \theta(x_2 - x_1) + \\ + \theta(x_1 - x_{n-1}) \dots \theta(x_2 - x_n) + \dots] dx_1 \dots dx_n. \quad (19)$$

В квадратных скобках стоит сумма произведений функций θ , соответствующих всем возможным порядкам расположения величин x_1, \dots, x_n . Покажем, что эта сумма равна единице. В каждой точке n -мерного куба, по которому производится интегрирование в (19), величины x_1, \dots, x_n можно расположить в порядке их убывания: $x_{k_1}, x_{k_2}, \dots, x_{k_n}$. Соответствующий член

$$\theta(x_{k_1} - x_{k_2}) \theta(x_{k_2} - x_{k_3}) \dots \theta(x_{k_{n-1}} - x_{k_n}) \quad (20)$$

в сумме (19) будет равен единице, так как все разности $x_{k_1} - x_{k_2}, \dots$ положительны. Все остальные слагаемые в рассматриваемой сумме будут равны нулю, так как они получаются из (20) перестановкой каких-либо координат, а каждая такая перестановка влечет за собой появление отрицательных разностей координат. Таким образом, сумма, фигурирующая в (19), равна единице (разумеется, в различных частях n -мерного куба будут отличны от нуля и равны единице различные слагаемые этой суммы).

Таким образом,

$$E_n(\mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}) \left(\frac{ik}{2}\right)^n \frac{1}{n!} \int_{x_0}^X \dots \int_{x_0}^X \varepsilon_1(x_1, 0, 0) \dots \varepsilon_1(x_n, 0, 0) dx_1 \dots \\ \dots dx_n = G_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}) \frac{1}{n!} \left[\frac{ik}{2} \int_{x_0}^X \varepsilon_1(x, 0, 0) dx \right]^n, \quad (21)$$

где мы записали распадающийся на множители n -кратный интеграл в виде n -й степени одномерного интеграла. Подставляя (21) в формулу (5), получим

$$E(\mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{ik}{2} \int_{x_0}^X \varepsilon_1(x, 0, 0) dx \right]^n$$

или, свертывая известный ряд в экспоненту,

$$E(\mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}) \exp \left\{ \frac{ik}{2} \int_{x_0}^X \varepsilon_1(x, 0, 0) dx \right\}. \quad (22)$$

Подставляя в (22) выражение (2) для G_0 и учитывая, что $|\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}| = X - x_0$, можно записать выражение (22) в виде

$$E(\mathbf{r}_0) = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}|} \exp \left\{ ik \left[(X - x_0) + \frac{1}{2} \int_{x_0}^X \varepsilon_1(x, 0, 0) dx \right] \right\} = \\ = -\frac{1}{4\pi |\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}|} \exp \left\{ ik \int_{x_0}^X \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1(x, 0, 0) \right] dx \right\}. \quad (23)$$

Мы видим, что выражение (23) отличается от $G_0(\mathbf{r}_0 - \mathbf{R})$ тем, что вместо набег фазы $k|\mathbf{r}_0 - \mathbf{R}|$, фигурирующего в G_0 , выражение (23) содержит фазовый сдвиг

$$S(X, 0, 0) = k \int_{x_0}^X \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1(x, 0, 0) \right] dx \quad (24)$$

(интегрирование в (24) проводится вдоль прямой, проходящей через точки \mathbf{r}_0, \mathbf{R}). Величина S удовлетворяет дифференциальному уравнению первого порядка. Чтобы получить его, сместим точки \mathbf{r}_0 и \mathbf{R} с оси x .

Тогда

$$S(x, y, z) = k \int_{x_0}^x \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1(x', y, z) \right] dx'. \quad (24a)$$

Дифференцируя это выражение по x , y и z , получим

$$\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial x} = k \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1(x, y, z) \right], \quad (25)$$

$$\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial y} = \frac{1}{2} k \int_{x_0}^x \frac{\partial \varepsilon_1(x', y, z)}{\partial y} dx', \quad (26)$$

$$\frac{\partial S(x, y, z)}{\partial z} = \frac{1}{2} k \int_{x_0}^x \frac{\partial \varepsilon_1(x', y, z)}{\partial z} dx'. \quad (27)$$

Как уже отмечалось выше, при приближенном вычислении E_n мы ввели интегрирование вдоль спрямленного луча, что законно лишь в случае малых ε_1 : $\varepsilon(\mathbf{r}) = 1 + \varepsilon_1(\mathbf{r})$, $\langle |\varepsilon_1| \rangle \ll 1$. Возведем выражения (25), (26) и (27) в квадрат, сложим и сохраним лишь члены первого порядка малости по ε_1 (при этом выпадут квадраты выражений (26), (27), так как они пропорциональны вторым степеням ε_1):

$$[\nabla S(x, y, z)]^2 = k^2 (1 + \varepsilon_1(x, y, z)) = k^2 \varepsilon(x, y, z). \quad (28)$$

Обычно это уравнение принято записывать через показатель преломления

$$n^2(\mathbf{r}) = \varepsilon(\mathbf{r}), \quad (29)$$

$$[\nabla S(\mathbf{r})]^2 = k^2 n^2(\mathbf{r}). \quad (30)$$

Уравнение (30) носит название уравнения эйконала.

Мы получили уравнение (30) несколько необычным способом, имевшим целью подчеркнуть связь геометрической оптики с многократным рассеянием волн. Уравнение (30) может быть получено и непосредственно на основании волнового уравнения; последний способ более удобен, так как позволяет исследовать это приближение детальнее, получить следующие приближения метода и оценить границы его применимости. К этому вопросу мы сейчас и перейдем.

§ 38. Вывод уравнений геометрической оптики

Рассмотрим однородное волновое уравнение в среде с заданным показателем преломления $n^2 \equiv \varepsilon$:

$$\Delta \Psi + k^2 n^2(\mathbf{r}) \Psi = 0. \quad (1)$$

В случае, если $n^2 = \text{const}$, (1) имеет решение вида $\Psi = A e^{i k n \mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}$, где \mathbf{m} — единичный вектор. Для случая, когда n не является по-

стояншой величиной, но меняется медленно, естественно искать Ψ в виде

$$\Psi(\mathbf{r}) = F(\mathbf{r}) \exp(ik\theta(\mathbf{r})), \quad (2)$$

где $F(\mathbf{r})$ и $\theta(\mathbf{r})$ — медленно меняющиеся функции.

Величину $F(\mathbf{r})$ будем искать в виде ряда по степеням малой величины $1/k$ (по существу, разложение ведется по степеням малой величины λ/l_0)

$$F(\mathbf{r}) = F_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{k} F_1(\mathbf{r}) + \frac{1}{k^2} F_2(\mathbf{r}) + \dots \quad (3)$$

Подставим выражения (2), (3) в уравнение (1) и приравняем нулю группы членов при одинаковых степенях k . Приравнявая нулю группу членов при k^2 , получим уравнение

$$(\nabla\theta)^2 - n^2(\mathbf{r}) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial\theta}{\partial x_3}\right)^2 - n^2(x_1, x_2, x_3) = 0. \quad (4)$$

Группа членов при k^1 дает уравнение

$$F_0\Delta\theta + 2\nabla F_0\nabla\theta = 0. \quad (5)$$

Его удобно записать в несколько иной форме. Умножая (5) на F_0 и учитывая, что $2F_0\nabla F_0 = \nabla(F_0^2)$, получим

$$F_0^2\Delta\theta + \nabla(F_0^2)\nabla\theta = 0,$$

что эквивалентно уравнению $\nabla(F_0^2\Delta\theta) = 0$, т. е.

$$\operatorname{div}(F_0^2 \operatorname{grad} \theta) = 0. \quad (6)$$

Уравнение для F_1 имеет вид

$$F_1\Delta\theta + 2\nabla F_1\nabla\theta = i\Delta F_0, \quad (7)$$

и вообще уравнение для F_l при $l \geq 1$

$$F_l\Delta\theta + 2\nabla F_l\nabla\theta = i\Delta F_{l-1}. \quad (8)$$

Уравнение (4) вместе с необходимыми граничными условиями определяет θ . После того как θ найдено, из уравнения (6) мы находим F_0 , затем из (7) находим F_1 и т. д.

Величина $S = k\theta$ является фазой решения (θ носит название эйконала) лишь с точностью до членов порядка $1/k$ в (3). Действительно, если $n^* = n$ (т. е. поглощение отсутствует), то из (4)

следует, что $\theta^* = \theta$, т. е. эйконал — действительное число. Тогда из (6) следует, что $F_0^* = F_0$, т. е. и F_0 действительно. Но из уравнения (7) тогда вытекает, что F_1 — чисто мнимая величина. Вообще $F_{2i}^* = F_{2i}$, $F_{2i+1}^* = -F_{2i+1}$. Таким образом, все нечетные члены разложения F чисто мнимы и поэтому дают вклад в фазу ψ . Величина F в связи с этим является амплитудой лишь с точностью до членов порядка $1/k$.

Прежде всего займемся решением уравнения (4). Оно является нелинейным дифференциальным уравнением в частных производных первого порядка типа

$$f(x_1, x_2, x_3, \theta, \frac{\partial \theta}{\partial x_1}, \frac{\partial \theta}{\partial x_2}, \frac{\partial \theta}{\partial x_3}) = 0.$$

Уравнения такого типа решаются, как известно (см., например, [90]), следующим образом.

Пусть $p_i = \frac{\partial \theta}{\partial x_i}$, $P_i = \frac{\partial f}{\partial p_i}$, $X_i = \frac{\partial f}{\partial x_i}$, $z = \frac{\partial f}{\partial \theta}$. Тогда θ может быть найдено из решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{P_1} = \frac{dx_2}{P_2} = \frac{dx_3}{P_3} = \frac{d\theta}{p_1 P_1 + p_2 P_2 + p_3 P_3} = \frac{-dp_1}{X_1 + p_1 z} = \frac{-dp_2}{X_2 + p_2 z} = \frac{-dp_3}{X_3 + p_3 z},$$

причем константы интегрирования должны быть выбраны так, чтобы удовлетворялось уравнение

$$f(x_1, x_2, x_3, \theta, p_1, p_2, p_3) = 0. \quad (9)$$

В нашем случае $P_i = 2p_i$, $X_i = -\frac{\partial n^2}{\partial x_i}$, $z = 0$ и система уравнений принимает вид

$$\frac{dx_1}{2p_1} = \frac{dx_2}{2p_2} = \frac{dx_3}{2p_3} = \frac{d\theta}{2(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2)} = \frac{dp_1}{\partial n^2 / \partial x_1} = \frac{dp_2}{\partial n^2 / \partial x_2} = \frac{dp_3}{\partial n^2 / \partial x_3} = \frac{ds}{2n}. \quad (10)$$

Величина s введена как независимая переменная (множитель $(2n)^{-1}$ при ней введен для удобства).

Прежде всего найдем один из интегралов системы (10). Выпишем уравнения $\frac{dx_i}{2p_i} = \frac{dp_i}{\partial n^2 / \partial x_i}$ (здесь суммирование по i нет) в виде

$$\frac{\partial n^2}{\partial x_1} dx_1 = 2p_1 dp_1, \quad \frac{\partial n^2}{\partial x_2} dx_2 = 2p_2 dp_2, \quad \frac{\partial n^2}{\partial x_3} dx_3 = 2p_3 dp_3$$

и почленно сложим их. В результате получаем

$$dn^2 = d(p_1^2 + p_2^2 + p_3^2),$$

откуда

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n^2 + \text{const.}$$

Значение постоянной можно определить из условия (9), откуда следует, что она равна нулю. Тогда

$$p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 = n^2(x_1, x_2, x_3). \quad (11)$$

Приравнивая каждый из членов системы (10) к ее последнему члену, запишем систему в виде

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{p_i}{n} \quad (i = 1, 2, 3), \quad (12)$$

$$\frac{dp_i}{ds} = \frac{1}{2n} \frac{\partial n^2}{\partial x_i} = \frac{\partial n}{\partial x_i}, \quad (13)$$

$$\frac{d\theta}{ds} = n, \quad (14)$$

причем при написании (14) учтено равенство (11).

Введем вместо величин p_i новые неизвестные l_i согласно равенству $p_i = n l_i$. Тогда из (11) вытекает равенство

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 = 1. \quad (15)$$

Уравнение (12) записывается в виде

$$\frac{dx_i}{ds} = l_i, \quad (16)$$

а уравнение (13) принимает вид

$$\frac{dn l_i}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x_i}. \quad (13a)$$

Но

$$\frac{dn l_i}{ds} = n \frac{dl_i}{ds} + l_i \frac{\partial n}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial s} = n \frac{dl_i}{ds} + l_i l_j \frac{\partial n}{\partial x_j}.$$

Подставляя это выражение в (13a), получаем

$$n \frac{dl_i}{ds} = \frac{\partial n}{\partial x_i} - l_i l_j \frac{\partial n}{\partial x_j}. \quad (17)$$

Уравнение (14) остается без изменений.

Подставляя (16) в равенство (15), получаем

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2.$$

Таким образом, введенный чисто формально параметр s является длиной кривой $x(s)$. Из (16) мы видим, что $l = \frac{dx}{ds}$ — единичный

касательный вектор к кривой $\boldsymbol{x}(s)$. Уравнение (17) можно записать в векторной форме

$$n \frac{d\boldsymbol{l}}{ds} = \nabla n - \boldsymbol{l}(\boldsymbol{l}\nabla n) = [\boldsymbol{l}[\nabla n \boldsymbol{l}]]. \quad (17a)$$

Уравнения (16) и (17) вместе с граничными условиями определяют кривую $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}(s)$. После этого величина θ может быть найдена из уравнения (14) в виде криволинейного интеграла

$$\theta = \int n(\boldsymbol{r}(s)) ds \quad (18)$$

вдоль линии $\boldsymbol{r}(s)$ ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{x}$).

Как известно, вектор $\nabla\theta$ ортогонален к поверхностям $\theta = \text{const}$ (к поверхностям равной фазы). Так как $p_i = \frac{\partial\theta}{\partial x_i}$, то $\boldsymbol{l} = \frac{1}{n} \nabla\theta$. Следовательно, найденные линии $\boldsymbol{x}(s)$ ортогональны к поверхностям равной фазы, т. е. являются лучами. Таким образом, θ находится интегрированием n вдоль луча. Уравнение (17) можно получить также из вариационного принципа Ферма, потребовав минимума интеграла (18) вдоль траектории луча (см., например, [91, 92]).

Обратимся теперь к уравнению (6), в котором заменим $\nabla\theta$ на величину $n(\boldsymbol{r}) \boldsymbol{l}$:

$$\text{div}(nF_0^2 \boldsymbol{l}) = 0. \quad (6a)$$

Рассмотрим некоторую поверхность $\theta(\boldsymbol{r}) = \text{const}$ и проведем на ней замкнутый контур, охватывающий некоторую малую площадь $d\sigma$. Проведем через каждую точку этого контура лучи до их пересечения с некоторой другой поверхностью $\theta(\boldsymbol{r}) = \text{const}$. На этой поверхности лучевая трубка вырежет некоторый контур, вообще говоря, с другой площадью $d\sigma_1$. Проинтегрируем уравнение (6a) по объему, заключенному внутри лучевой трубки между двумя выделенными поверхностями $\theta = \text{const}$. Преобразуем объемный интеграл в поверхностный на основании теоремы Гаусса:

$$\oint nF_0^2 \boldsymbol{l} m d\sigma = 0. \quad (19)$$

Здесь \boldsymbol{m} — единичный вектор внешней нормали к поверхности интегрирования. На боковой поверхности лучевой трубки $\boldsymbol{l} \boldsymbol{m} = 0$. На исходной поверхности $\theta = \text{const}$ величина $\boldsymbol{l} \boldsymbol{m} = -1$, а на втором «торце» этой области $\boldsymbol{l} \boldsymbol{m} = +1$.

Следовательно, уравнение (19) дает для данной лучевой трубки условие

$$nF_0^2 d\sigma = \text{const.} \quad (20)$$

Величина nF_0^2 пропорциональна (в первом приближении) вектору плотности потока энергии. $nF_0^2 d\sigma$ представляет собой мощность волны, распространяющейся внутри данной лучевой трубки. Изменения величины $d\sigma$ вдоль лучевой трубки, с которыми связаны изменения амплитуды F_0 , определяются уравнениями луча.

Таким образом, и амплитуда, и фаза решения легко могут быть определены, если уравнения лучей (17) решены.

Уравнения (17) сравнительно просто решаются в случае слоисто-неоднородной среды, когда n зависит лишь от одной координаты. Для этого случая легко можно записать

$$\Psi = F_0 \exp(ik\theta)$$

при произвольной функции $n(z)$ (см., например, [93, 94]). Однако нас интересует значительно более сложный случай, когда $n(r)$ является случайной функцией трех переменных, т. е., по существу, произвольной функцией из некоторой совокупности возможных реализаций. При такой общей постановке задачи уравнения лучей проинтегрировать не удастся и приходится использовать приближенные методы.

§ 39. Решение уравнений геометрической оптики методом возмущений

Используем теперь малость флуктуаций показателя преломления для приближенного интегрирования уравнения луча. Разделив уравнение (17а.38) на n , запишем его в виде

$$\frac{d\mathcal{L}}{ds} = [\mathcal{L} [(\nabla \ln n) \mathcal{L}]]. \quad (1)$$

Положим, как это уже делалось выше, $n^2 = \varepsilon = 1 + \varepsilon_1$. Тогда

$$\ln n = \frac{1}{2} \ln(1 + \varepsilon_1) \approx \frac{1}{2} \varepsilon_1$$

и уравнение (1) принимает форму

$$\frac{d\mathcal{L}}{ds} = \frac{1}{2} [\mathcal{L} [\nabla \varepsilon_1 \mathcal{L}]]. \quad (2)$$

Для удобства дальнейших выкладок положим $\varepsilon_1 = v \frac{\varepsilon_1}{v}$, где $v = \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle} \ll 1$ — малый параметр, по которому мы будем

производить разложение. Функция $\alpha(r) = \frac{1}{v} \varepsilon_1(r)$ имеет порядок единицы.

Будем искать l в виде ряда по степеням v :

$$l = l_0 + vl_1 + v^2l_2 + \dots \quad (3)$$

Соответственно этому

$$x = x_0 + vx_1 + v^2x_2 + \dots \quad (4)$$

Подставляя (3) в уравнение (2) и приравнявая нулю группы членов при одинаковых степенях v , получим цепочку уравнений

$$\frac{dl_0}{ds} = 0, \quad \frac{dx_0}{ds} = l_0; \quad (5)$$

$$\frac{dl_1}{ds} = \frac{1}{2} [l_0 [\nabla\alpha l_0]], \quad \frac{dx_1}{ds} = l_1; \quad (6)$$

$$\frac{dl_2}{ds} = \frac{1}{2} \{ [l_0 [\nabla\alpha l_1]] + [l_2 [\nabla\alpha l_0]] \}, \quad \frac{dx_2}{ds} = l_2. \quad (7)$$

Из (5) имеем

$$l_0 = \text{const}, \quad x_0 = l_0 s, \quad (8)$$

т. е. в первом приближении луч представляет собой прямую, выходящую в заданном направлении. При интегрировании уравнения (6) следует учесть первое приближение (8), т. е. считать $\nabla\alpha = \nabla\alpha(l_0 s)$. Тогда

$$l_1 = \frac{1}{2} \int_0^s [l_0 [\nabla\alpha(l_0 s') l_0]] ds' = \left[\frac{1}{2} l_0 \left[\left(\int_0^s \nabla\alpha(l_0 s') ds' \right) l_0 \right] \right]. \quad (9)$$

Из (9) следует, что

$$l_1 l_0 = 0. \quad (10)$$

Интегрируя уравнение $\frac{dx_1}{ds} = l_1$, получим

$$\begin{aligned} x_1(s) &= \frac{1}{2} \left[l_0 \left[\left(\int_0^s ds_2 \int_0^{s_2} ds_1 \nabla\alpha(l_0 s_1) \right) l_0 \right] \right] = \\ &= \frac{1}{2} \left[l_0 \left[\left(\int_0^s (s-s') \nabla\alpha(l_0 s') ds' \right) l_0 \right] \right]. \quad (11) \end{aligned}$$

(При переходе от (10) к (11) изменен порядок интегрирования по s_1, s_2 .) Подставляя (9) и (11) в разложения (3), (4) и заменяя $\nu\alpha$ на ε_1 , получим формулы:

$$l(s) = l_0 + \frac{1}{2} \left[l_0 \left[\int_0^s \nabla_{\varepsilon_1} (l_0 s') ds' \right] l_0 \right] + \dots = l_0 + \delta l_1 + \dots, \quad (12)$$

$$\begin{aligned} x(s) &= l_0 s + \frac{1}{2} \left[l_0 \left[\int_0^s (s - s') \nabla_{\varepsilon_1} (l_0 s') ds', l_0 \right] \right] + \dots = \\ &= l_0 s + \delta x_1(s) + \dots \end{aligned} \quad (13)$$

Докажем, что величина $l_0 = |l_0|$ равна единице. Вообще говоря, должно выполняться равенство

$$l^2 = (l_0 + \nu l_1 + \nu^2 l_2 + \dots)^2 = 1. \quad (14)$$

Раскрывая (14), получаем условие нормировки в виде

$$l_0^2 + 2\nu l_0 l_1 + \nu^2 [l_1^2 + 2l_0 l_2] + 2\nu^3 [l_0 l_3 + l_1 l_2] + \dots = 1. \quad (15)$$

Но $l_0 l_1 = 0$. Докажем, что $u_2 = l_1^2 + 2l_0 l_2 = 0$, $u_3 = 2(l_0 l_3 + l_1 l_2) = 0$, и т. д. Для этого рассмотрим

$$\frac{du_2}{ds} = 2 \left[l_1 \frac{dl_1}{ds} + l_0 \frac{dl_2}{ds} \right].$$

Подставляя сюда выражения (6) и (7), получаем (с учетом равенства $l_0 l_1 = 0$) $du_2/ds = 0$. При $s = 0$ $u_2 = 0$, отсюда следует, что $u_2 = 0$. Точно так же доказывается, что $u_3 = 0$, ..., откуда следует, что

$$|l_0| = 1 \quad (16)$$

(заметим, что при произвольном ν (16) есть единственный возможный способ выполнения равенства (15)).

Формула (13) дает уравнение луча, выходящего из точки $x = 0$ в направлении единичного вектора l_0 . В первом приближении — это прямая линия. Второе приближение дает поперечное смещение луча относительно этой прямой.

Воспользовавшись уравнением (18.38), найдем θ :

$$\theta(x(s)) = \int_0^s n(x(s)) ds = \int_0^s \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 (l_0 s + \delta x(s)) \right] ds. \quad (17)$$

Разлагая ε_1 в ряд с точностью до членов второго порядка, будем иметь

$$\begin{aligned} \varepsilon_1(l_0 s + \delta x(s)) &= \varepsilon_1(l_0 s) + \nabla \varepsilon_1(l_0 s) \delta x(s) + \dots = \\ &= \varepsilon_1(l_0 s) + \frac{1}{2} \nabla \varepsilon_1(l_0 s) \left[l_0 \left[\int_0^s (s-s_1) \nabla \varepsilon_1(l_0 s_1) ds_1, l_0 \right] \right] + \dots \quad (18) \end{aligned}$$

Следовательно, θ выражается рядом

$$\begin{aligned} \theta &= s + \frac{1}{2} \int_0^s \varepsilon_1(l_0 s) ds + \frac{1}{4} \int_0^s ds_1 \int_0^{s_1} ds_2 (s_1 - s_2) \{ \nabla \varepsilon_1(l_0 s_1) \nabla \varepsilon_1(l_0 s_2) - \\ &\quad - (l_0 \nabla \varepsilon_1(l_0 s_1)) (l_0 \nabla \varepsilon_1(l_0 s_2)) \} + \dots \quad (19) \end{aligned}$$

Если ограничиться линейным по ε_1 членом формулы (19), то это эквивалентно пренебрежению величиной δx в (17), т. е. интегрированию вдоль прямой $x = l_0 s$ вместо интегрирования вдоль искривленного луча. Значение θ , определяемое формулой (19), следует отнести к точке $x(s)$, определяемой формулой (13). Таким образом, функция $\theta(x)$ определена в параметрической форме:

$$\theta(l_0 s + \delta x(s)) = s + \frac{1}{2} \int_0^s \varepsilon_1(l_0 s) ds + O(v^2). \quad (20)$$

Значительно удобнее иметь явное выражение для функции $\theta(x)$. Для того чтобы получить такое выражение, разложим $\theta(l_0 s)$ в ряд по δx :

$$\theta(l_0 s) = \theta(l_0 s + \delta x) - \delta x = \theta(l_0 s + \delta x) - \delta x(s) \nabla \theta(l_0 s + \delta x) + \dots$$

Но согласно формуле (12.38)

$$\nabla \theta(x(s)) = n(x(s)) l(x(s)).$$

Следовательно,

$$\nabla \theta(l_0 s + \delta x) = \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) (l_0 + v l_1(s) + \dots)$$

и

$$\delta x(s) \cdot \nabla \theta(l_0 s + \delta x) = l_0 \delta x(s) \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1 \right) + v l_1(s) \delta x(s) + \dots \quad (21)$$

Но $l_0 \delta x(s) = 0$, а $\delta x(s)$ имеет порядок v . Следовательно,

выражение (21) имеет порядок v^2 , т. е.

$$\theta(l_0 s) = \theta(l_0 s + \delta x) + O(v^2). \quad (22)$$

Таким образом, с точностью до членов второго порядка малости имеет место формула

$$\theta(l_0 s) = s + \frac{1}{2} \int_0^s \varepsilon_1(l_0 s) ds, \quad (23)$$

дающая явное выражение для функции $\theta(x)$ в виде интеграла вдоль прямолинейного луча, идущего в точку наблюдения.

Поскольку при решении задачи о нахождении $\theta(r)$ мы все время считали, что $\theta(0) = 0$, то формула (23), по существу, определяет лишь изменение эйконала на пути s . Заметим, также, что она совпадает с формулой (24.37), выведенной непосредственно из решения волнового уравнения.

Перейдем к определению флуктуаций амплитуды. Из уравнения (6а.38) имеем

$$\operatorname{div}(nF_0^2 l) = nF_0^2 \operatorname{div} l + l \operatorname{grad} nF_0^2 = 0$$

или

$$l \operatorname{grad} (\ln nF_0^2) = -\operatorname{div} l. \quad (24)$$

Но $l \operatorname{grad} f = \frac{df}{ds}$, откуда получаем

$$\frac{d \ln (nF_0^2)}{ds} = -\operatorname{div} l. \quad (24a)$$

Интегрируя это уравнение вдоль луча, получим [92]

$$\ln [n(x(s_1)) F_0^2(x(s_1))] - \ln [n(x(s_0)) F_0^2(x(s_0))] = - \int_{s_0}^{s_1} \operatorname{div} l(s) ds. \quad (25)$$

Уравнение (25) определяет изменение логарифма амплитуды вдоль луча. Значение $\operatorname{div} l$, входящее в (25) и определяющее изменение сечения лучевой трубки, уравнением луча полностью не определяется. Действительно, значение $l(s)$, даваемое формулой (12), определяет изменение l вдоль данного луча. Для определения же $\operatorname{div} l$ необходимо знать производные от l не только вдоль, но и поперек луча, т. е. изменения l при переходе к соседнему лучу. Для того чтобы иметь возможность определить $\operatorname{div} l$, необходимо задать закон изменения l_0 на некоторой начальной поверхности. Например, в случае, если падающая волна является плоской, l_0 постоянно не только вдоль данного луча, но и для всех лучей,

Для сферической же волны $l_0 = \frac{r - r_0}{|r - r_0|}$, где r_0 — координата источника.

Конкретные расчеты для случаев плоской и сферической волн будут проделаны в следующих параграфах.

§ 40. Флуктуации фазы, угла прихода и амплитуды плоской волны

Пусть среда со случайными неоднородностями показателя преломления заполняет полупространство $x > 0$, па которое падает плоская монохроматическая волна

$$Y_0 = A_0 e^{ikx}. \quad (1)$$

Нас будет интересовать поле в некоторой точке r внутри неоднородной среды.

Прежде всего рассчитаем флуктуации оптического пути (эйконала) θ в точке r . Воспользуемся формулой (23.39) для θ

$$\theta(x, y, z) = x + \frac{1}{2} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi. \quad (2)$$

Среднее значение θ равно $\langle \theta \rangle = x$, а отклонение от среднего

$$\theta(r) - \langle \theta(r) \rangle = \frac{1}{2} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi. \quad (3)$$

Средний квадрат флуктуаций θ выразится формулой

$$\sigma_\theta^2 = \langle [\theta - \langle \theta \rangle]^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 \langle \varepsilon_1(\xi_1, y, z) \varepsilon_1(\xi_2, y, z) \rangle. \quad (4)$$

Считая флуктуации ε статистически однородными, получим

$$\langle \varepsilon_1(\xi_1, y, z) \varepsilon_1(\xi_2, y, z) \rangle = B_\varepsilon(\xi_1 - \xi_2, 0, 0) \quad (5)$$

и

$$\sigma_\theta^2 = \frac{1}{4} \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 B_\varepsilon(\xi_1 - \xi_2, 0, 0). \quad (6)$$

Двойной интеграл в (6) можно преобразовать в однократный. Так как в дальнейшем нам часто придется пользоваться аналогичным преобразованием, проделаем его в общей форме.

Пусть $f(x) = f(-x)$. Тогда

$$I(x) = \int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 f(\xi_1 - \xi_2) = \int_0^x d\xi_1 \int_{-\xi_1}^{x-\xi_1} f(-\eta) d\eta = \\ = \int_0^x d\xi_1 \int_{-\xi_1}^{x-\xi_1} f(\eta) d\eta.$$

Меняя порядок интегрирования по η и ξ_1 , получим

$$I(x) = \int_{-x}^0 f(\eta) d\eta \int_{-\eta}^x d\xi_1 + \int_0^x f(\eta) d\eta \int_0^{x-\eta} d\xi = \\ = \int_0^x (x - \eta) f(\eta) d\eta + \int_{-x}^0 f(\eta) (x + \eta) d\eta = 2 \int_0^x (x - \eta) f(\eta) d\eta.$$

Таким образом, если $f(x) = f(-x)$, то

$$\int_0^x d\xi_1 \int_0^x d\xi_2 f(\xi_1 - \xi_2) = 2 \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi. \quad (7)$$

Применяя эту формулу к (6), получим

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi) B_\varepsilon(\xi, 0, 0) d\xi = \frac{x}{2} \int_0^x \left(1 - \frac{\xi}{x}\right) B_\varepsilon(\xi, 0, 0) d\xi. \quad (8)$$

Будем считать, что проходимый волной в неоднородной среде путь x намного превышает радиус корреляции флуктуаций L_0 . В этом случае можно пренебречь величиной ξ/x по сравнению с единицей, а верхний предел интегрирования заменить на ∞ :

$$\sigma_0^2 \approx \frac{x}{2} \int_0^\infty B_\varepsilon(\xi, 0, 0) d\xi. \quad (9)$$

Введем одномерный интегральный масштаб флуктуаций согласно формуле

$$L_1 = \frac{1}{\sigma_\varepsilon^2} \int_0^\infty B_\varepsilon(\xi, 0, 0) d\xi, \quad (10)$$

где $\sigma_\varepsilon^2 = B_\varepsilon(0) = \langle \varepsilon_1^2 \rangle$. Тогда (9) можно записать в виде

$$\sigma_0^2 = \frac{1}{2} \sigma_\varepsilon^2 L_1 x. \quad (11)$$

Как видно из этой формулы, σ_0^2 линейно возрастает с ростом x . Это является следствием предположения $x \gg L$, сделанного при переходе от (8) к (9). В этом случае на пути луча укладывается большое количество некоррелированных неоднородностей a , как известно, средний квадрат флуктуаций пропорционален числу неоднородностей, т. е. x . Следует также отметить, что σ_0^2 пропорционально интегральному масштабу неоднородностей, т. е. в основном определяется крупномасштабными составляющими их спектра. В случае, если неоднородности ε описываются «законом 2/3», мы не имеем возможности, не выходя за его рамки, найти величину σ_0^2 — она оказывается бесконечной. Это указывает на то, что величина σ_0^2 не определяется локальными свойствами неоднородностей, описываемыми «законом 2/3».

Выразим величину σ_0^2 через спектр неоднородностей $\Phi_\varepsilon(\kappa)$. Предполагая статистическую изотропность флуктуаций, будем иметь

$$\begin{aligned} \sigma_\varepsilon^2 L_1 &= \int_0^\infty B_\varepsilon(\xi, 0, 0) d\xi = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty B_\varepsilon(\xi, 0, 0) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \iiint_{-\infty}^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) d^3\kappa \int_{-\infty}^\infty e^{i\kappa_1 \xi} d\xi = \pi \iiint_{-\infty}^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) \delta(\kappa_1) d^3\kappa = \\ &= \pi \iint_{-\infty}^\infty \Phi_\varepsilon(\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}) d\kappa_2 d\kappa_3 = 2\pi^2 \int_0^\infty \kappa \Phi_\varepsilon(\kappa) d\kappa. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\sigma_0^2 = \pi^2 x \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (12)$$

В случае «закона 2/3» $\Phi_\varepsilon(\kappa) \sim \kappa^{-11/3}$ и интеграл (12) расходится в области малых κ . Это указывает на необходимость учета отступлений от «закона 2/3» в области крупных масштабов.

Перейдем к определению флуктуаций разности оптических путей в двух точках, находящихся на расстоянии ρ друг от друга в одной и той же плоскости $x = \text{const}$

$$\theta(x, y, z) - \theta(x, y', z') = \frac{1}{2} \int_0^x [\varepsilon_1(\xi, y, z) - \varepsilon_1(\xi, y', z')] d\xi.$$

Возводя (13) в квадрат и усредняя, получим

$$D_{\theta}(y - y', z - z') = \langle [(\theta(x, y, z) - \theta(x, y', z'))^2] \rangle = \\ = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\xi' \langle [\varepsilon_1(\xi, y, z) - \varepsilon_1(\xi, y', z')] [\varepsilon_1(\xi', y, z) - \varepsilon_1(\xi', y', z')] \rangle. \quad (14)$$

Воспользуемся тождеством

$$(a - b)(c - d) = \frac{1}{2} [(a - d)^2 + (b - c)^2 - (a - c)^2 - (b - d)^2]$$

и представим подынтегральное выражение в (14) через структурные функции ε , которые мы будем считать зависящими лишь от разности координат (статистическая однородность):

$$\langle [\varepsilon_1(r_1) - \varepsilon_1(r_2)]^2 \rangle = D_{\varepsilon}(r_1 - r_2). \quad (15)$$

Получим

$$D_{\theta}(y - y', z - z') = \frac{1}{8} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\xi' [D_{\varepsilon}(\xi - \xi', y - y', z - z') + \\ + D_{\varepsilon}(\xi - \xi', y' - y, z' - z) - D_{\varepsilon}(\xi - \xi', 0, 0) - D_{\varepsilon}(\xi - \xi', 0, 0)]. \quad (16)$$

Учитывая, что

$$D_{\varepsilon}(\xi - \xi', y - y', z - z') = D_{\varepsilon}(\xi - \xi', y' - y, z' - z)$$

(это равенство выполняется в случае локальной изотропности флуктуаций), получаем

$$D_{\theta}(\eta, \zeta) = \frac{1}{4} \int_0^{\infty} d\xi \int_0^{\infty} d\xi' [D_{\varepsilon}(\xi - \xi', \eta, \zeta) - D_{\varepsilon}(\xi - \xi', 0, 0)]. \quad (17)$$

Подынтегральное выражение в (17) является четной функцией разности $(\xi - \xi')$. Применяя формулу (7), получим

$$D_{\theta}(\eta, \zeta) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (x - \xi) [D_{\varepsilon}(\xi, \eta, \zeta) - D_{\varepsilon}(\xi, 0, 0)] d\xi. \quad (18)$$

Разность $D_e(\xi, \eta, \zeta) - D_e(\xi, 0, 0)$ становится малой при $\xi \gg \gg \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$. Поэтому, если выполняется равенство $x \gg \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ в (18) можно пренебречь величиной ξ по сравнению с x в разности $(x - \xi)$, а интегрирование по ξ распространить до бесконечности

$$D_0(\eta, \zeta) \approx \frac{x}{2} \int_0^{\infty} [D_e(\xi, \eta, \zeta) - D_e(\xi, 0, 0)] d\xi. \quad (19)$$

В случае локально изотропной турбулентности подынтегральное выражение является четной функцией ξ , поэтому интегрирование можно распространить на интервал $(-\infty, +\infty)$:

$$D_0(\eta, \zeta) = \frac{x}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [D_e(\xi, \eta, \zeta) - D_e(\xi, 0, 0)] d\xi. \quad (19a)$$

Как и выражение (9), величина D_0 пропорциональна x . Однако, в отличие от величины σ_0^2 , $D_0(\eta, \zeta)$ определяется структурными функциями флуктуаций ε . При этом поведение структурных функций при $\xi \gg \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$ практически на значении интеграла (19) не сказывается, так как в этой области подынтегральное выражение мало. Это означает, что величина $D_0(\eta, \zeta)$ определяется неоднородностями с масштабами порядка $\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$, т. е. расстояния между точками наблюдения. Запишем уравнение (19) в спектральной форме. Подставим

$$D_e(\xi, \eta, \zeta) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(x_1\xi + x_2\eta + x_3\zeta)}] \Phi_e(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x},$$

$$D_e(\xi, 0, 0) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i\xi x_1}] \Phi_e(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}$$

*) Если, например, $D_e(r) = C_e^2 r^\mu$, то

$$\begin{aligned} D_e(\xi, \eta, \zeta) - D_e(\xi, 0, 0) &= C_e^2 \{(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)^{\mu/2} - \xi^\mu\} = \\ &= C_e^2 \xi^\mu \left\{ \left(1 + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{\xi^2}\right)^{\mu/2} - 1 \right\}. \end{aligned}$$

При $\eta^2 + \zeta^2 \ll \xi^2$ разложением в ряд получаем

$$\begin{aligned} D_e(\xi, \eta, \zeta) - D_e(\xi, 0, 0) &= C_e^2 \xi^\mu \left\{ 1 + \mu \frac{\eta^2 + \zeta^2}{2\xi^2} + \dots - 1 \right\} = \\ &= \frac{1}{2} \mu C_e^2 \xi^{\mu-2} (\eta^2 + \zeta^2) + \dots \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $\xi \rightarrow \infty$ и $\mu < 2$. При $\mu < 1$ интеграл (19) сходится на верхнем пределе.

в равенство (19а):

$$\begin{aligned}
 D_0(\eta, \zeta) &= \frac{x}{2} \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(x_1\eta + x_2\zeta)}] \Phi_\varepsilon(x) d^3x \int_{-\infty}^{\infty} e^{ix_1\xi} d\xi = \\
 &= \pi x \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(x_1\eta + x_2\zeta)}] \Phi_\varepsilon(x_1, x_2, x_3) \delta(x_1) d^3x = \\
 &= \pi x \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(x_2\eta + x_3\zeta)}] \Phi_\varepsilon(0, x_2, x_3) dx_2 dx_3. \quad (20)
 \end{aligned}$$

Последнее равенство представляет собой двумерное разложение Фурье структурной функции $D_0(\eta, \zeta)$, причем соответствующая спектральная плотность равна

$$F_0(x_2, x_3) = \frac{1}{2} \pi x \Phi_\varepsilon(0, x_2, x_3). \quad (21)$$

В случае статистической изотропности

$$\Phi_\varepsilon(0, x_2, x_3) = \Phi_\varepsilon(\sqrt{x_2^2 + x_3^2}) \text{ и } D_0(\eta, \zeta) = D_0(\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}) = D_0(\rho).$$

При этом равенство (20) после введения полярных координат и интегрирования по угловой переменной принимает вид

$$D_0(\rho) = 2\pi^2 x \int_0^{\infty} [1 - J_0(x\rho)] \Phi_\varepsilon(x) x dx, \quad (22)$$

где $J_0(x)$ — функция Бесселя нулевого порядка. Интеграл (22) отличается от (12) дополнительным множителем $[1 - J_0(x\rho)]$ под знаком интеграла. Этот множитель обращается в нуль при $x\rho \rightarrow 0$ как $(x\rho)^2$. Поэтому крупномасштабные составляющие спектра $\Phi_\varepsilon(x)$, соответствующие малым x , оказываются подавленными. В случае степенной функции $\Phi_\varepsilon(x) \sim x^{-p}$ вклад в интеграл (22) значений x , меньших ρ^{-1} и больших ρ^{-1} , примерно одинаков. Это означает, что основную роль играют компоненты спектра, соответствующие величине базы ρ .

Если перейти от эйконала θ к фазе $S = k\theta$, то формулы для структурной функции фазы получатся из соответствующих формул для D_0 умножением на k^2 :

$$D_S(\eta, \zeta) = \frac{k^2 x}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [D_\varepsilon(\xi, \eta, \zeta) - D_\varepsilon(\xi, 0, 0)] d\xi, \quad (23)$$

$$D_S(\rho) = 2\pi^2 k^2 x \int_0^{\infty} [1 - J_0(x\rho)] \Phi_\varepsilon(x) x dx. \quad (24)$$

Найдем также средний квадрат и корреляционную функцию флуктуаций направления распространения. В предыдущем пункте была получена формула для единичного вектора l , касательного к лучу:

$$l(s) = l_0 + \frac{1}{2} \left[l_0 \left[\left(\int_0^s \nabla \varepsilon_1(l_0 s') ds' \right) l_0 \right] \right] = l_0 + \delta l_1.$$

Так как $l_0 \delta l_1 = 0$, т. е. вектор δl_1 перпендикулярен l_0 , то $|\delta l_1| = \operatorname{tg} \alpha$, где α — угол между векторами l и l_0 . Так как $|\delta l_1| \ll 1$, т. е. $\alpha \ll 1$, то, заменяя $\operatorname{tg} \alpha$ на α , получаем $\alpha \approx |\delta l_1|$. При расчете флуктуаций угла прихода можно, однако, исходить и из формулы (23), что будет для нас несколько удобнее.

Пусть две точки наблюдения находятся на малом расстоянии η друг от друга в одной и той же плоскости $x = \text{const}$. Тогда разность фаз δS между ними связана с поворотом фронта волны α (который мы считаем малым) соотношением

$$\alpha = \frac{\delta S}{k\eta} = \frac{\delta \theta}{\eta}. \quad (25)$$

Устремляя $\eta \rightarrow 0$, мы в пределе получаем точное значение угла прихода α . Следовательно, средний квадрат флуктуаций угла прихода (в одной плоскости) можно получить на основании формулы

$$\langle \alpha^2 \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{D_S(\eta, 0)}{k^2 \eta^2} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{D_\theta(\eta, 0)}{\eta^2}, \quad (26)$$

получающейся из (25) возведением в квадрат и последующим усреднением.

Разлагая структурную функцию $D_S(\eta, 0)$ в ряд по η , учитывая, что $D'_S(0, 0) = 0$ в силу четности $D_S(\eta, 0)$ по η , получим

$$D_S(\eta, 0) = \frac{1}{2} D''_S(0, 0) \eta^2 + \dots,$$

так что

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 D_S(\eta, 0)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_\theta(\eta, 0)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0}. \quad (27)$$

Если ввести также угол β в плоскости (x, z) , то для него можно написать аналогичную формулу

$$\langle \beta^2 \rangle = \frac{1}{2k^2} \frac{\partial^2 D_S(0, \zeta)}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_\theta(0, \zeta)}{\partial \zeta^2} \Big|_{\zeta=0}, \quad (28)$$

а для суммы квадратов этих углов мы получим

$$\langle \alpha^2 \rangle + \langle \beta^2 \rangle = \frac{1}{2k^2} \Delta_2 D_S(0, 0) = \frac{1}{2} \Delta_2 D_0(0, 0), \quad (29)$$

где

$$\Delta_2 = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \quad (30)$$

— поперечный оператор Лапласа. Воспользовавшись формулой (19), получим

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{x}{2} \int_0^\infty \frac{\partial^2 D_0(\xi, \eta, 0)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} d\xi. \quad (31)$$

В случае изотропных флуктуаций

$$D_\epsilon(\xi, \eta) = D_\epsilon(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})$$

и

$$\frac{\partial^2 D_\epsilon(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0} = \frac{D'_\epsilon(\xi)}{\xi}.$$

Тогда

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{x}{4} \int_0^\infty \frac{D'_\epsilon(\xi)}{\xi} d\xi. \quad (32)$$

При малых ξ структурная функция $D_\epsilon(\xi) \sim \xi^2$, так что $D'_\epsilon(\xi)/\xi$ не имеет особенности. При $\xi \rightarrow \infty$ функция $D'_\epsilon(\xi)$ убывает, так что интеграл (32) сходится на обоих пределах. Однако для его вычисления необходимо учесть, что при малых ξ функция $D_\epsilon(\xi)$ имеет квадратичный характер, в противном случае мы получим расходящийся интеграл. Таким образом, наиболее существенный вклад в $\langle \alpha^2 \rangle$ производят мелкомасштабные неоднородности.

Найдем также корреляционную функцию флуктуаций $B_\alpha(\rho)$. Ее можно получить на основании формулы (25). Для этого следует рассмотреть значение θ в четырех точках плоскости $x = \text{const}$:

$$M_1(x, y_1, 0), \quad M_2(x, y_1 + \eta, 0),$$

$$M_3(x, y_2, 0), \quad M_4(x, y_2 + \eta, 0).$$

Тогда

$$\alpha_1 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\eta}, \quad \alpha_2 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\theta_3 - \theta_4}{\eta}$$

и

$$\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta^2} \langle (\theta_1 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_4) \rangle = \quad (33)$$

$$= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\eta^2} [\langle (\theta_1 - \theta_4)^2 \rangle + \langle (\theta_2 - \theta_3)^2 \rangle - \langle (\theta_1 - \theta_3)^2 \rangle - \langle (\theta_2 - \theta_4)^2 \rangle].$$

Но

$$\langle (\theta_1 - \theta_4)^2 \rangle = D_\theta (y_2 - y_1 + \eta), \quad \langle (\theta_2 - \theta_3)^2 \rangle = D_\theta (y_2 - y_1 - \eta),$$

$$\langle (\theta_1 - \theta_3)^2 \rangle = \langle (\theta_2 - \theta_4)^2 \rangle = D_\theta (y_2 - y_1).$$

Если обозначить $y_2 - y_1 = y$, то на основании (33) получим

$$\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle = B_\alpha (y) = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\eta^2} [D_\theta (y + \eta) + D_\theta (y - \eta) - 2D_\theta (y)]. \quad (34)$$

Разлагая $D_\theta (y \pm \eta)$ в ряд $D_\theta (y \pm \eta) = D_\theta (y) \pm \eta D'_\theta (y) + \frac{1}{2} \eta^2 D''_\theta (y) + \dots$, подставляя это разложение в (34) и переходя к пределу, получим формулу

$$B_\alpha (y) = \frac{1}{2} D''_\theta (y) \quad (35)$$

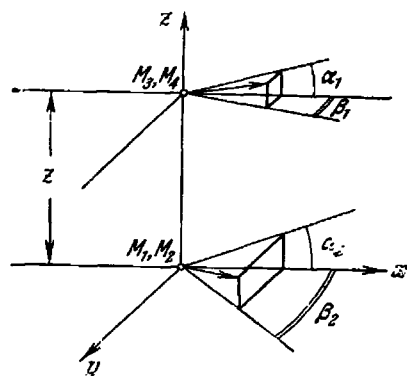


Рис. 39. К вычислению корреляционных функций флуктуаций угла прихода.

Для нахождения $\langle \alpha_1 \alpha_2 \rangle$ каждая из точек наблюдения разделяется на две бесконечно близкие точки (M_1, M_2) и (M_3, M_4), причем компоненты каждой из пар равносятся вдоль оси z. Для нахождения $\langle \beta_1 \beta_2 \rangle$ компоненты точек (M_1, M_2) и (M_3, M_4) разнесены на бесконечно малое расстояние вдоль оси y.

для $B_\alpha (y)$. При $y = 0$ (35) переходит в (27). Формула (35) дает корреляцию углов прихода в плоскости, проходящей через оба луча. Можно также рассмотреть и корреляцию флуктуаций угла прихода в плоскостях, проходящих через каждый из лучей и перпендикулярных плоскости, содержащей оба луча (рис. 39). Если направить ось y от точки M_1 к точке M_2 ($M_1 = (x, y, 0)$, $M_2 = (x, y + \eta, 0)$), а разность точек наблюдения произвести вдоль оси z ($M_3 = (x, y, z)$, $M_4 =$

$= (x, y + \eta_1, z)$), то для углов прихода получим

$$\beta_1 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\theta_1 - \theta_2}{\eta}, \quad \beta_2 = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{\theta_3 - \theta_4}{\eta}$$

и

$$B_{\beta} = \langle \beta_1 \beta_2 \rangle = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta^2} \langle (\theta_1 - \theta_2)(\theta_3 - \theta_4) \rangle. \quad (36)$$

Эта формула выглядит так же, как (33), однако теперь

$$\langle (\theta_1 - \theta_4)^2 \rangle = D_{\theta}(\eta, z) = D_{\theta}(\sqrt{\eta^2 + z^2})$$

(последнее равенство записано для случая изотропных флуктуаций),

$$\begin{aligned} \langle (\theta_2 - \theta_3)^2 \rangle &= D_{\theta}(\eta, z), & \langle (\theta_1 - \theta_3)^2 \rangle &= \langle (\theta_2 - \theta_4)^2 \rangle = D_{\theta}(0, z), \\ B_{\beta}(z) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\eta^2} 2 [D_{\theta}(\eta, z) - D_{\theta}(0, z)] = \\ &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{\eta^2} [D_{\theta}(\sqrt{z^2 + \eta^2}) - D_{\theta}(z)] \end{aligned} \quad (37)$$

(для изотропного случая). При $\eta \ll z$

$$D_{\theta}(\sqrt{z^2 + \eta^2}) \approx D_{\theta}\left(z + \frac{\eta^2}{2z} + \dots\right) = D_{\theta}(z) + \frac{\eta^2}{2z} D'_{\theta}(z).$$

После подстановки этого выражения в (37) и перехода к пределу при $\eta \rightarrow 0$ получим

$$B_{\beta}(z) = \frac{D'_{\theta}(z)}{2z}. \quad (38)$$

При $z \rightarrow 0$ это выражение стремится к пределу $B_{\beta}(0) = \frac{1}{2} D''_{\theta}(0)$ в соответствии с (28), в чем проявляется изотропность флуктуаций. Однако при $z \neq 0$ выражения (35) и (38) не совпадают и в случае статистически изотропной модели турбулентности.

Величину $B_{\alpha}(y)$ удобно назвать продольной, а $B_{\beta}(z)$ — поперечной корреляционными функциями флуктуаций угла прихода.

Найдем также взаимную корреляционную функцию

$$B_{\alpha\beta}(z) = \langle \alpha_1 \beta_2 \rangle. \quad (39)$$

Вычисления, аналогичные проведенным выше, приводят к результату

$$\begin{aligned} B_{\alpha\beta}(z) &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{2\eta^2} \{D_{\theta}(z + \eta) + D_{\theta}(\sqrt{z^2 + \eta^2}) - D_{\theta}(z) - \\ &\quad - D_{\theta}(\sqrt{(z + \eta)^2 + \eta^2})\}. \end{aligned} \quad (40)$$

Разлагая в ряд:

$$D_0(\sqrt{(z+\eta)^2 + \eta^2}) = D_0(z+\eta) + \frac{\eta^2}{2(z+\eta)} D_0'(z+\eta) + O(\eta^3),$$

$$D_0(\sqrt{z^2 + \eta^2}) = D_0(z) + \frac{\eta^2}{2z} D_0'(z) + O(\eta^3),$$

подставляя эти выражения в (40) и переходя к пределу при $\eta \rightarrow 0$, получаем формулу

$$\langle \alpha_1 \beta_2 \rangle = 0, \quad (41)$$

т. е. колебания угла прихода луча в двух взаимно перпендикулярных плоскостях не коррелированы.

Рассмотрим также величину

$$B_\alpha(\rho) + B_\beta(\rho) = \frac{1}{2} \left[D_0''(\rho) + \frac{D_0'(\rho)}{\rho} \right] = \frac{1}{2\rho} \frac{d}{d\rho} [\rho D_0'(\rho)]$$

и выразим ее через спектр флуктуаций ε . Для этого применим формулу (22). Воспользовавшись известным равенством

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dJ_0(\kappa\rho)}{d\rho} \right) = -\kappa^2 J_0(\kappa\rho),$$

получим

$$B_\alpha(\rho) + B_\beta(\rho) = \pi^2 x \int_0^\infty J_0(\kappa\rho) \Phi_\varepsilon(\kappa) \kappa^3 d\kappa. \quad (42)$$

Множитель κ^3 в (42) быстро возрастает и для сходимости интеграла при $\rho = 0$ и $\kappa \rightarrow \infty$ необходимо, чтобы функция $\Phi_\varepsilon(\kappa)$ убывала быстрее, чем κ^{-4} . Если подставить в (42) $\Phi_\varepsilon(\kappa) \sim \kappa^{-11/2}$, то при $\rho = 0$ интеграл разойдется в области больших κ . Сходимость (42) можно обеспечить введением «обрезающего» множителя. При этом величина (42) будет определяться введенным масштабом, т. е. внутренним масштабом неоднородностей (конкретные вычисления для турбулентной среды будут проведены позднее).

Обратимся теперь к амплитудным флуктуациям.

Амплитуда волны (в настоящем параграфе мы будем обозначать ее через A) удовлетворяет уравнению

$$\operatorname{div}(A^2 \operatorname{grad} \theta) = A^2 \Delta \theta + \operatorname{grad} \theta \operatorname{grad} A^2 = 0 \quad (43)$$

или, если разделить (43) на A^2 и ввести обозначение

$$\chi = \ln A = \frac{1}{2} \ln A^2,$$

$$\operatorname{grad} \theta \cdot \operatorname{grad} \chi + \frac{1}{2} \Delta \theta = 0. \quad (44)$$

Подставим сюда выражение (2) для θ . Тогда

$\text{grad } \theta =$

$$= \left\{ 1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1(x, y, z), \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\partial \varepsilon_1(\xi, y, z)}{\partial y} d\xi, \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \frac{\partial \varepsilon_1(\xi, y, z)}{\partial z} d\xi \right\},$$

$$\Delta \theta = \frac{1}{2} \frac{\partial \varepsilon_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi} \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi,$$

$$\Delta_{\perp} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Подставим эти значения в (44). При этом учтем, что в $\text{grad } \theta$ первая компонента, содержащая 1, велика по сравнению с остальными (величина $\nabla \chi$ имеет порядок малости ε_1 , так как для плоской волны в однородной среде $\nabla \chi = 0$). Поэтому если оставить в произведении $\nabla \theta \nabla \chi$ лишь член первого порядка малости по ε_1 , то мы получим

$$\frac{\partial \chi(x, y, z)}{\partial x} + \frac{1}{4} \frac{\partial \varepsilon_1(x, y, z)}{\partial x} + \frac{1}{4} \int_0^{\pi} \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi = 0. \quad (45)$$

Проинтегрируем (45) по x от 0 до x , считая, что $\chi(0, y, z) = 0$ и $\varepsilon_1(0, y, z) = 0$; будем иметь

$$\chi(x, y, z) = -\frac{1}{4} \left\{ \varepsilon_1(x, y, z) + \int_0^{\pi} dx' \int_0^{\pi} d\xi \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y, z) \right\}.$$

Меняя во входящем сюда интеграле порядок интегрирования по ξ и x' и выполняя интегрирование по x' , получим

$$\chi(x, y, z) = -\frac{1}{4} \left\{ \varepsilon_1(x, y, z) + \int_0^{\pi} (x - \xi) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi \right\}. \quad (46)$$

Найдем корреляционную функцию флуктуаций χ для случая, когда обе точки наблюдения лежат на одинаковом расстоянии x

от границы области, занятой неоднородностями

$$\begin{aligned} \langle \chi(x, y_1, z_1) \chi(x, y_2, z_2) \rangle &= B_x(y_1 - y_2, z_1 - z_2) = \\ &= \frac{1}{16} \left\{ \langle \varepsilon_1(x, y_1, z_1) \varepsilon_1(x, y_2, z_2) \rangle + \right. \\ &+ \int_0^x (x - \xi) \langle \varepsilon_1(x, y_1, z_1) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y_2, z_2) \rangle d\xi + \\ &+ \int_0^x (x - \xi) \langle \varepsilon_1(x, y_2, z_2) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y_1, z_1) \rangle d\xi + \\ &+ \left. \int_0^x \int_0^x (x - \xi_1)(x - \xi_2) \langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi_1, y_1, z_1) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi_2, y_2, z_2) \rangle d\xi_1 d\xi_2 \right\}. \quad (47) \end{aligned}$$

Но

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(x, y_1, z_1) \varepsilon_1(x, y_2, z_2) \rangle &= B_{\varepsilon}(y_1 - y_2, z_1 - z_2), \\ \langle \varepsilon_1(x, y_1, z_1) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y_2, z_2) \rangle &= \Delta_{\perp} B_{\varepsilon}(x - \xi, y_1 - y_2, z_1 - z_2) = \\ &= -\frac{1}{2} \Delta_{\perp} D_{\varepsilon}(x - \xi, y_1 - y_2, z_1 - z_2). \end{aligned}$$

(В последнем равенстве при переходе от B_{ε} к D_{ε} использована формула $D_{\varepsilon}(r) = 2B_{\varepsilon}(0) - 2B_{\varepsilon}(r)$.) Точно так же

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi_1, y_1, z_1) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi_2, y_2, z_2) \rangle &= \\ &= -\frac{1}{2} \Delta_{\perp}^2 D_{\varepsilon}(\xi_1 - \xi_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) \end{aligned}$$

Подставляя эти значения в (47) и обозначая $y_1 - y_2 = y$, $z_1 - z_2 = z$, получим

$$\begin{aligned} B_x(y, z) &= \frac{1}{16} \left\{ B_{\varepsilon}(y, z) - \int_0^x (x - \xi) \Delta_{\perp} D_{\varepsilon}(x - \xi, y, z) d\xi - \right. \\ &- \left. \frac{1}{2} \int_0^x \int_0^x (x - \xi_1)(x - \xi_2) \Delta_{\perp}^2 D_{\varepsilon}(\xi_1 - \xi_2, y, z) d\xi_1 d\xi_2 \right\}. \quad (48) \end{aligned}$$

Введем в первом интеграле новую переменную, положив $x - \xi = \xi'$, а во втором положим $\xi = \xi_1 - \xi_2$, $\eta = x - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2}$. Тогда интегрирование по η может быть выполнено в явном виде

и формула (48) примет вид

$$B_x(y, z) = \frac{1}{16} \left\{ B_\epsilon(y, z) - \int_0^x \xi \Delta_\perp D_\epsilon(\xi, y, z) d\xi - \right. \\ \left. - \frac{1}{6} \int_0^x (2x + \xi)(x - \xi)^2 \Delta_\perp^2 D_\epsilon(\xi, y, z) d\xi \right\}. \quad (49)$$

Оценим входящие в (49) члены. Функция $\Delta_\perp D_\epsilon(\xi, y, z)$ заметно меняется при изменении своего аргумента на величину порядка внутреннего масштаба турбулентности l_0 , который является характерным масштабом этой функции (это является следствием того, что к функции D_ϵ применен оператор Δ_\perp , подчеркивающий мелкие масштабы). Значение функции $\Delta_\perp D_\epsilon(0) \sim \frac{\sigma_\epsilon^2}{l_0^2}$, где $\sigma_\epsilon^2 = \langle \epsilon_1^2 \rangle$. Поэтому первый из интегралов в (49) имеет порядок

$$\frac{\sigma_\epsilon^2}{l_0^2} \int_0^l \xi d\xi \sim \sigma_\epsilon^2.$$

Функция $\Delta_\perp^2 D_\epsilon$ также имеет характерный масштаб l_0 , но ее значение в нуле порядка σ_ϵ^2/l_0^4 . Поэтому второй интеграл имеет порядок

$$\left(\frac{\sigma_\epsilon^2}{l_0^4} \right) x^3 \int_0^l d\xi \sim \sigma_\epsilon^2 \frac{x^3}{l_0^3}$$

(в подынтегральном выражении можно пренебрегать ξ по сравнению с x). Поэтому при выполнении условия $\frac{x^3}{l_0^3} \gg 1$ в (49) можно оставить лишь последнее слагаемое, что эквивалентно пренебрежению первым членом в (46). Тогда

$$B_x(y, z) = -\frac{1}{48} \int_0^x \left(x + \frac{\xi}{2} \right) (x - \xi)^2 \Delta_\perp^2 D_\epsilon(\xi, y, z) d\xi. \quad (50)$$

Формула (50) может быть упрощена еще более. Действительно, так как характерный масштаб функции $\Delta_\perp^2 D_\epsilon$ равен $l_0 \ll x$, то в (50) можно пренебречь ξ по сравнению с x , а предел

интегрирования x заменить на ∞ . Тогда

$$B_x(y, z) = -\frac{x^3}{48} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}(\xi, y, z) d\xi. \quad (51)$$

Полагая здесь $y = z = 0$, получаем формулу

$$\langle \chi^2 \rangle = -\frac{x^3}{48} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}(\xi, 0, 0) d\xi, \quad (51a)$$

определяющую средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды.

Формула (51) дает окончательное выражение для корреляционной функции плоской волны в приближении геометрической оптики [92].

Запишем выражение для спектра корреляционной функции $B_x(y, z)$. Для этого подставим в правую часть (51)

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}(\xi, y, z) &= \Delta_{\perp}^2 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(\kappa_1 \xi + \kappa_2 y + \kappa_3 z)}] \Phi_{\epsilon}(\kappa) d^3 \kappa = \\ &= -2 \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa_1 \xi + \kappa_2 y + \kappa_3 z)} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^2 \Phi_{\epsilon}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) d^3 \kappa. \end{aligned}$$

Проинтегрируем это выражение по ξ . Учитывая четность функции $\Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}(\xi, y, z)$ по ξ , получим

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}(\xi, y, z) d\xi &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}(\xi, y, z) d\xi = \\ &= -\iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^2 \Phi_{\epsilon}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) d^3 \kappa \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa_1 \xi} d\xi = \\ &= -2\pi \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^2 \Phi_{\epsilon}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \delta(\kappa_1) d^3 \kappa = \\ &= -2\pi \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^2 \Phi_{\epsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в (51), мы получаем формулу типа

$$B_x(y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} F_x(\kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (52)$$

где

$$F_x(\kappa_2, \kappa_3) = \frac{\pi x^3}{24} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^3 \Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3). \quad (53)$$

Соотношение (53) является спектральным эквивалентом формулы (51).

Как следует из (51), корреляционная функция флуктуаций логарифма амплитуды пропорциональна кубу проходимого в неоднородной среде расстояния. В случае локально изотропных флуктуаций ε

$$\Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3) = \Phi_\varepsilon(\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}) = \Phi_\varepsilon(\kappa),$$

где $\kappa = \sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}$. В этом случае F_x также зависит только от κ :

$$F_x(\kappa) = \frac{\pi x^3}{24} \kappa^4 \Phi_\varepsilon(\kappa). \quad (54)$$

Множитель κ^4 , входящий в (54), обращается в нуль при $\kappa = 0$, что приводит к подавлению крупномасштабных составляющих спектра турбулентности. В случае, если $\Phi_\varepsilon(\kappa) \sim \kappa^{-11/2}$, $F_x(\kappa) \sim \kappa^{1/2}$, т. е. спектральная плотность $F_x(\kappa)$ обращается в нуль при $\kappa = 0$ и возрастает с ростом κ . Максимум функции $F_x(\kappa)$ будет наблюдаться в той области, где на $\Phi_\varepsilon(\kappa)$ начинает сказываться теплопроводность, т. е. в области внутреннего масштаба турбулентности. Следовательно, флуктуации амплитуды в приближении геометрической оптики обусловлены наиболее мелкомасштабными флуктуациями диэлектрической проницаемости, а радиус корреляции флуктуаций амплитуды имеет порядок l_0 .

Следует обратить внимание на равенство

$$F_x(0) = 0, \quad (55)$$

которое эквивалентно соотношению

$$\iint_{-\infty}^{\infty} B_x(y, z) dy dz = 0, \quad (56)$$

а в случае изотропных флуктуаций —

$$\int_0^{\infty} B_x(\rho) \rho d\rho = 0. \quad (56a)$$

Соотношение (56) является следствием закона сохранения энергии *). Из него вытекает, что корреляционная функция B_x обязательно имеет отрицательные участки.

Выведем полезную формулу, связывающую амплитудные и фазовые флуктуации. Применив к формуле (23)

$$D_S(\eta, \zeta) = \frac{k^2 x}{2} \int_0^{\infty} [D_e(\xi, \eta, \zeta) - D_e(\zeta, 0, 0)] d\xi$$

оператор Δ_{\perp}^2 , получим

$$\Delta_{\perp}^2 D_S(\eta, \zeta) = \frac{k^2 x}{2} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 D_e(\xi, \eta, \zeta) d\xi.$$

Сравнивая эту формулу с (51), найдем

$$B_x(\eta, \zeta) = -\frac{x^2}{24k^2} \Delta_{\perp}^2 D_S(\eta, \zeta). \quad (57)$$

Формула (57) является следствием того обстоятельства, что в геометрической оптике амплитуда волны полностью определяется ее фазой (см. (44)).

Формула (57) позволяет вычислить $B_x(\eta, \zeta)$ по известной функции $D_S(\eta, \zeta)$. Следует подчеркнуть, что так как в (57) входит $\Delta_{\perp}^2 D_S(\eta, \zeta)$, то для определения $\langle \chi^2 \rangle = B_x(0, 0)$ необходимо знать поведение функции $D_S(\eta, \zeta)$ при малых $\rho = \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}$, удовлетворяющих условию $\rho \ll l_0$.

§ 41. Флуктуации параметров сферической волны

В настоящем пункте мы рассмотрим флуктуации параметров сферической волны от точечного источника, расположенного в среде со случайными неоднородностями.

*) Если случайная величина $\varphi(x)$ ($\langle \varphi \rangle = 0$) удовлетворяет закону сохранения $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx = 0$, то из него умножением на $\varphi(x_0)$ и усреднением получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} B(x - x_0) dx = \int_{-\infty}^{\infty} B(x) dx = 0.$$

(56) является следствием двумерного аналога этой теоремы.

Ясно, что средний квадрат флуктуаций полного набега фазы для случая сферической волны совпадает с соответствующей величиной для плоской волны. Рассмотрим средний квадрат разности фаз для двух лучей, расходящихся под углом ψ из источника (рис. 40). Поместим начало координат в точке расположения источника, плоскость x, y проведем через источник и обе точки наблюдения, а ось x направим от источника к середине отрезка, соединяющего точки наблюдения. Мы ограничимся случаем, когда обе точки наблюдения удалены от источника на одинаковое расстояние $x/\cos \frac{\psi}{2}$. Тогда

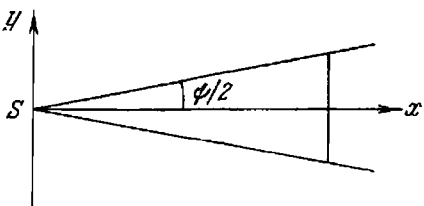


Рис. 40. Расположение лучей при вычислении флуктуаций разности фаз сферической волны.

$$S_1 - \langle S_1 \rangle = k \int_0^x n_1(\xi, a\xi, 0) \frac{d\xi}{\cos \frac{\psi}{2}} = \frac{k}{2 \cos \frac{\psi}{2}} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, a\xi, 0) d\xi, \quad (1)$$

где $a = \operatorname{tg} \frac{\psi}{2}$. Аналогично

$$S_2 - \langle S_2 \rangle = \frac{k}{2 \cos \frac{\psi}{2}} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, -a\xi, 0) d\xi. \quad (2)$$

Следовательно, для $S_1 - S_2$ мы получаем

$$S_1 - S_2 = \frac{k}{2 \cos \frac{\psi}{2}} \int_0^x [\varepsilon_1(\xi, a\xi, 0) - \varepsilon_1(\xi, -a\xi, 0)] d\xi \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle &= \frac{k^2}{4 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^x \int_0^x \langle [\varepsilon_1(\xi, a\xi, 0) - \varepsilon_1(\xi, -a\xi, 0)] \times \\ &\quad \times [\varepsilon_1(\eta, a\eta, 0) - \varepsilon_1(\eta, -a\eta, 0)] \rangle d\xi d\eta. \quad (4) \end{aligned}$$

Применяя тождество $(a - b)(c - d) = \frac{1}{2} [(a - d)^2 +$

+ (b - c)^2 - (a - c)^2 - (b - d)^2], запишем (4) в виде

$$\begin{aligned} \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle &= \frac{k^2}{8 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^\pi \int_0^\pi [D_\epsilon(\xi - \eta, a(\xi + \eta), 0) + \\ &+ D_\epsilon(\xi - \eta, -a(\xi + \eta), 0) - D_\epsilon(\xi - \eta, a(\xi - \eta), 0) - \\ &- D_\epsilon(\xi - \eta, -a(\xi - \eta), 0)] d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (5)$$

Для случая локально изотропных флуктуаций ϵ

$$\begin{aligned} D_\epsilon(\xi - \eta, a(\xi + \eta), 0) &= D_\epsilon(\xi - \eta, -a(\xi + \eta), 0) = \\ &= D_\epsilon(\sqrt{(\xi - \eta)^2 + a^2(\xi + \eta)^2}), \\ D_\epsilon(\xi - \eta, a(\xi - \eta), 0) &= D_\epsilon(\xi - \eta, -a(\xi - \eta), 0) = \\ &= D_\epsilon(\sqrt{1 + a^2} |\xi - \eta|) \end{aligned}$$

и (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle &= \frac{k^2}{4 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^\pi \int_0^\pi \{D_\epsilon(\sqrt{(\xi - \eta)^2 + a^2(\xi + \eta)^2}) - \\ &- D_\epsilon(\sqrt{1 + a^2} |\xi - \eta|)\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем считать угол ψ малым, т. е. $a \ll 1$, и разложим величину $D_\epsilon(\sqrt{1 + a^2} |\xi - \eta|)$ в ряд по a :

$$\begin{aligned} D_\epsilon(\sqrt{1 + a^2} |\xi - \eta|) &= D_\epsilon(|\xi - \eta| + \frac{a^2}{2} |\xi - \eta| + \dots) = \\ &= D_\epsilon(|\xi - \eta|) + \frac{a^2}{2} |\xi - \eta| D'_\epsilon(|\xi - \eta|) + \dots \end{aligned}$$

Подставляя это разложение в (6), получим

$$\begin{aligned} \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle &= \frac{k^2}{4 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^\pi \int_0^\pi \{D_\epsilon(\sqrt{(\xi - \eta)^2 + a^2(\xi + \eta)^2}) - \\ &- D_\epsilon(|\xi - \eta|)\} d\xi d\eta + \frac{a^2 k^2}{8 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^\pi \int_0^\pi |\xi - \eta| D'_\epsilon(|\xi - \eta|) d\xi d\eta + \dots \end{aligned} \quad (7)$$

Второй интеграл в (7) является четной функцией $(\xi - \eta)$, и его можно преобразовать по формуле (7.40) в однократный инте-

град. В первом интеграле введем новые переменные интегрирования

$$u = \xi - \eta, \quad v = \frac{1}{2}(\xi + \eta), \quad \text{т. е.}$$

$$\xi = v + \frac{1}{2}u, \quad \eta = v - \frac{1}{2}u, \quad \frac{D(\xi, \eta)}{D(u, v)} = 1.$$

Так как подынтегральное выражение в (7) является четной функцией u , интегрирование по этой переменной можно распространить лишь на область $u > 0$, введя дополнительный множитель 2. Тогда

$$\begin{aligned} \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle &= \frac{k^2}{2 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \left\{ \int_0^{\frac{x}{2}} dv \int_0^{2v} du [D_\epsilon(\sqrt{u^2 + 4a^2v^2}) - D_\epsilon(u)] + \right. \\ &+ \int_{\frac{x}{2}}^x dv \int_0^{2(x-v)} du [D_\epsilon \sqrt{u^2 + 4a^2v^2}) - D_\epsilon(u)] \left. \right\} + \\ &+ \frac{a^2 k^2}{4 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^x \xi(x - \xi) D'_\epsilon(\xi) d\xi + \dots \quad (8) \end{aligned}$$

Заметим теперь, что интегрирование по u в первом интеграле можно распространить до бесконечности, так как при $u > 2v$ разность $D_\epsilon(\sqrt{u^2 + 4a^2v^2}) - D_\epsilon(u)$ имеет порядок малости a^2 :

$$\begin{aligned} D_\epsilon(\sqrt{u^2 + 4a^2v^2}) - D_\epsilon(u) &= D_\epsilon\left(u \sqrt{1 + \frac{4a^2v^2}{u^2}}\right) - D_\epsilon(u) = \\ &= D_\epsilon\left(u\left(1 + \frac{2a^2v^2}{u^2} + \dots\right)\right) - D_\epsilon(u) = \\ &= \frac{2a^2v^2}{u} D'_\epsilon(u) + \dots < a^2v D'_\epsilon(u) + \dots, \end{aligned}$$

и интеграл от нее в пределах по u от $2v$ до ∞ сходится.

То же самое можно сделать и во втором интеграле. Тогда приближенно имеем

$$\begin{aligned} \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle &= \frac{k^2}{2 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^x dv \int_0^\infty [D_\epsilon(\sqrt{u^2 + 4a^2v^2}) - D_\epsilon(u)] du + \\ &+ \frac{a^2 k^2}{4 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^x \xi(x - \xi) D'_\epsilon(\xi) d\xi + \dots \quad (9) \end{aligned}$$

Внутренний интеграл в первом слагаемом в (9) связан со структурной функцией фазы в плоской волне $D_S(\rho)$. Действительно, умножая формулу (19.40) на k^2 , имеем (в случае изотропных флуктуаций)

$$k^2 \int_0^{\infty} [D_\epsilon(\sqrt{u^2 + \rho^2}) - D_\epsilon(u)] du = \frac{2D_0(\rho) k^2}{x} = \frac{2D_S(\rho)}{x}. \quad (10)$$

Полагая здесь $\rho = 2av$, получим

$$\begin{aligned} \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle &= \\ &= \frac{1}{x \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^x D_S(2av) dv + \frac{a^2 k^2}{4 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^x \xi (x - \xi) D'_\epsilon(\xi) d\xi + \dots \quad (11) \end{aligned}$$

Положим в первом интеграле $v = px$. Величина $2ax = b$ — расстояние между точками наблюдения. Заменяя $\cos \frac{\psi}{2}$ на 1, получаем

$$\begin{aligned} \langle (S_1 - S_2)^2 \rangle &= \\ &= \int_0^1 s(bp) dp + \frac{a^2 k^2}{4 \cos^2 \frac{\psi}{2}} \int_0^x \xi (x - \xi) D'_\epsilon(\xi) d\xi + \dots \quad (12) \end{aligned}$$

Теперь произведем оценку входящих сюда выражений и выясним, при каких условиях в (12) можно оставлять лишь первое слагаемое. Пусть $D_\epsilon(\xi) = C\xi^\mu$. Тогда согласно формуле (23.40)

$$D_S(\rho) = \frac{k^2 x}{2} \int_0^{\infty} [C(\xi^2 + \rho^2)^{\mu/2} - C\xi^\mu] d\xi = \frac{k^2 x}{2} C \rho^{\mu+1} N,$$

где

$$N = \int_0^{\infty} [(1 + t^2)^{\mu/2} + t^\mu] dt$$

и

$$\int D_S(bp) dp = \frac{1}{2} CNk^2 x \int_0^1 (bp)^{\mu+1} dp = \frac{CN}{2} k^2 x b^{\mu+1} \frac{1}{\mu+2}.$$

Для второго интеграла в (12) имеем

$$\int_0^x \xi (x - \xi) D_{\xi}(\xi) d\xi = C\mu \int_0^x (x - \xi) \xi^{\mu} d\xi = C\mu \frac{x^{\mu+2}}{(2 + \mu)(\mu + 1)}.$$

Отношение второго слагаемого в (12) к первому поэтому равно (считаем $\cos^2 \frac{\psi}{2}$ в знаменателе равным 1)

$$\delta = \frac{\mu}{2N(\mu + 1)} a^2 \left(\frac{x}{b}\right)^{\mu+1}.$$

Но $\frac{x}{b} = \frac{1}{2a}$, так что $\delta \sim a^{1-\mu}$. Следовательно, в случае $\mu < 1$ (например, $\mu = \frac{2}{3}$) $\delta = O(a^{1-\mu})$ и вторым слагаемым в (12) можно пренебрегать. В этом случае мы получаем общую формулу, связывающую средний квадрат флуктуаций разности фаз на базе b для сферической и плоской волн

$$\langle (S_1 - S_2)_{\text{сф}}^2 \rangle = \int_0^1 D_S(bp) dp. \quad (13)$$

Так как $0 \leq D_S(bp) \leq D_S(b)$, то флуктуации разности фаз сферической волны всегда меньше, чем для плоской волны, прошедшей то же расстояние, что ясно и из наглядных представлений.

Формулу (13) можно записать также в виде

$$\langle (S_1 - S_2)_{\text{сф}}^2 \rangle = \frac{1}{b} \int_0^b D_S(\rho) d\rho, \quad (13a)$$

который легко обобщается на случай, когда не вся среда между источником и точками наблюдения является неоднородной. Если расстояние между лучами на одном конце трассы равно b_1 , а на другом — b_2 , то формула (13a) принимает вид

$$\langle (S_1 - S_2)^2 \rangle = \frac{1}{b_2 - b_1} \int_{b_1}^{b_2} D_S(\rho) d\rho. \quad (136)$$

В выражении (136) одно из расстояний можно считать отрицательным — этому соответствует случай, когда лучи пересекаются. При этом следует, конечно, брать значение аргумента структурной

функции под знаком интеграла по абсолютной величине:

$$\langle (S_1 - S_2)^2 \rangle = \frac{1}{b_2 + b_1} \int_{-b_1}^{b_2} D_S(|\rho|) d\rho. \quad (13в)$$

Формулы (13а — в) мы применим в следующем параграфе для вычисления угловой корреляции разностей фаз в двух пучках плоских волн, распространяющихся под углом друг к другу.

Имея выражение (13) для $\langle (S_1 - S_2)_{сф}^2 \rangle$, по формулам предыдущего параграфа можно найти выражения для корреляционных функций флуктуаций направления распространения.

Перейдем к вычислению флуктуаций амплитуды волны. Для этого снова воспользуемся формулой

$$\text{grad} \chi \text{ grad} \theta + \frac{1}{2} \Delta \theta = 0 \quad (14)$$

($\chi = \ln A$), связывающей амплитуды и фазу (вернее, зйконал) волны. Поместим начало сферической системы координат (r, θ, φ) в точку расположения источника волн. Тогда θ будет выражаться формулой

$$\theta(r, \theta, \varphi) = r + \frac{1}{2} \int_0^r \varepsilon_1(\rho, \theta, \varphi) d\rho. \quad (15)$$

Воспользовавшись формулами, определяющими $\text{grad} \theta$ в сферических координатах,

$$\nabla_r \theta = \frac{\partial \theta}{\partial r}, \quad \nabla_\theta \theta = \frac{1}{r} \frac{\partial \theta}{\partial \theta}, \quad \nabla_\varphi \theta = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \varphi},$$

получим

$$\begin{aligned} \nabla \chi \nabla \theta = & \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1(r, \theta, \varphi) \right) \frac{\partial \chi}{\partial r} + (\nabla \varepsilon \chi) \frac{1}{2r} \int_0^r \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \theta} d\rho + \\ & + (\nabla \varepsilon \chi) \frac{1}{2r \sin \theta} \int_0^r \frac{\partial \varepsilon_1}{\partial \varphi} d\rho. \end{aligned}$$

В сферической волне величины $\nabla \varepsilon \chi$ и $\nabla_\varphi \chi$ связаны только с неоднородностями показателя преломления и поэтому имеют порядок малости ε_1 . Сохраняя в $\nabla \chi \nabla \theta$ лишь члены первого порядка малости по ε_1 , получим

$$\nabla \chi \nabla \theta \approx \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1(r, \theta, \varphi) \right] \frac{\partial \chi}{\partial r}. \quad (16)$$

В отличие от плоской, в случае сферической волны χ убывает с расстоянием как $\ln r$ за счет расхождения волны, так что $\partial\chi/\partial r$ включает в себя неслучайную компоненту. Полагая в (16) $\chi = \langle\chi\rangle + \chi'$ и пренебрегая членом второго порядка по ε_1 , получим

$$\nabla\chi\nabla\theta \approx \frac{\partial\langle\chi\rangle}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial\langle\chi\rangle}{\partial r} \varepsilon_1(r, \theta, \varphi) + \frac{\partial\chi'}{\partial r}, \quad (17)$$

так что (14) принимает вид

$$\frac{\partial\chi'}{\partial r} + \frac{\partial\langle\chi\rangle}{\partial r} + \frac{1}{2} \frac{\partial\langle\chi\rangle}{\partial r} \varepsilon_1(r, \theta, \varphi) + \frac{1}{2} \Delta\langle\theta\rangle + \frac{1}{2} \Delta\theta' = 0. \quad (18)$$

Но из (15) мы получаем

$$\langle\theta\rangle = r, \quad \Delta\langle\theta\rangle = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr}(r^2) = \frac{2}{r}.$$

Усредняя (18), получаем

$$\frac{\partial\langle\chi\rangle}{\partial r} = -\frac{1}{2} \Delta\langle\theta\rangle = -\frac{1}{r}. \quad (19)$$

Вычитая (19) из (18), получаем уравнение для χ'

$$\frac{\partial\chi'}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\Delta\theta' - \frac{\varepsilon_1}{r} \right] = 0$$

или, заменяя ε_1 , согласно равенству

$$\varepsilon_1(r, \theta, \varphi) = 2 \frac{\partial\theta'(r, \theta, \varphi)}{\partial r}, \quad (20)$$

следующему из (15), получаем окончательно

$$\frac{\partial\chi'(r, \theta, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\Delta\theta' - \frac{2}{r} \frac{\partial\theta'}{\partial r} \right] = 0. \quad (21)$$

В сферических координатах

$$\Delta\theta' = \frac{\partial^2\theta'}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial\theta'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Omega(\theta, \varphi)\theta', \quad (22)$$

где

$$\Omega(\theta, \varphi) = \frac{1}{\sin\theta} \left[\frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \right]. \quad (23)$$

Следовательно,

$$\frac{\partial\chi'(r, \theta, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2\theta'}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Omega(\theta, \varphi)\theta'(r, \theta, \varphi) \right] = 0. \quad (24)$$

Проинтегрировав это уравнение по r от 0 до R , получим, считая $\chi'(0, \vartheta, \varphi) = 0$, $\frac{\partial \theta'(0, \vartheta, \varphi)}{\partial r} = 0$:

$$\chi'(R, \vartheta, \varphi) = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial \theta'(R, \vartheta, \varphi)}{\partial r} + \int_0^R \frac{1}{r^2} \Omega(\vartheta, \varphi) \theta'(r, \vartheta, \varphi) dr \right]. \quad (25)$$

Первым слагаемым в (25) можно пренебречь, подобно тому как это было сделано для случая плоской волны. Подставляя в (25)

$$\theta'(r, \vartheta, \varphi) = \frac{1}{2} \int_0^r \varepsilon_1(\rho, \vartheta, \varphi) d\rho,$$

получим

$$\chi'(R, \vartheta, \varphi) = -\frac{1}{4} \int_0^R \frac{dr}{r^2} \int_0^r d\rho \Omega(\vartheta, \varphi) \varepsilon_1(\rho, \vartheta, \varphi). \quad (26)$$

Изменим порядок интегрирования и выполним интегрирование по r . В результате получим

$$\chi'(R, \vartheta, \varphi) = -\frac{1}{4} \int_0^R \rho \left(1 - \frac{\rho}{R}\right) \frac{1}{\rho^2} \Omega(\vartheta, \varphi) \varepsilon_1(\rho, \vartheta, \varphi) d\rho. \quad (27)$$

Но, как видно из (22), (23), $\frac{1}{\rho^2} \Omega = \Delta_{\perp}$ — поперечная часть оператора Лапласа. Следовательно,

$$\chi'(R, \vartheta, \varphi) = -\frac{1}{4} \int_0^R \frac{\rho}{R} (R - \rho) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\rho, \vartheta, \varphi) d\rho. \quad (28)$$

Формула (28) отличается от соответствующей формулы для плоской волны дополнительным множителем ρ/R под знаком интеграла. В случае, если неоднородности ε присутствуют только при значениях $\rho \approx R$, множитель $\rho/R \approx 1$ и (28) переходит в соответствующее выражение для плоской волны. Из (28) видно, что так как множитель $\rho/R < 1$, то флуктуации амплитуды сферической волны меньше флуктуаций амплитуды плоской волны, прошедшей то же расстояние.

Найдем средний квадрат флуктуаций амплитуды сферической волны. Из (28) имеем

$$\begin{aligned} \langle (\chi' (R, \vartheta, \varphi))_{\text{сф}}^2 \rangle &= \frac{1}{16R^2} \int_0^R \int_0^R \rho_1 \rho_2 (R - \rho_1) (R - \rho_2) \times \\ &\quad \times \langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1 (\rho_1, \vartheta, \varphi) \Delta_{\perp} \varepsilon_1 (\rho_2, \vartheta, \varphi) \rangle d\rho_1 d\rho_2 = \\ &= -\frac{1}{32R^2} \int_0^R \int_0^R \rho_1 \rho_2 (R - \rho_1) (R - \rho_2) \Delta_{\perp}^2 D_{\varepsilon} (\rho_1 - \rho_2, 0, 0) d\rho_1 d\rho_2. \quad (29) \end{aligned}$$

(Мы снова воспользовались соотношением $\Delta_{\perp}^2 B_{\varepsilon} = -\frac{1}{2} \Delta_{\perp}^2 D_{\varepsilon}$.) Введем новые переменные интегрирования

$$\rho_1 - \rho_2 = \xi, \quad \frac{1}{2} (\rho_1 + \rho_2) = \eta.$$

Тогда, воспользовавшись четностью подынтегрального выражения по ξ , получим

$$\begin{aligned} \langle \chi_{\text{сф}}'^2 \rangle &= -\frac{1}{16R^2} \int_0^R \Delta_{\perp}^2 D_{\varepsilon} (\xi, 0, 0) d\xi \times \\ &\quad \times \int_{\frac{\xi}{2}}^{R - \frac{\xi}{2}} \left(\eta^2 - \frac{\xi^2}{4} \right) \left[(R - \eta)^2 - \frac{\xi^2}{4} \right] d\eta. \quad (30) \end{aligned}$$

Характерным масштабом функции $\Delta_{\perp}^2 D_{\varepsilon}$ является величина l_0 (см. предыдущий параграф). Величина η в (30) порядка R . Поэтому в (30) можно пренебречь ξ по сравнению с η , что дает

$$\int_{\frac{\xi}{2}}^{R - \frac{\xi}{2}} \left(\eta^2 - \frac{\xi^2}{4} \right) \left[(R - \eta)^2 - \frac{\xi^2}{4} \right] d\eta \approx \int_0^R \eta^2 (R - \eta)^2 d\eta = \frac{R^5}{30}.$$

(Сравните с аналогичным расчетом для плоской волны.) Следовательно,

$$\langle (\chi')_{\text{сф}}^2 \rangle = -\frac{R^3}{480} \int_0^R \Delta_{\perp}^2 D_{\varepsilon} (\xi, 0, 0) d\xi \approx -\frac{R^3}{480} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 D_{\varepsilon} (\xi, 0, 0) d\xi. \quad (31)$$

Сравнивая (31) с формулой (51a.40), получаем простое соотношение

$$\langle (\chi')_{\text{сф}}^2 \rangle = \frac{1}{10} \langle (\chi')_{\text{пл}}^2 \rangle, \quad (32)$$

справедливое при любой корреляционной функции (см. также раздел Б, § 49).

Рассмотрим выражение

$$\begin{aligned} \langle \chi'(R, \vartheta_1, \varphi_1) \chi'(R, \vartheta_2, \varphi_2) \rangle &= \frac{1}{16R^2} \int_0^R \int_0^R \rho_1 \rho_2 (R - \rho_1) (R - \rho_2) \times \\ &\times \langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\rho_2, \vartheta_2, \varphi_2) \rangle d\rho_1 d\rho_2. \end{aligned} \quad (33)$$

В случае, если углы $\vartheta_1 - \vartheta_2$, $\varphi_1 - \varphi_2$ малы, операторы Δ_{\perp} , действующие по различным направлениям, отличаются друг от друга на величину второго порядка по малому углу, и этой разницей можно пренебречь. Тогда приближенно

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\rho_1, \vartheta_1, \varphi_1) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\rho_2, \vartheta_2, \varphi_2) \rangle &\approx \\ &\approx -\frac{1}{2} \Delta_{\perp}^2 D_e(\rho_1, \rho_2; \vartheta_1, \vartheta_2; \varphi_1, \varphi_2). \end{aligned}$$

В случае локально изотропных флуктуаций D_e зависит лишь от расстояния

$$r = \sqrt{\rho_1^2 - 2\rho_1\rho_2 \cos \psi + \rho_2^2},$$

где

$$\cos \psi = \cos \vartheta_1 \cos \vartheta_2 + \sin \vartheta_1 \sin \vartheta_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2)$$

и ψ — угол между направлениями из центра на точки наблюдения, который мы будем считать малым.

Положим снова $\xi = \rho_1 - \rho_2$, $\eta = \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)$. В этом случае

$$r = \sqrt{\xi^2 \cos^2 \frac{\psi}{2} + 4\eta^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}} \approx \sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \sin^2 \frac{\psi}{2}}.$$

Область интегрирования ограничена прямыми $\eta = \pm \frac{1}{2} \xi$, $\eta = R \pm \frac{1}{2} \xi$. Так как после перехода к переменным η , ξ подынтегральное выражение в (33) четно по ξ , интегрирование по ξ можно

распространить на область $\xi > 0$, удвоив этот интеграл. Тогда

$$\begin{aligned} \langle \chi'_1 \chi'_2 \rangle = & -\frac{1}{16R^2} \left\{ \int_0^{\frac{R}{2}} d\eta \int_0^{2\eta} d\xi \left(\eta^2 - \frac{\xi^2}{4} \right) \left[(R - \eta)^2 - \frac{\xi^2}{4} \right] \times \right. \\ & \times \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon} \left(\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \sin^2 \frac{\Psi}{2}} \right) + \int_{\frac{R}{2}}^R d\eta \int_0^{2(R-\eta)} d\xi \left(\eta^2 - \frac{\xi^2}{4} \right) \times \\ & \left. \times \left[(R - \eta)^2 - \frac{\xi^2}{4} \right] \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon} \left(\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \sin^2 \frac{\Psi}{2}} \right) \right\}. \quad (34) \end{aligned}$$

Как и при выводе формулы для $\langle (\chi')_{\text{сф}}^2 \rangle$, в (34) можно приближенно считать

$$\left(\eta^2 - \frac{\xi^2}{4} \right) \left[(R - \eta)^2 - \frac{\xi^2}{4} \right] \approx \eta^2 (R - \eta)^2.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \langle \chi'_1 \chi'_2 \rangle \approx & -\frac{1}{16R^2} \left\{ \int_0^{\frac{R}{2}} \eta^2 (R - \eta)^2 d\eta \times \right. \\ & \times \int_0^{2\eta} d\xi \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon} \left(\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \sin^2 \frac{\Psi}{2}} \right) + \\ & \left. + \int_{\frac{R}{2}}^R \eta^2 (R - \eta)^2 d\eta \int_0^{2(R-\eta)} d\xi \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon} \left(\sqrt{\xi^2 + 4\eta^2 \sin^2 \frac{\Psi}{2}} \right) \right\}. \quad (35) \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь формулой (51.40) для корреляционной функции амплитудных флуктуаций для плоской волны

$$B_x(y, z) = -\frac{x^3}{48} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}(\xi, y, z) d\xi,$$

которая в случае изотропных флуктуаций может быть записана в виде

$$\int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}(\sqrt{\xi^2 + b^2}) d\xi = -\frac{48B_x(b)}{R^3}. \quad (36)$$

Интегрирование по ξ в (35) может быть распространено на пределы $(0, \infty)$, так как функция $\Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}$ быстро убывает при $\xi \gg l_0$.

Поэтому (35) принимает вид

$$\langle \chi'_1 \chi'_2 \rangle = \frac{3}{R^3} \int_0^R \eta^2 (R - \eta)^2 B_x \left(2\eta \sin \frac{\psi}{2} \right) d\eta. \quad (37)$$

Положим $b = 2R \sin \frac{\psi}{2}$ (b — расстояние между точками наблюдения) и введем новую переменную интегрирования $p = \frac{\eta}{R}$. Тогда (37) принимает вид

$$\langle \chi'_1 \chi'_2 \rangle_{\text{сф}} = 3 \int_0^1 p^2 (1 - p)^2 B_x(bp) dp. \quad (38)$$

Формула (38) связывает корреляционную функцию логарифма амплитуды сферической волны с корреляционной функцией для плоской волны, прошедшей то же расстояние в неоднородной среде [95]. Положив в (38) $b = 0$, мы получим после интегрирования формулу (32).

Множитель $\eta^2(R - \eta)^2$ в (37) дает относительный вес различных участков вдоль луча в эффекте возникновения флуктуаций. Как известно, линза, помещенная непосредственно вблизи источника света или вблизи точки наблюдения, не меняет интенсивности света. Поэтому множитель $\eta^2(R - \eta)^2$ и обращается в нуль в этих точках.

Этим же эффектом объясняется относительная малость флуктуаций сферической волны по сравнению с плоской — неоднородности, непосредственно примыкающие к источнику, не вызывают флуктуаций интенсивности волны.

Следует отметить, что между формулами (13) и (38), связывающими флуктуации фазы и амплитуды сферической и плоской волн, имеется существенное различие. Если мы рассмотрим две плоские волны, расходящиеся под углом ψ , и произведем для них расчет флуктуаций разности фаз, то результат будет совпадать с формулой (13). В то же время для амплитудных флуктуаций в этом случае будет получен результат, отличный от (38) (см. гл. 4).

§ 42. Флуктуации амплитуды и фазы волны, распространяющейся в локально изотропной турбулентной среде

Настоящий параграф посвящен вычислению амплитудных и фазовых флуктуаций для плоской и сферической волн, распространяющихся в локально изотропной турбулентной среде. Как было установлено выше, в приближении геометрической оптики

все характеристики флуктуаций амплитуды и угла прихода могут быть вычислены, если известна структурная функция для фазы плоской волны.

Воспользуемся формулой (22.40) для структурной функции зйконала (расстояние, проходимое волной в неоднородной среде мы обозначаем буквой L вместо x):

$$D_\theta(\rho) = 2\pi^2 L \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)] \Phi_\varepsilon(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (1)$$

Для функции $\Phi_\varepsilon(\kappa)$ мы используем аппроксимацию, даваемую формулой (9.16):

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = 0,033 C_\varepsilon^2 \kappa^{-n/2} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad (2)$$

где κ_m связано с внутренним масштабом λ_0 пульсаций диэлектрической проницаемости соотношением *)

$$\lambda_0 \kappa_m = 5,92 \quad (3)$$

и λ_0 является точкой пересечения асимптотических разложений $D_T(r)$ при малых и больших значениях r . Подставляя (2) в (1) и используя разложение

$$1 - J_0(\kappa\rho) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n!)^2} \left(\frac{\rho}{2}\right)^{2n} \kappa^{2n},$$

получим

$$D_\theta(\rho) = -0,033 2\pi^2 C_\varepsilon^2 L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(-\frac{\rho^2}{4}\right)^n}{(n!)^2} \int_0^\infty \kappa^{2n - \frac{11}{3}} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) \kappa d\kappa. \quad (4)$$

Совершая замену переменных $\kappa^2 = \kappa_m^2 t$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \kappa^{2n - \frac{11}{3}} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) \kappa d\kappa &= \\ &= \frac{1}{2} \kappa_m^{2n - \frac{5}{3}} \int_0^\infty t^{n - \frac{5}{6} - 1} e^{-t} dt = \frac{1}{2} \Gamma\left(n - \frac{5}{6}\right) \kappa_m^{2n - \frac{5}{3}} \end{aligned}$$

*) Напомним, что величины l_0 и λ_0 отличаются друг от друга лишь численным коэффициентом.

и

$$D_0(\rho) = -0,033 \pi^2 C_z^2 L \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Gamma\left(n - \frac{5}{6}\right)}{(n!)^2} \left(-\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right)^n \kappa_m^{-5/2}. \quad (5)$$

Учитывая определение вырожденной гипергеометрической функции

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(n + \alpha)}{n! \Gamma(n + \gamma)} z^n,$$

запишем (5) в виде

$$\begin{aligned} D_0(\rho) &= 0,033 \pi^2 \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) C_z^2 L \kappa_m^{-5/2} \left[1 - {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right)\right] = \\ &= 2,2 C_z^2 L \kappa_m^{-5/2} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) - 1\right]. \quad (6) \end{aligned}$$

Исследуем поведение $D_0(\rho)$ в области больших и малых ρ . При $\kappa_m \rho \gg 1$, т. е. $\rho \gg \lambda_0$, используем асимптотическое разложение функции ${}_1F_1$ при больших отрицательных значениях аргумента:

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) \approx \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha},$$

откуда

$${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) \approx \frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} \frac{\kappa_m^{5/2} \rho^{5/2}}{2^{5/2}}$$

и [96, 97].

$$D_0(\rho) \approx 0,73 C_z^2 L \rho^{5/2} \quad (\rho \gg \lambda_0). \quad (7)$$

Асимптотику функции $D_0(\rho)$ при малых ρ можно получить взяв первые два члена ряда для ${}_1F_1$:

$${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) = 1 + \frac{5}{6} \frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} + \dots$$

Подставляя, кроме того, $\kappa_m = 5,92/\lambda_0$, получим

$$D_0(\rho) \approx 0,82 C_z^2 L \lambda_0^{-1/2} \rho^2 \quad (\rho \ll \lambda_0). \quad (8)$$

Перейдем к вычислению корреляционных функций флуктуаций угла прихода.

Поперечная корреляционная функция угла прихода $B_\beta(\rho)$ связана с $D_\beta(\rho)$ соотношением (38.40)

$$B_\beta(\rho) = \frac{1}{2} \frac{D'_\beta(\rho)}{\rho}. \quad (9)$$

Подставляя сюда (6) и используя формулу

$$\frac{d}{dz} {}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha}{\gamma} {}_1F_1(\alpha + 1, \gamma + 1, z),$$

получим

$$B_\beta(\rho) = 0,46C_\epsilon^2 L \kappa_m^{1/2} {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right). \quad (10)$$

Полагая $\rho = 0$, найдем средний квадрат флуктуаций угла прихода

$$\langle \beta^2 \rangle = 0,46C_\epsilon^2 L \kappa_m^{1/2} = 0,82C_\epsilon^2 L \lambda_0^{-1/2}. \quad (11)$$

Разделив (10) на (11), получим нормированную поперечную корреляционную функцию флуктуаций угла прихода

$$b_\beta(\rho) = {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right). \quad (12)$$

Аргументом $b_\beta(\rho)$ является безразмерная величина $\kappa_m^2 \rho^2 / 4$, откуда следует, что радиус корреляции флуктуаций угла прихода имеет порядок $\kappa_m^{-1} \sim \lambda_0$, т. е. порядок внутреннего масштаба турбулентности.

Для продольной автокорреляционной функции флуктуаций угла прихода имеем (35.40):

$$B_\alpha(\rho) = \frac{1}{2} D'_\alpha(\rho).$$

Производя дифференцирование, получим

$$B_\alpha(\rho) = 0,46C_\epsilon^2 L \kappa_m^{1/2} \left[{}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) - \frac{\kappa_m^2 \rho^2}{24} {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 3, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) \right]. \quad (13)$$

Полагая здесь $\rho = 0$, получим естественное равенство $\langle \alpha^2 \rangle = \langle \beta^2 \rangle$, а для нормированной продольной корреляционной функции получаем

$$b_\alpha(\rho) = {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) - \frac{\kappa_m^2 \rho^2}{24} {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 3, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right), \quad (14)$$

Масштабом корреляции для α также служит величина λ_0 . Функции (12) и (14) изображены на рис. 41 и рис. 42.

Из формул (10) и (13) следует, что и величина, и радиус корреляции флуктуаций угла прихода определяется внутренним

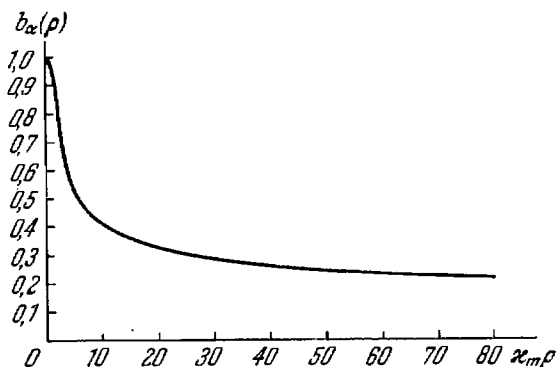


Рис. 41. Корреляционная функция b_α флуктуаций угла прихода в плоскости, содержащей оба луча (см. рис. 39), в приближении геометрической оптики.

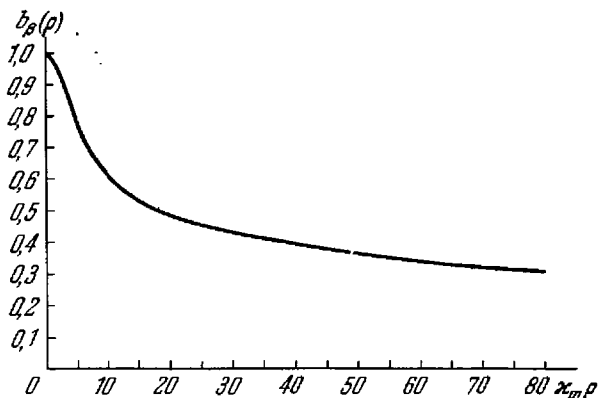


Рис. 42. Корреляционная функция b_β флуктуаций угла прихода в плоскостях, перпендикулярных плоскости, содержащей оба луча (см. рис. 39), в приближении геометрической оптики.

масштабом турбулентности λ_0 . Однако, если угол прихода волны измеряется антенной (объективом) с характерным размером d , то в результате усреднения по поверхности объектива роль мелко-

масштабных неоднородностей будет подавлена и величина флуктуаций будет определяться размером d (см. ниже).

Рассмотрим корреляционную функцию флуктуаций амплитуды. Она связана с функцией $D_0(\rho)$ соотношением (57.40)

$$B_x(\rho) = -\frac{L^2}{24} \Delta_{\perp}^2 D_0(\rho) = -\frac{L^2}{24} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left\{ \rho \frac{d}{d\rho} \left[\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left(\rho \frac{dD_0(\rho)}{d\rho} \right) \right] \right\}.$$

Подставляя выражение (6) и производя дифференцирование, получим формулу

$$B_x(\rho) = 0,0126 C_e^2 L^3 \kappa_m^{7/2} \left[{}_1F_1 \left(\frac{7}{6}, 3, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right) - \frac{7}{36} \kappa_m^2 \rho^2 {}_1F_1 \left(\frac{13}{6}, 4, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right) + \frac{91}{13824} \kappa_m^4 \rho^4 {}_1F_1 \left(\frac{19}{6}, 5, -\frac{\rho^2 \kappa_m^2}{4} \right) \right]. \quad (15)$$

Полагая здесь $\rho = 0$, получим

$$\langle \chi^2 \rangle = 0,0126 C_e^2 L^3 \kappa_m^{7/2} = 0,80 C_e^2 L^3 \lambda_0^{-7/2},$$

$$b_x(\rho) = {}_1F_1 \left(\frac{7}{6}, 3, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right) - \frac{7}{36} \kappa_m^2 \rho^2 {}_1F_1 \left(\frac{13}{6}, 4, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right) + \frac{91}{13824} \kappa_m^4 \rho^4 {}_1F_1 \left(\frac{19}{6}, 5, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right). \quad (16)$$

Последовательно применяя формулу

$$z {}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = (\gamma - 1) [{}_1F_1(\alpha, \gamma - 1, z) - {}_1F_1(\alpha - 1, \gamma - 1, z)],$$

а затем формулу

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - 1} {}_1F_1(\alpha - 1, \gamma, z) + \frac{\gamma - 1}{\alpha - 1} {}_1F_1(\alpha - 1, \gamma - 1, z),$$

можно привести выражение для $b_x(\rho)$ к виду

$$b_x(\rho) = {}_1F_1 \left(\frac{7}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right). \quad (17)$$

Из выражений (16) следует, что средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды увеличивается с уменьшением внутреннего масштаба турбулентности λ_0 . Из (17) следует также, что радиус корреляции флуктуаций амплитуды в приближении геометрической оптики совпадает с внутренним масштабом турбулентности.

Функция (17) изображена на рис. 43. При больших значениях аргумента

$$b_x(\rho) \approx -\frac{1}{6\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)} \left(\frac{x_m \rho}{2}\right)^{-7/6}.$$

Найдем теперь характеристики флуктуаций сферической волны. Структурная функция флуктуации эйконала сферической волны $D_{\theta, \text{сф}}(\rho)$ связана со структурной функцией эйконала плоской волны $D_{\theta}(\rho)$ соотношением (13.41)

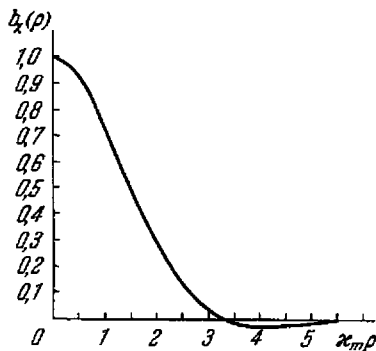


Рис. 43. Корреляционная функция флуктуаций логарифма амплитуды в приближении геометрической оптики.

$$D_{\theta, \text{сф}}(\rho) = \int_0^1 D_{\theta}(\rho t) dt. \quad (18)$$

Мы не будем подставлять сюда выражение (6) в общем виде, а исследуем отдельно случаи $\rho \ll \lambda_0$ и $\rho \gg \lambda_0$. В первом случае согласно (8)

$$D_{\theta}(\rho) = 0,82 C_{\varepsilon}^2 L \lambda_0^{-1/3} \rho^2,$$

так что

$$D_{\theta, \text{сф}}(\rho) = \frac{1}{3} D_{\theta}(\rho) \quad (\rho \ll \lambda_0). \quad (19)$$

Если, пользуясь этим выражением, вычислить средний квадрат флуктуаций угла прихода сферической волны, то мы получим простую формулу

$$\langle \alpha_{\text{сф}}^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \alpha^2 \rangle. \quad (20)$$

Для случая $\rho \gg \lambda_0$ в интеграле (18) область малых $\rho t \ll \lambda_0$ мало существенна и можно использовать формулу (7). В этом случае

$$D_{\theta, \text{сф}}(\rho) = \frac{3}{8} D_{\theta}(\rho) = 0,27 C_{\varepsilon}^2 L \rho^{5/3} \quad (\rho \gg \lambda_0). \quad (21)$$

Таким образом, структурные функции флуктуаций фазы сферической волны отличаются от соответствующих функций для плоской волны лишь численными коэффициентами, которые связаны с эффективной «средней» базой вдоль трассы.

Что касается амплитудных флуктуаций, то, как уже было отмечено выше, средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды сферической волны в 10 раз меньше соответствующих флуктуаций в плоской волне.

В заключение настоящего параграфа рассчитаем коэффициент корреляции флуктуаций разности фаз в двух плоских волнах, распространяющихся под углом γ друг к другу. Эта задача понадобится нам в дальнейшем при интерпретации явления «дрожания» изображений звезд в телескопах.

Пусть две плоские волны (рис. 44), распространяющиеся под углом γ друг к другу, наблюдаются в точках A и B . Разность случайных набегов фаз для одной из них равна $(S_1 - S_2)$, для другой — равна $(S_3 - S_4)$. Здесь индексами отмечены соответствующие рис. 44 лучи. Подсчитаем величину

$$\begin{aligned} \langle (S_1 - S_2)(S_3 - S_4) \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} [\langle (S_1 - S_4)^2 \rangle + \langle (S_2 - S_3)^2 \rangle - \\ &\quad - \langle (S_1 - S_3)^2 \rangle - \langle (S_2 - S_4)^2 \rangle]. \end{aligned}$$

Для отдельных входящих в это выражение слагаемых можно применить выведенные в предыдущем параграфе формулы (13а — в), в которые можно подставить выражение

$$D_S(\rho) = 0,73 C_\epsilon^2 k^2 L \rho^{5/3} \quad (22)$$

для структурной функции фазы плоской волны, получающейся из (7) умножением на k^2 . При вычислении следует различать два случая. Если выполняется соотношение $L \operatorname{tg} \left(\frac{\gamma}{2} \right) < \frac{b}{2}$ и лучи 2, 3 не пересекаются, мы должны подсчитывать член $\langle (S_2 - S_3)^2 \rangle$ по формуле (13б). В противоположном случае расчет этого члена ведется по формуле (13в).

Вычисления проводятся элементарно, в результате мы получаем следующее выражение для коэффициента корреляции (нормированное на единицу при $\gamma = 0$):

$$b_{\Delta S}(\gamma) = \begin{cases} \frac{3}{16} \frac{(1+x)^{5/3} - (1-x)^{5/3} - 2x^{5/3}}{x} & \text{при } x \equiv \frac{2L \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{b} < 1, \\ \frac{3}{16} \frac{(x+1)^{5/3} + (x-1)^{5/3} - 2x^{5/3}}{x} & \text{при } x = \frac{2L \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}}{b} > 1. \end{cases} \quad (23)$$

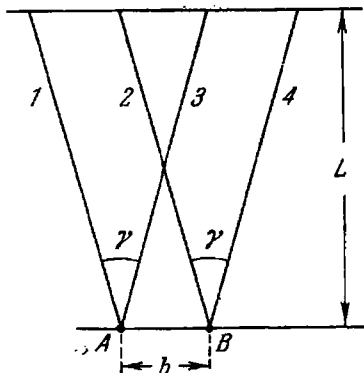


Рис. 44. Расположение лучей при вычислении флуктуаций разности фаз для плоских волн, распространяющихся под углом друг к другу.

§ 43. Границы применимости первого приближения геометрической оптики

Метод геометрической оптики в той форме, в какой он был применен выше, включает в себя два различных разложения. Первое из них проводится по параметру k^{-1} , т. е. фактически по отношению λ/λ_0 , где λ_0 — внутренний масштаб турбулентности. В результате этого разложения было получено уравнение эйконала и уравнение, связывающее амплитуду и фазу волны. Для случая, когда рассматривается распространение волн в слоисто-неоднородной среде, уравнение эйконала может быть решено точно. В этом случае границы применимости метода геометрической оптики определяются следующими членами разложения по λ/λ_0 . Однако в случае распространения волн в среде со случайными неоднородностями само уравнение эйконала решается приближенно, путем разложения по малому параметру $\epsilon_1 = \epsilon - \langle \epsilon \rangle$. В этом случае границы применимости метода будут ограничиваться также нелинейными эффектами, связанными с членами порядка ϵ_1^2 . Рассматривая вопрос о границах применимости всего метода в целом, следует сначала рассмотреть вторую часть задачи.

В § 39 получено разложение функции $\theta(r)$ в ряд по величине $v = \sqrt{\langle \epsilon_1^2 \rangle}$.

Комбинируя формулы (19.39), (21.39), запишем выражение для θ с точностью до членов порядка ϵ_1^3 :

$$\begin{aligned} \theta(l_0 s) &= \theta(l_0 s + \delta x(s)) - \delta x(s) \nabla \theta(l_0 s + \delta x(s)) = \\ &= s + \frac{1}{2} \int_0^s \epsilon_1(l_0 s') ds' + \frac{1}{2} \int_0^s \delta x(s') \nabla \epsilon_1(l_0 s') ds' - \delta x(s) \delta l(s) + \dots \end{aligned} \quad (i)$$

Подставляя выражения (12.39) и (13.39), после простых преобразований можно привести (1) к виду

$$\begin{aligned} \theta(l_0 s) &= s + \frac{1}{2} \int_0^s \epsilon_1(l_0 s') ds' - \frac{1}{2} \int_0^s ds' \int_0^{s'} ds'' \times \\ &\times (s - s') [\nabla \epsilon_1(l_0 s') \nabla \epsilon_1(l_0 s'') - (l_0 \nabla \epsilon_1(l_0 s')) (l_0 \nabla \epsilon_1(l_0 s''))] + \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Найдем среднее значение поправки к θ , возникающей из-за нелинейных эффектов

$$\begin{aligned} \langle \delta \theta(l_0 s) \rangle &= -\frac{1}{2} \int_0^s (s - s') ds' \int_0^{s'} \langle \nabla \epsilon_1(l_0 s') \nabla \epsilon_1(l_0 s'') - \\ &- (l_0 \nabla \epsilon_1(l_0 s')) (l_0 \nabla \epsilon_1(l_0 s'')) \rangle ds'' \end{aligned} \quad (3)$$

Вычислим входящее под знак интеграла среднее значение. Дифференцируя формулу

$$B_{\epsilon}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \langle \epsilon_1(\mathbf{r}_1) \epsilon_1(\mathbf{r}_2) \rangle,$$

получим

$$\left\langle \frac{\partial \epsilon_1(\mathbf{r}_1)}{\partial x_i^1} \frac{\partial \epsilon_1(\mathbf{r}_2)}{\partial x_k^2} \right\rangle = - \frac{\partial^2 B_{\epsilon}(\rho)}{\partial \xi_i \partial \xi_k}, \quad (4)$$

где $\rho = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, $\rho = \{\xi_1, \xi_2, \xi_3\}$. В случае локально изотропной турбулентности $B_{\epsilon}(\rho) = B_{\epsilon}(\rho)$ и

$$\frac{\partial B_{\epsilon}(\rho)}{\partial \xi_i} = B'_{\epsilon}(\rho) \frac{\xi_i}{\rho}, \quad \frac{\partial^2 B_{\epsilon}(\rho)}{\partial \xi_i \partial \xi_k} = B''_{\epsilon}(\rho) \frac{\xi_i \xi_k}{\rho^3} + \frac{B'_{\epsilon}(\rho)}{\rho^3} (\rho^2 \delta_{ik} - \xi_i \xi_k). \quad (5)$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \epsilon_1(l_0 s') \nabla \epsilon_1(l_0 s'') - (l_0 \nabla \epsilon_1(l_0 s')) (l_0 \nabla \epsilon_1(l_0 s'')) \rangle = \\ = - (\delta_{ik} - l_i^0 l_k^0) \frac{\partial^2 B_{\epsilon}(\rho)}{\partial \xi_i \partial \xi_k}. \end{aligned} \quad (6)$$

В нашем случае $\rho = l_0 s' - l_0 s'' = l_0 (s' - s'')$, $\rho = s' - s''$, $\rho / \rho = l_0$ и $\xi_i / \rho = l_i^0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \nabla \epsilon_1' \nabla \epsilon_1'' - (l_0 \nabla \epsilon_1') (l_0 \nabla \epsilon_1'') \rangle = \\ = - (\delta_{ik} - l_i^0 l_k^0) \left[B''_{\epsilon}(\rho) l_i^0 l_k^0 + \frac{B'_{\epsilon}(\rho)}{\rho} (\delta_{ik} - l_i^0 l_k^0) \right] = - \frac{2B'_{\epsilon}(\rho)}{\rho}. \end{aligned} \quad (7)$$

(Использовано равенство $\delta_{ii} = 3$.) Дифференцируя равенство $D_{\epsilon}(\rho) = 2B_{\epsilon}(0) - 2B_{\epsilon}(\rho)$, получим $-2B'_{\epsilon}(\rho) = D'_{\epsilon}(\rho)$, так что (7) принимает вид

$$\langle \nabla \epsilon_1' \nabla \epsilon_1'' - (l_0 \nabla \epsilon_1') (l_0 \nabla \epsilon_1'') \rangle = \frac{D'_{\epsilon}(\rho)}{\rho} = \frac{D'_{\epsilon}(s' - s'')}{s' - s''}. \quad (8)$$

Подставляя (8) в (3), получим

$$\langle \delta \theta(l_0 s) \rangle = - \frac{1}{2} \int_0^s (s - s') ds' \int_0^{s'} \frac{D'_{\epsilon}(s' - s'')}{s' - s''} ds''. \quad (9)$$

Произведем замену переменных, положив $s'' = s' - \rho$. После этого изменим порядок интегрирования по s' и ρ и выполним интегрирование по s' . В результате получим формулу

$$\langle \delta \theta(l_0 s) \rangle = - \frac{1}{4} \int_0^s \frac{(s - \rho)^2}{\rho} D'_{\epsilon}(\rho) d\rho. \quad (10)$$

Функция $D'_\epsilon(\rho)/\rho$ имеет резкий максимум вблизи точки $\rho = 0$ (если $D_\epsilon(\rho) = C_\epsilon^2 \rho^{2/3}$, то $\frac{D'_\epsilon(\rho)}{\rho} \rightarrow \infty$ при $\rho \rightarrow 0$, но при учете влияния вязкости и теплопроводности этот предел становится конечным). Поэтому основное значение в (10) имеет область малых ρ и можно положить $(s - \rho)^2 \approx s^2$, а предел интегрирования распространить до бесконечности. Тогда получим

$$\langle \delta\theta \rangle = -\frac{s^2}{4} \int_0^\infty \frac{D'_\epsilon(\rho)}{\rho} d\rho. \quad (11)$$

Сравнивая это выражение с формулой (32.40) для среднего квадрата флуктуаций угла прихода (мы обозначим дистанцию через L вместо x)

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{L}{4} \int_0^\infty \frac{D'_\epsilon(\rho)}{\rho} d\rho,$$

получим соотношение

$$\langle \delta\theta \rangle = -L \langle \alpha^2 \rangle = -L \sigma_\alpha^2(L). \quad (12)$$

Найдем теперь условие, при котором можно пренебрегать поправкой $\langle \delta\theta \rangle$. Эту величину следует сравнивать с характерным значением флуктуаций разности оптических путей на расстояниях порядка радиуса корреляции флуктуаций угла прихода волны (на таких расстояниях фронт волны поворачивается как целое). Соответствующее значение разности оптических путей равно $\lambda_0 \sigma_\alpha$. Следовательно, условие, при котором можно пренебрегать нелинейной поправкой к θ , имеет вид $L \sigma_\alpha^2 \ll \lambda_0 \sigma_\alpha$ или

$$\sigma_\alpha \ll \frac{\lambda_0}{L}. \quad (13)$$

Условие (13) можно также записать в иной форме. Подставляя в (13)

$$\sigma_\alpha^2 = 0,82 C_\epsilon^2 L \lambda_0^{-1/3},$$

получим

$$\frac{L^2 \sigma_\alpha^2}{\lambda_0^2} = 0,82 C_\epsilon^2 L^3 \lambda_0^{-1/3} \ll 1.$$

Величина $C_\epsilon^2 L^3 \lambda_0^{-1/3}$ пропорциональна среднему квадрату флуктуаций амплитуды волны. Следовательно, условие (13) можно также записать в виде

$$\langle \chi^2 \rangle \ll 1, \quad (14)$$

т. е. флуктуации амплитуды должны быть малы. Необходимо рассмотреть еще одно условие применимости, связанное с тем, что при выводе формулы (19.39) для θ было использовано разложение величины ε_1 в ряд Тейлора

$$\varepsilon_1(l_0 s + \delta x(s)) = \varepsilon_1(l_0 s) + \nabla \varepsilon_1(l_0 s) \delta x(s) + \dots$$

Ясно, что такое разложение законно лишь в том случае, если величина δx мала по сравнению с внутренним масштабом турбулентности, так как лишь при $|\delta x^2| \ll \lambda_0^2$ приращения ε_1 линейны по δx . Поэтому помимо (14) необходимо требовать выполнения условия $\langle \delta x^2 \rangle \ll \lambda_0^2$. Найдем величину $\langle \delta x^2 \rangle$. Используя выражение (13.39), получим

$$\langle \delta x^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_0^s \int_0^s (s-s')(s-s'') \langle \nabla \varepsilon_1(l_0 s') \nabla \varepsilon_1(l_0 s'') - (l_0 \nabla \varepsilon_1')(l_0 \nabla \varepsilon_1'') \rangle ds' ds'' \quad (15)$$

Подставляя (8), получим

$$\langle \delta x^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_0^s ds' \int_0^s ds'' (s-s')(s-s'') \frac{D'_\varepsilon(s'-s'')}{s'-s''} \quad (16)$$

Произведем замену переменных $s' - s'' = \rho$, $s - s' = \xi$:

$$\langle \delta x^2 \rangle = \frac{1}{4} \int_0^s \xi d\xi \int_{-\xi}^{\xi} (\xi + \rho) \frac{D'_\varepsilon(\rho)}{\rho} d\rho \quad (17)$$

В интеграле (17), как и в (10), существенна лишь область малых ρ , поэтому можно заменить $\xi + \rho$ на ξ , а интегрирование по ρ распространить от минус до плюс бесконечности. В результате получим формулу

$$\langle \delta x^2 \rangle = \frac{s^3}{6} \int_0^\infty \frac{D'_\varepsilon(\rho)}{\rho} d\rho \quad (18)$$

где учтена четность функции $D'_\varepsilon(\rho)/\rho$. Выражая входящий в (18) интеграл через $\sigma_\alpha^2(L)$, найдем, заменяя s на L ,

$$\langle \delta x^2 \rangle = \frac{2}{3} L^3 \sigma_\alpha^2(L) \quad (19)$$

Условие малости $\langle \delta x^2 \rangle \ll \lambda_0^2$ принимает вид

$$\frac{L^3 \sigma_\alpha^2}{\lambda_0^2} \ll 1,$$

что после подстановки σ_2^2 снова приводит к условию (14). То обстоятельство, что условие $\langle \delta x^2 \rangle \ll \lambda_0^2$ совпадает с условием $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$, легко объяснить при помощи простых рассуждений. Действительно, флуктуации амплитуды вызываются изменением сечения лучевой трубки, и в тех местах, где это изменение велико, одновременно велики как $\langle \delta x^2 \rangle$, так и $\langle \chi^2 \rangle$.

Условие $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$ появилось в результате приближенного решения уравнения эйконала. В тех случаях, когда это уравнение решается точно (например, для слоистых сред), условие (14) не является необходимым.

Перейдем теперь к нахождению условий, при которых можно не учитывать высших приближений геометрической оптики*). Волновое поле $\Psi(r)$ мы искали в виде ряда

$$\Psi(r) = \left[F_0 + \frac{1}{k} F_1 + \frac{1}{k^2} F_2 + \dots \right] \exp(ik\theta),$$

причем ограничились определением величин θ и F_0 . Уравнение для F_1 имеет вид (см. (7.38))

$$2\nabla F_1 \nabla \theta + F_1 \Delta \theta = i \Delta F_0. \quad (20)$$

Подставим в (20) найденные выше выражения для θ , $F_0 = A$ и $\nabla \theta = n\mathbf{l} = \left(1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1\right) (\mathbf{l}_0 + \delta\mathbf{l} + \dots) = \mathbf{l}_0 + \left(\frac{1}{2} \mathbf{l}_0 \varepsilon_1 + \delta\mathbf{l}\right) + \dots$

Для плоской волны

$$\Delta \theta = \operatorname{div} \left(\frac{1}{2} \mathbf{l}_0 \varepsilon_1 + \delta\mathbf{l} \right) + \dots$$

Для $\chi = \ln(A/A_0)$ мы имеем выражение (46.40), в котором, как было установлено, можно оставить лишь интегральный член:

$$\chi(x, y, z) = -\frac{1}{4} \int_0^x (x - \xi) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi. \quad (21)$$

Дифференцируя формулу $A = A_0 \exp(\chi)$, получим

$$\Delta A = A_0 \exp(\chi) [\Delta \chi + (\nabla \chi)^2].$$

Поскольку мы будем считать условие (14) выполненным, можно считать $|\chi| \ll 1$. В этом случае $\Delta A \approx A_0 \Delta \chi$. Дифференцируя (21), получим

$$\Delta \chi(x, y, z) = -\frac{1}{4} \int_0^x (x - \xi) \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi - \frac{1}{4} \Delta_{\perp} \varepsilon_1(x, y, z).$$

*) По этому поводу см. также [94].

В этом выражении также можно оставить лишь интегральный член; тогда для ΔA получим

$$\Delta A(x, y, z) \approx -\frac{A_0}{4} \int_0^x (x - \xi) \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi. \quad (22)$$

Мы имеем теперь все выражения, которые следует подставить в уравнение (20). Так как правая часть (20) линейна по ε_1 и $\nabla\theta$ включает в себя член l_0 , то ясно, что F_1 также содержит линейное по ε_1 слагаемое. Если ограничиться лишь этим членом в выражении для F_1 , то можно положить $\nabla\theta = l_0$ и $\Delta\theta = 0$, так как учет остальных членов уравнения (20) приведет к членам более высокого порядка малости по ε_1 в F_1 . Таким образом, уравнение (20) принимает вид

$$2 \frac{\partial F_1}{\partial x} = -\frac{iA_0}{4} \int_0^x (x - \xi) \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi, \quad (23)$$

где учтено, что $l_0 = \{1, 0, 0\}$.

Интегрируя уравнение (23) с начальным условием $F_1(0, y, z) = 0$, получим

$$F_1(x, y, z) = -\frac{iA_0}{8} \int_0^x dx' \int_0^{x'} (x' - \xi) \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi. \quad (24)$$

Изменим порядок интегрирования, после чего выполним интегрирование по x' :

$$F_1(x, y, z) = -\frac{iA_0}{16} \int_0^x (x - \xi)^2 \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi. \quad (25)$$

Найдем величину $Q(x, y, z) = \langle |F_1(x, y, z)|^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} Q(L, y, z) &= \\ &= \left(\frac{A_0}{16}\right)^2 \int_0^L \int_0^L (L - \xi_1)^2 (L - \xi_2)^2 \langle \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi_1, y, z) \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi_2, y, z) \rangle d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Для случая однородной турбулентности имеет место формула

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi_1, y_1, z_1) \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi_2, y_2, z_2) \rangle &= \\ &= \Delta_{\perp}^4 B_{\varepsilon}(\xi_1 - \xi_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2) = \\ &= -\frac{1}{2} \Delta_{\perp}^4 D_{\varepsilon}(\xi_1 - \xi_2, y_1 - y_2, z_1 - z_2). \end{aligned} \quad (27)$$

Подставляя (27) в (26), получим

$$Q(L, y, z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{16}\right)^2 \int_0^L \int_0^L (L - \xi_1)^2 (L - \xi_2)^2 \Delta_{\perp}^4 D_{\epsilon}(\xi_1 - \xi_2, 0, 0) d\xi_1 d\xi_2. \quad (28)$$

Произведем замену переменных $\xi_1 - \xi_2 = \xi$, $\xi_1 + \xi_2 = 2x$. Так как функция $\Delta_{\perp}^4 D_{\epsilon}(\xi, 0, 0)$ быстро убывает, то интегрирование по ξ можно распространить па пределы $(-\infty, +\infty)$. Тогда

$$Q(L, y, z) = -\frac{1}{2} \left(\frac{A_0}{16}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp}^4 D_{\epsilon}(\xi, 0, 0) d\xi \int_0^L \left(L - x - \frac{\xi}{2}\right)^2 \left(L - x + \frac{\xi}{2}\right)^2 dx. \quad (29)$$

Так как в интеграле по ξ существенна лишь область $|\xi| \lesssim \lambda_0$, во внутреннем интеграле можно пренебречь величиной ξ по сравнению с $L - x$. Выполняя интегрирование по x , получим

$$Q(L, y, z) = -\frac{L^5}{10} \left(\frac{A_0}{16}\right)^2 \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp}^4 D_{\epsilon}(\xi, 0, 0) d\xi. \quad (30)$$

Выразим величину Q через спектр флуктуаций. Дифференцируя формулу

$$D_{\epsilon}(\xi, y, z) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(\kappa_1 \xi + \kappa_2 y + \kappa_3 z)}] \Phi_{\epsilon}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) d^3 \kappa$$

по y, z , получим

$$\Delta_{\perp}^4 D_{\epsilon}(\xi, y, z) = -2 \iiint_{-\infty}^{\infty} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^4 e^{i(\kappa_1 \xi + \kappa_2 y + \kappa_3 z)} \Phi_{\epsilon}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) d^3 \kappa.$$

Полагая здесь $y = z = 0$ и интегрируя по ξ , получим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp}^4 D_{\epsilon}(\xi, 0, 0) d\xi &= -2 \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\epsilon}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^4 d^3 \kappa \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa_1 \xi} d\xi = \\ &= -4\pi \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\epsilon}(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^4 \delta(\kappa_1) d^3 \kappa = \\ &= -4\pi \iint_{-\infty}^{\infty} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2)^4 \Phi_{\epsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned}$$

Для случая локально изотропной турбулентности, когда

$$\Phi_{\varepsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3) = \Phi_{\varepsilon}(\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}) = \Phi_{\varepsilon}(\kappa),$$

в последнем интеграле можно ввести полярные координаты и выполнить интегрирование по угловой переменной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \Delta_{\perp}^4 D_{\varepsilon}(\xi, 0, 0) d\xi = -8\pi^2 \int_0^{\infty} \kappa^3 \Phi_{\varepsilon}(\kappa) d\kappa.$$

Следовательно, (30) принимает вид

$$Q(L, y, z) = \frac{4\pi^2 L^5}{5} \left(\frac{A_0}{16}\right)^2 \int_0^{\infty} \kappa^3 \Phi_{\varepsilon}(\kappa) d\kappa. \quad (31)$$

Подставим в (31) $\Phi_{\varepsilon}(\kappa) = 0,033 C_{\varepsilon}^2 \kappa^{-11/2} \exp(-\kappa^2 / \kappa_m^2)$. Выполняя интегрирование, получим для величины Qk^{-2}

$$\begin{aligned} \frac{1}{k^2} Q &= \frac{L^5}{5} \left(\frac{A_0}{16}\right)^2 \frac{0,033 \Gamma\left(\frac{19}{6}\right)}{2} C_{\varepsilon}^2 \kappa_m^{11/2} \lambda^2 = \\ &= 3,4 \cdot 10^{-5} A_0^2 L^5 C_{\varepsilon}^2 \kappa_m^{11/2} \lambda^2 = 2,6 A_0^2 L^5 C_{\varepsilon}^2 \lambda_0^{-11/2} \lambda^2. \quad (32) \end{aligned}$$

Чтобы получить границы применимости первого приближения геометрической оптики, следует сравнить величину

$$Qk^{-2} \text{ с } \langle (A - A_0)^2 \rangle \approx A_0^2 \langle \chi^2 \rangle$$

и потребовать малости их отношения. Используя формулу

$$\langle \chi^2 \rangle = 0,80 C_{\varepsilon}^2 L^3 \lambda_0^{-7/2},$$

получим необходимое условие в виде

$$\frac{2,6 A_0^2 L^5 C_{\varepsilon}^2 \lambda^2 \lambda_0^{-11/2}}{0,8 \chi^2 A_0^2 L^3 \lambda_0^{-7/2}} = 3,2 \frac{L^2 \lambda^2}{\lambda_0^4} \ll 1. \quad (33)$$

Таким образом, помимо условия $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$, должно также выполняться условие (33), согласно которому радиус первой зоны Френеля не должен превышать внутреннего масштаба турбулентности λ_0 [98, 99]. Следует отметить, что, так как величина F_1 чисто

мнимая, условие (33), по существу, обеспечивает отсутствие искажений в фазе волны за счет пренебрежения высшими приближениями разложения

$$\Psi = \left(F_0 + \frac{1}{k} F_1 + \dots \right) \exp(ik\theta).$$

§ 44. Флуктуации параметров звуковой волны

В заключение настоящего раздела мы рассмотрим флуктуации звуковых волн в приближении геометрической оптики. В разделе Б гл. 2 было получено уравнение (15.34) для безразмерного давления акустической волны $\Pi \equiv \frac{P_a}{\rho_0 c_0^2}$:

$$\Delta \Pi + k^2 \Pi = - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{T'}{T_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{ik} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_k} \left(\frac{u_i}{c_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_k} \right), \quad (1)$$

где T' — флуктуации температуры, u — скорость ветра, а вместо ω подставлено kc_0 . Разделим уравнение (1) на Π и используем формулы, которые легко проверить непосредственным вычислением:

$$\frac{\Delta \Pi}{\Pi} = \Delta \ln \Pi + (\nabla \ln \Pi)^2, \quad (2)$$

$$\frac{1}{\Pi} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{T'}{T_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_i} \right) = \operatorname{div} \left[\frac{T'}{T_0} (\nabla \ln \Pi) \right] + \frac{T'}{T_0} (\nabla \ln \Pi)^2, \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Pi} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{u_i}{c_0} \frac{\partial \Pi}{\partial x_j} \right) &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \left(\frac{u_i}{c_0} \frac{\partial \ln \Pi}{\partial x_j} \right) + \frac{u_i}{c_0} \frac{\partial}{\partial x_i} (\nabla \ln \Pi)^2 + \\ &+ \frac{\partial \ln \Pi}{\partial x_i} \left[\frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{c_0} \frac{\partial \ln \Pi}{\partial x_j} \right) + \frac{u_i}{c_0} (\nabla \ln \Pi)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Положим в (2) — (4) $\ln \Pi = \chi + ik\theta$, где $\chi = \ln A$ и θ — эйконал. Подставляя эти выражения в (1) и приравнявая нулю члены уравнения, стоящие с коэффициентом k^2 , получим уравнение

$$(\nabla \theta)^2 \left[1 + \frac{T'}{T_0} + 2 \frac{u_i}{c_0} \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right] = 1. \quad (5)$$

Так как уравнение (1) выводилось лишь с точностью до линейных по T' и u членов, то (5) можно с той же точностью представить в виде

$$(\nabla \theta)^2 = 1 - \frac{T'}{T_0} - 2 \frac{u_i}{c_0} \frac{\partial \theta}{\partial x_i}. \quad (6)$$

При произвольных функциях $T'(r)$ и $u(r)$ уравнение (6) можно решать лишь приближенно, полагая

$$\nabla\theta = n\mathbf{l} = (1 + n_1)(\mathbf{l}_0 + \delta\mathbf{l} + \dots) = \mathbf{l}_0 + n_1\mathbf{l}_0 + \delta\mathbf{l} + \dots,$$

где n_1 — отклонение показателя преломления от единицы, \mathbf{l}_0 — касательный к лучу единичный вектор, $|\mathbf{l}_0| = 1$, $\mathbf{l}_0\delta\mathbf{l} = 0$. Подставляя это разложение в (6) и сохраняя лишь линейные по n_1 , T' и u члены, получим

$$n_1 = -\frac{T'}{2T_0} - \frac{u\mathbf{l}_0}{c_0}. \quad (7)$$

Таким образом, отклонение показателя преломления звука от единицы складывается из двух членов. Первый из них связан с флуктуацией местной скорости звука, второй — со «сносом» звуковой волны ветром. С учетом (7) уравнение (6) может быть представлено в виде обычного уравнения эйконала

$$(\nabla\theta)^2 = (1 + n_1)^2 = n^2. \quad (8)$$

Однако необходимо помнить, что при переходе от (5) к (8) несколько раз существенно использовалась малость параметра n_1 (для случая электромагнитных волн уравнение типа (8) было получено лишь при помощи разложения по $1/k$).

Если после подстановки (2)—(4) в (1) собрать группу членов при первой степени k , то мы получим уравнение, связывающее χ и θ . Это уравнение содержит $(\nabla\theta)^2$. Если использовать для $(\nabla\theta)^2$ формулу (6) и учесть лишь линейные по T'/T_0 и u/c_0 члены, то это уравнение примет вид

$$\begin{aligned} 2\nabla\chi \left[\nabla\theta + \frac{T'}{T_0} \nabla\theta + \frac{u}{c_0} + 2\left(\frac{u}{c_0} \nabla\theta\right) \nabla\theta \right] = \\ = -\Delta\theta - \operatorname{div} \left(\frac{T'}{T_0} \nabla\theta \right) - 2 \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{c_0} \frac{\partial\theta}{\partial x_j} \right). \quad (9) \end{aligned}$$

В правой части (9) стоит малая (линейно зависящая от T' , u) величина. Поэтому ясно, что $\nabla\chi$ также будет иметь порядок малости T' , u . Отсюда следует, что коэффициент при $\nabla\chi$ следует взять лишь в нулевом приближении, т. е. положить равным $2\mathbf{l}_0$. Тогда

$$2\nabla\chi\mathbf{l}_0 = 2 \frac{d\chi}{ds}. \quad (10)$$

В правой части (9) следует положить $\nabla\theta = \mathbf{l}_0$ во втором и третьем слагаемых, где уже имеются малые множители T'/T_0 и u/c .

Тогда мы получим уравнение

$$2 \frac{d\chi}{ds} = -\Delta\theta - \operatorname{div} \left(l_0 \frac{T'}{T_0} \right) - 2l_i^0 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{c_0} l_j^0 \right). \quad (11)$$

В дальнейшем мы для простоты рассмотрим случай плоской падающей волны, когда $l_0 = \text{const}$. В этом случае

$$\operatorname{div} \left(l_0 \frac{T'}{T_0} \right) = l_0 \nabla \left(\frac{T'}{T_0} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{T'}{T_0} \right)$$

и

$$l_i^0 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i}{c_0} l_j^0 \right) = l_j^0 \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{u_i l_i^0}{c_0} \right) = \frac{d}{ds} \left(\frac{u_s}{c_0} \right),$$

где $u_s = l_i^0 u_i$ — проекция скорости на луч. Тогда (11) принимает вид

$$2 \frac{d\chi}{ds} = -\Delta\theta - \frac{d}{ds} \left(\frac{T'}{T_0} \right) - 2 \frac{d}{ds} \left(\frac{u_s}{c_0} \right) = -\Delta\theta + 2 \frac{dn_1}{ds}. \quad (12)$$

Интегрируя (12) вдоль луча, получим

$$2\chi = 2n_1 - \int \Delta\theta ds. \quad (13)$$

Но, как мы убедились выше, при расчете флуктуации амплитуды интегральный член в (13) значительно превосходит локальный член n_1 , который может быть отброшен. В этом случае связь между амплитудой и эйковалом для звуковой волны выражается той же формулой, что и для электромагнитного поля.

Все расчеты флуктуаций амплитуды, фазы и других характеристик, проведенные выше, могут быть перенесены и на случай звуковых волн, если заменить величину ε_1 , входящую в формулы для электромагнитного случая, на величину

$$\varepsilon_1 = 2n_1 = -\frac{T'}{T_0} - \frac{2ul_0}{c_0}. \quad (14)$$

Структурная функция величины ε_1 может быть выражена через структурные функции $D_T(r)$ и $D_{ij}(r)$ полей T' и u . Если предположить некоррелированность полей T' и u (она всегда имеет место в локально изотропном турбулентном потоке), то легко получить формулу

$$D_{\varepsilon_1}(r) = \frac{D_T(r)}{T_0^2} + \frac{4l_i^0 l_j^0}{c_0^2} D_{ij}(r). \quad (15)$$

В отличие от электромагнитного случая функция $D_{\epsilon^*}(\mathbf{r})$ не является изотропной; она зависит от взаимной ориентации векторов \mathbf{l}_0 и \mathbf{r} .

В случае локально изотропной турбулентности для $D_{ij}(\mathbf{r})$ справедливо выражение

$$D_{ij}(\mathbf{r}) = D_{ii}(\mathbf{r}) \delta_{ij} + (D_{rr} - D_{ii}) n_i n_j, \quad (16)$$

где $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$. Используя (16), найдем

$$l_i^0 l_j^0 D_{ij}(\mathbf{r}) = D_{ii} + (D_{rr} - D_{ii}) (l_0 r)^2 = D_{ii} \sin^2 \varphi + D_{rr} \cos^2 \varphi, \quad (17)$$

где φ — угол между векторами \mathbf{l}_0 и \mathbf{n} . Таким образом,

$$D_{\epsilon^*}(\mathbf{r}) = \frac{D_T(\mathbf{r})}{T_0^2} + \frac{4}{c_0^2} [D_{ii}(\mathbf{r}) \sin^2 \varphi + D_{rr}(\mathbf{r}) \cos^2 \varphi]. \quad (18)$$

Рассмотрим структурную функцию фазы плоской волны. Для нее было получено выражение в виде двойного интеграла по двум параллельным лучам, причем в подынтегральное выражение входили структурные функции ϵ , аргументом которых был вектор $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, соединяющий две точки интегрирования на лучах. Мы рассматриваем случай, когда длина трассы L намного превосходит расстояние ρ между лучами. В этом случае в большей части области интегрирования угол φ очень мал. Условие $\sin^2 \varphi \ll 1$ может нарушаться лишь в небольшой части области интегрирования, которая вносит малый вклад в интеграл. Поэтому при расчетах флуктуаций звуковой волны в формуле (18) можно положить $\varphi = 0$, т. е. считать

$$D_{\epsilon^*}(\mathbf{r}) \approx \frac{D_T(\mathbf{r})}{T_0^2} + \frac{4D_{rr}(\mathbf{r})}{c_0^2}. \quad (19)$$

Функции $D_T(\mathbf{r})$ и $D_{rr}(\mathbf{r})$ имеют, вообще говоря, несколько различных внутренних масштабов, однако ввиду того, что число Прандтля для воздуха близко к единице, их с достаточной точностью можно считать равными. В этом случае все полученные выше формулы остаются без изменения *), если под C_{ϵ} понимать величину

$$C_{\epsilon}^2 = \frac{C_T^2}{T_0^2} + \frac{4C_{rr}^2}{c_0^2}, \quad (20)$$

) Более детальный учет анизотропности функции $D_{\epsilon^}(\mathbf{r})$ приводит к небольшим изменениям численных коэффициентов в формулах для средних квадратов флуктуаций.

где C — численная постоянная, входящая в «закон $2/3$ » для продольной компоненты скорости, C_T^2 — структурная характеристика, входящая в «закон $2/3$ » для температурного поля.

В. МЕТОД ПЛАВНЫХ ВОЗМУЩЕНИЙ

Рассмотренный в предыдущем разделе метод геометрической оптики приспособлен для решения задачи о распространении коротких волн. Его границы применимости определены условиями: $\lambda \ll \lambda_0$, $\lambda^2 L^2 \ll \lambda_0^4$, $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$, где λ — длина волны, λ_0 — внутренний масштаб турбулентности, L — расстояние, проходимое волной в неоднородной среде, $\langle \chi^2 \rangle$ — средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды волны. Первые два ограничения вызваны приближенным методом решения волнового уравнения, третье — приближенным решением уравнения эйконала.

Метод геометрической оптики может быть улучшен. В частности, второе ограничение может быть в значительной степени ослаблено, если учесть дифракционные эффекты.

Наиболее удобным методом для построения уточненных решений является метод плавных возмущений, предложенный С. М. Рытовым [100] и примененный к задаче о распространении в среде со случайными неоднородностями А. М. Обуховым [101], Черновым [92, 102—104] и многими другими авторами [105—112].

Этот метод, так же как и метод геометрической оптики, приспособлен для изучения распространения коротких ($\lambda \ll \lambda_0$) волн. Однако в нем снято ограничение $\lambda^2 L^2 \ll \lambda_0^4$, устанавливающее границы применимости первого приближения геометрической оптики. Более того, метод плавных возмущений применим и в тех случаях, когда теряют силу не только первое, но и высшие приближения геометрической оптики (см. § 45).

§ 45. Вывод основных уравнений метода плавных возмущений

Как и в методе геометрической оптики, мы будем исходить из скалярного уравнения, поскольку при $\lambda \ll \lambda_0$ поляризационные поправки малы. Мы будем рассматривать случай монохроматической волны, в которой зависимость от времени определяется множителем $\exp(-i\omega t)$. В этом случае волновое уравнение принимает форму

$$\Delta \Psi + k^2 (1 + \epsilon_1) \Psi = 0. \quad (1)$$

Разделив уравнение (1) на Ψ и учитывая, что $\frac{\Delta \Psi}{\Psi} = \Delta \ln \Psi + (\nabla \ln \Psi)^2$, получим уравнение

$$\Delta \Phi + (\nabla \Phi)^2 + k^2 + k^2 \epsilon_1 = 0, \quad (2)$$

где $\Phi = \ln \Psi$ — комплексная фаза. К уравнению (2) следует добавить условие излучения.

Уравнение (2), так же как и уравнение эйконала, является нелинейным. Основное преимущество метода геометрической оптики, объясняющее его широкое применение, заключается в том, что в случае слоистых сред нелинейное уравнение эйконала решается точно (то же относится и к квазиклассическому приближению квантовой механики).

Однако в рассматриваемом нами случае, когда $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ — произвольная функция из некоторого статистического ансамбля, точное решение уравнения эйконала получить не удастся и это уравнение решается лишь приближенно методом последовательных приближений. В этом случае оказывается целесообразным решать не уравнение эйконала, уже являющееся приближенным, а уравнение (2), являющееся точным следствием (1).

Введем малый параметр $\nu = \sqrt{\langle \varepsilon_1^2 \rangle}$ и положим $\varepsilon_1(\mathbf{r}) = \nu \alpha(\mathbf{r})$. Функцию $\Phi(\mathbf{r})$ будем искать в виде ряда по степеням ν :

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \nu \Phi^{(1)}(\mathbf{r}) + \nu^2 \Phi^{(2)}(\mathbf{r}) + \dots$$

Подставляя это разложение в уравнение

$$\Delta \Phi + (\nabla \Phi)^2 + k^2 + k^2 \nu \alpha(\mathbf{r}) = 0$$

и приравнявая нулю группы членов при одинаковых степенях ν , получим уравнения:

$$\Delta \Phi_0 + (\nabla \Phi_0)^2 + k^2 = 0, \quad (3)$$

$$\Delta \Phi^{(1)} + 2 \nabla \Phi_0 \nabla \Phi^{(1)} = -k^2 \alpha(\mathbf{r}), \quad (4)$$

$$\Delta \Phi^{(2)} + 2 \nabla \Phi_0 \nabla \Phi^{(2)} = -(\nabla \Phi^{(1)})^2, \quad (5)$$

$$\Delta \Phi^{(3)} + 2 \nabla \Phi_0 \nabla \Phi^{(3)} = -2 \nabla \Phi^{(1)} \nabla \Phi^{(2)}, \quad (6)$$

.....

Нелинейное уравнение (3) может быть решено точно, так как оно соответствует распространению волн в среде без флуктуаций. Все остальные уравнения для $\Phi^{(i)}$ ($i \geq 1$) имеют одинаковую форму

$$\Delta u + 2 \nabla \Phi_0 \nabla u = -f(\mathbf{r}), \quad (7)$$

причем правые части каждого из уравнений известны, если решены предыдущие уравнения. Уравнение (7) является линейным. При помощи подстановки

$$u = e^{-\Phi_0} w \quad (8)$$

оно сводится к уравнению

$$\Delta w + k^2 w = -e^{\Phi_0} f. \quad (9)$$

Решение уравнения (9) для свободного пространства, удовлетворяющее условиям излучения, хорошо известно:

$$w(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{\Phi_0(\mathbf{r}')} f(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (10)$$

Таким образом, решение уравнения (7) имеет вид

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} e^{\Phi_0(\mathbf{r}') - \Phi_0(\mathbf{r})} f(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (11)$$

Вместо $\Phi_0(\mathbf{r})$ в формулу (11) удобнее ввести функцию $\Psi_0(\mathbf{r}) = \exp(\Phi_0(\mathbf{r}))$, являющуюся решением уравнения

$$\Delta \Psi_0 + k^2 \Psi_0 = 0$$

и представляющую собой невозмущенную волну. В этом случае (11) принимает вид

$$u(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\Psi_0(\mathbf{r}')}{\Psi_0(\mathbf{r})} f(\mathbf{r}') d^3 r'. \quad (12)$$

Подставляя в качестве $-f(\mathbf{r})$ правые части уравнений (4), (5), ..., получим $\Phi^{(1)}$, $\Phi^{(2)}$, ... Если обозначить $\Phi_1 = \nu \Phi^{(1)}$, $\Phi_2 = \nu^2 \Phi^{(2)}$ и вернуться к функции $\varepsilon_1(\mathbf{r})$, то мы получим

$$\Phi(\mathbf{r}) = \Phi_0(\mathbf{r}) + \Phi_1(\mathbf{r}) + \Phi_2(\mathbf{r}) + \dots, \quad (13)$$

$$\Phi_1(\mathbf{r}) = \frac{k^2}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\Psi_0(\mathbf{r}')}{\Psi_0(\mathbf{r})} \varepsilon_1(\mathbf{r}') d^3 r', \quad (14)$$

$$\Phi_2(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{e^{ik|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} \frac{\Psi_0(\mathbf{r}')}{\Psi_0(\mathbf{r})} [\nabla \Phi_1(\mathbf{r}')]^2 d^3 r'. \quad (15)$$

Ряд (13) является рядом по степеням малой величины ε_1 . Однако, как и в случае геометрической оптики, каждый член ряда (13) эквивалентен сумме бесконечной подпоследовательности ряда теории возмущений для уравнения

$$\Delta \Psi + k^2 \Psi = -k^2 \varepsilon_1 \Psi.$$

Действительно, $\Psi(\mathbf{r})$ выражается через Φ при помощи формулы

$\Psi(\mathbf{r}) = e^\Phi = \Psi_0 e^{\Phi_1} e^{\Phi_2} \dots$. Разлагая $\exp \Phi_1$ в ряд, получим

$$\Psi(\mathbf{r}) = \Psi_0(\mathbf{r}) \left[1 + \Phi_1 + \frac{1}{2!} \Phi_1^2 + \dots \right] e^{\Phi_2} \dots \quad (16)$$

Подставляя выражение для Φ_1 , легко убедиться в том, что даже при пренебрежении величинами Φ_2, Φ_3, \dots (16) представляет собой ряд, описывающий многократное рассеяние.

Рассмотрим более подробно случай, когда падающая волна $\Psi_0(\mathbf{r})$ плоская. Выбрав ось x вдоль направления распространения этой волны, получим

$$\Psi_0(\mathbf{r}) = A_0 \exp(ikx). \quad (17)$$

Подставляя (17) в формулы (14), (15), получим

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{k^2}{4\pi} \int \frac{\exp\{ik[\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} - (x-x')]\}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \times \\ \times \varepsilon_1(x', y', z') dx' dy' dz', \quad (18)$$

$$\Phi_2(x, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\exp\{ik[\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} - (x-x')]\}}{\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}} \times \\ \times [\nabla\Phi_1(x', y', z')]^2 dx' dy' dz'. \quad (19)$$

До сих пор при выводе выражений для Φ мы не использовали малость длины волны. Используем теперь условие $\lambda \ll \lambda_0$ для дальнейшего упрощения формул (18), (19). Обычный прием, при помощи которого исследуются выражения такого типа при $k \rightarrow \infty$, — это метод стационарной фазы (см., например, [94]). Однако в случае, когда мы хотим избавиться от ограничения $\sqrt{\lambda L} \ll \lambda_0$, этот метод в его обычной форме неприменим. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим более подробно поведение фазового множителя $\exp(iS)$, где

$$S = k[\sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} - (x-x')]. \quad (20)$$

Найдем уравнения поверхностей, на которых $S = S_m = \pi m$. После простых преобразований получаем эти уравнения в виде

$$\rho_m^2 = (y-y')^2 + (z-z')^2 = m\lambda(x-x') + \frac{m^2\lambda^2}{4}. \quad (21)$$

Уравнение (21) задает семейство параболоидов вращения, вершины которых располагаются в точках $x'_m = x + m\lambda/4$. Найдем величину $\rho_{m+1} - \rho_m = \Delta\rho_m$, равную расстоянию между соседними поверхностями. Простые вычисления дают

$$\Delta\rho_m = \sqrt{\rho_m^2 + \lambda(x-x') + \frac{m\lambda^2}{2} + \frac{\lambda^2}{4}} - \rho_m. \quad (22)$$

Для $m \gg 1$ и $(x - x') \gg m\lambda$ (22) превращается в

$$\Delta\rho_m \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda(x-x')}{m}}. \quad (23)$$

В случае, если $\sqrt{\lambda(x-x')} \gg \lambda_0$, фазовый множитель $\exp(iS)$ при изменениях ρ меняется значительно медленнее, чем функция $\varepsilon_1(x', y', z')$, которая может менять знак на расстояниях порядка нескольких λ_0 .

Поэтому в (18) вблизи оси x (т. е. для не очень больших m) множитель $\exp(iS)$ нельзя рассматривать как быстро осциллирующий, что необходимо для применения метода стационарной фазы. Это можно делать лишь в случае, если $\sqrt{\lambda(x-x')} \ll \lambda_0$, т. е. в случае применимости первого приближения геометрической оптики. Однако вдали от оси x' , т. е. при больших m , величина $\Delta\rho_m$ может стать меньше λ_0 . Соответствующее значение m можно найти из неравенства

$$\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\lambda(x-x')}{m}} \ll \lambda_0,$$

откуда

$$m \gg \frac{\lambda(x-x')}{4\lambda_0^2} \gg \frac{\lambda L}{4\lambda_0^2},$$

где L — расстояние, проходимое волной в неоднородной среде до точки наблюдения. Подставляя последнее выражение в (21), найдем соответствующие значения ρ :

$$\rho \gg \frac{\lambda L}{\lambda_0}.$$

Заметим, что область пространства, ограниченная обратным неравенством $\rho < \frac{\lambda L}{\lambda_0}$, представляет собой ту часть пространства, в которой сосредоточено рассеянное поле. Действительно, максимальный угол рассеяния имеет порядок λ/λ_0 , так что соответствующий поперечный размер имеет порядок $\lambda L/\lambda_0$.

В области $x' < x$ при $\rho \gg \frac{\lambda L}{\lambda_0}$ функция $\exp(iS)$ является быстро осциллирующей по сравнению с $\varepsilon_1(r')$. Что касается области $x' > x$, то в ней расстояние между соседними поверхностями $S = \pi m$ и $S = \pi(m+1)$ не больше, чем $\lambda/2$ (при $x' = x$ $\Delta\rho_m = \lambda/2$), т. е. при условии $\lambda \ll \lambda_0$ функция $\exp(iS)$ всегда меняется значительно быстрее, чем $\varepsilon_1(r')$.

Разобьем область интегрирования в (18) на две части плоскостью $x' = x$ и найдем вклад в Φ_1 от области $x' > x$. В этой области, как

мы установили, функция $\exp(iS)$ быстро осциллирует по сравнению с $\varepsilon_1(x')$ и поэтому интеграл может быть приближенно вычислен при помощи метода стационарной фазы.

Применяя этот метод к интегралам по y' , z' , мы должны разложить экспоненту в ряд вблизи стационарной точки $y' = y$, $z' = z$, а медленно меняющиеся множители взять в точке стационарности

$$\begin{aligned} & \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2} - (x-x') = \\ & = |x-x'| \sqrt{1 + \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{|x-x'|^2}} - (x-x') = \\ & = |x-x'| - (x-x') + \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2|x-x'|} + \dots = \\ & = 2(x'-x) - \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2(x-x')} + \dots \end{aligned}$$

Обозначая вклад в $\Phi_1(x, y, z)$ от области $x' > x$ через Φ_{11} , получим

$$\begin{aligned} \Phi_{11}(x, y, z) & \approx \frac{k^2}{4\pi} \int_x^\infty \frac{e^{-2ik(x-x')}}{(x'-x)} \varepsilon_1(x', y, z) dx' \times \\ & \times \iint_{-\infty}^\infty \exp\left\{\frac{ik}{2(x'-x)} [(y-y')^2 + (z-z')^2]\right\} dy' dz' = \\ & = \frac{k^2}{4\pi} \int_x^\infty \frac{e^{2ik(x'-x)}}{(x'-x)} \varepsilon_1(x', y, z) \frac{2\pi(x'-x)}{ik} dx' = \\ & = \frac{k}{2i} \int_0^\infty e^{2ikx'} \varepsilon_1(x+x', y, z) dx'. \quad (24) \end{aligned}$$

Так как величина Φ_{11} является случайной, оценим ее средний квадрат:

$$\langle (\Phi_{11}(x, y, z))^2 \rangle = -\frac{k^2}{4} \iint_{00}^{\infty\infty} e^{2ik(x'+x'')} B_\varepsilon(x'-x'') dx' dx'', \quad (25)$$

Вводя новые переменные $\xi = x' - x''$ и $2\eta = x' + x''$, получим

$$\langle \Phi_{11}^2(x, y, z) \rangle = -\frac{k^2}{2} \int_0^\infty B_\varepsilon(\xi) d\xi \int_{\xi/2}^\infty e^{4ik\eta} d\eta = -\frac{ik}{8} \int_0^\infty e^{2ik\xi} B_\varepsilon(\xi) d\xi. \quad (26)$$

Входящий в (26) интеграл можно вычислить приближенно, вынося медленно меняющуюся функцию $B_\varepsilon(\xi)$ за знак интеграла.

Предполагая, что среда обладает поглощением (т. е. $\text{Im}k > 0$), получим

$$\langle \Phi_{11}^2(x, y, z) \rangle \approx \frac{B_{\epsilon}(0)}{16} = \frac{\sigma_{\epsilon}^2}{16}. \quad (27)$$

Таким образом, ошибка, совершаемая при отбрасывании в (18) интеграла по области $x' > x$, лежащей за точкой наблюдения, в случае $k\lambda_0 \gg 1$ имеет порядок $\frac{1}{4}\sigma_{\epsilon} \ll 1$. Как мы увидим ниже, интегралы по области $x' < x$ всегда приводят к величинам, пропорциональным $L^{\alpha}k^{\beta}$, где $\alpha, \beta > 0$; в этом случае мы всегда можем пренебрегать величиной σ_{ϵ} по сравнению с этими «интегральными» величинами, растущими с L .

Рассмотрим теперь ту часть интеграла (18), которая распространена на область $x' < x$, $\rho \gg \frac{\lambda(x-x')}{\lambda_0}$. Ясно, что интеграл и по этой области будет иметь не больший порядок, чем Φ_{11} . Таким образом, интеграл (18) можно вычислять лишь по области $x' < x$, $\rho < \frac{\lambda(x-x')}{\lambda_0}$, совершая при этом ошибку порядка σ_{ϵ} (разумеется, аналогичные оценки справедливы и для интеграла (19)). В области $\rho < \frac{\lambda(x-x')}{\lambda_0}$ подынтегральное выражение может быть в значительной степени упрощено, если использовать соотношение $\lambda \ll \lambda_0$. В этом случае $\rho \ll (x-x')$ и мы можем воспользоваться разложением в ряд

$$k[\sqrt{(x-x')^2 + \rho^2} - (x-x')] = k[|x-x'| - (x-x') + \frac{\rho^2}{2|x-x'|} + \dots] = \frac{k\rho^2}{2(x-x')} + O\left(\frac{k\rho^4}{(x-x')^3}\right). \quad (28)$$

Основной вклад в интеграл (18) дает интегрирование по области, в которой $\rho < \frac{\lambda(x-x')}{\lambda_0}$. Потребуем, чтобы в этой области можно было ограничиться первым членом формулы (28). Это приводит к ограничению

$$\frac{k\rho^4}{(x-x')^3} \ll 2\pi,$$

а с учетом неравенства $\rho < \frac{\lambda(x-x')}{\lambda_0}$ — к условию

$$\frac{\lambda^3(x-x')}{\lambda_0^4} < \frac{\lambda^3 L}{\lambda_0^4} \ll 1. \quad (29)$$

Условие (29) является значительно менее жестким ограничением на L , чем условие применимости первого приближения геометрической оптики $\frac{\lambda L}{\lambda_0^2} \ll 1$, так как (29) можно представить в форме

$$\frac{\lambda L}{\lambda_0^2} \frac{\lambda^2}{\lambda_0^2} \ll 1 \quad \text{или} \quad \frac{\lambda L}{\lambda_0^2} \ll \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}.$$

При выполнении условия (29) можно пользоваться первым членом разложения (28) не только в области $\rho < \lambda_0^{-1} \lambda (x - x')$, но и при всех ρ , так как вклад в интеграл (18) от той области, где условие (29) нарушается, мал (он имеет порядок σ_ϵ). В действительности интеграл по области $\rho > \lambda_0^{-1} \lambda (x - x')$ с ядром, замененным по формуле (28), не совпадает с интегралом по этой же области, вычисленным с точным ядром. Однако, так как оба ядра имеют в этой области одинаковый быстро осциллирующий характер, то оценка (27) имеет место для обоих ядер.

Итак, при выполнении условия (29) и малости величины σ_ϵ по сравнению с интегралом по области $x' < x$ (уточнение второй оценки будет произведено ниже) формулы (18) и (19) можно приближенно записать в следующем виде:

$$\Phi_1(L, y, z) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^L dx' \iint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \frac{\exp \left\{ ik \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2(L-x')} \right\}}{L-x'} \epsilon_1(x', y', z'), \quad (30)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(L, y, z) &= \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_0^L dx' \iint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \frac{\exp \left\{ ik \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2(L-x')} \right\}}{L-x'} [\nabla \Phi_1(x', y', z')]^2, \end{aligned} \quad (31)$$

причем начало координат помещено на границе неоднородной среды. Выражение (30) является точным решением дифференциального уравнения

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = -k^2 \epsilon_1(x), \quad (32)$$

которое получается из уравнения (4) при подстановке в него $\nabla \Phi_0 = ik = (ik, 0, 0)$ и пренебрежении членом $\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial x^2}$. В этом можно убедиться, вычисляя производные от (30) и подставляя их в левую часть (32). При дифференцировании (30) по верхнему пределу

следует учесть легко доказываемую формулу

$$\lim_{x' \rightarrow L} \frac{k}{2\pi i (L - x')} \exp \left\{ \frac{ik [(y - y')^2 + (z - z')^2]}{2(L - x')} \right\} = \delta(y - y') \delta(z - z'),$$

являющуюся обобщением известной формулы теории теплопроводности (диффузии) на мнимый коэффициент диффузии. Само уравнение (32) аналогично уравнению диффузии в плоскости y, z , перпендикулярной направлению распространения, причем роль времени играет координата x , а коэффициент диффузии равен $D = \frac{i}{2k}$. При этом (30) представляет собой распределение «концентрации» диффундирующей примеси, создаваемой «нестационарным» источником $\epsilon_1(x', y', z')$.

В заключение настоящего параграфа рассмотрим связь метода плавных возмущений ϵ геометрической оптикой. Предположим, что выполняется соотношение $\sqrt{\lambda L} \leq \lambda_0$, так что в (30) функцию $\epsilon_1(r')$ можно считать плавно меняющейся (мы не требуем выполнения более жесткого условия $\sqrt{\lambda L} \ll \lambda_0$). Тогда к интегралу

$$\Phi_1(x, y, z) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x \frac{dx'}{x - x'} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{k(\eta^2 + \zeta^2)}{2i(x - x')} \right\} \epsilon_1(x', y + \eta, z + \zeta) d\eta d\zeta \quad (33)$$

можно применить метод стационарной фазы, который в данном случае сводится к разложению функции $\epsilon_1(x', y + \eta, z + \zeta)$ в ряд по степеням η, ζ . Так как экспонента является четной функцией η, ζ , то в этом разложении следует сохранить лишь четные по η, ζ слагаемые:

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) = & \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x \frac{dx'}{x - x'} \iint_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{k(\eta^2 + \zeta^2)}{2i(x - x')} \right\} \left[\epsilon_1(x', y, z) + \right. \\ & + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_1(x', y, z)}{\partial y^2} \eta^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \epsilon_1(x', y, z)}{\partial z^2} \zeta^2 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \epsilon_1(x', y, z)}{\partial y^4} \eta^4 + \\ & \left. + \frac{1}{4} \frac{\partial^4 \epsilon_1(x', y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \eta^2 \zeta^2 + \frac{1}{24} \frac{\partial^4 \epsilon_1(x', y, z)}{\partial z^4} \zeta^4 + \dots \right] d\eta d\zeta. \quad (34) \end{aligned}$$

Выполняя интегрирование по η, ζ , после простых вычислений получим

$$\begin{aligned} \Phi_1(x, y, z) = & \frac{k}{4\pi} \int_0^x \left\{ 2\pi i \epsilon_1(x', y, z) - \frac{\pi}{k} (x - x') \Delta_{\perp} \epsilon_1(x', y, z) + \right. \\ & \left. + \frac{\pi i^3 (x - x')^2}{4k^2} \left[\frac{\partial^4 \epsilon_1}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \epsilon_1}{\partial y^2 \partial z^2} + \frac{\partial^4 \epsilon_1}{\partial z^4} \right] + \dots \right\} dx' = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{ik}{2} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi - \frac{1}{4} \int_0^x (x - \xi) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi - \\
 &\quad - \frac{i}{16k} \int_0^x (x - \xi)^2 \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi + \dots \quad (35)
 \end{aligned}$$

Сравним выражение (35), являющееся рядом по степеням $1/k$, с решением, получаемым методом геометрической оптики (в первом приближении по ε_1). В разделе А было получено выражение (2.40) для эйконала θ , из которого следует, что поправка к фазе волны, обусловленная наличием неоднородностей, равна

$$-\frac{k}{2} \int_0^x \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi.$$

Это выражение совпадает с первым членом (35). Выражение для логарифма амплитуды плоской волны, полученное методом геометрической оптики, имеет вид (46.40):

$$\chi(x, y, z) = -\frac{1}{4} \int_0^x (x - \xi) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi$$

(здесь опущен первый член формулы (46.40), который, как было показано в § 40, пренебрежимо мал по сравнению с приведенным).

Это выражение совпадает со вторым членом (35). Наконец, при рассмотрении границ применимости первого приближения геометрической оптики была получена поправка второго порядка по $1/k$, равная (25.43)

$$\frac{F_1(x, y, z)}{kA_0} = -\frac{i}{16k} \int_0^x (x - \xi)^2 \Delta_{\perp}^2 \varepsilon_1(\xi, y, z) d\xi.$$

Это выражение совпадает с третьим членом (35).

Таким образом, разложение интеграла (30) в ряд по k^{-1} , получаемое методом стационарной фазы, приводит к соответствующему ряду метода геометрической оптики, включая высшие приближения последнего метода. Как мы убедились, разложение (35) можно получить при выполнении условия $\sqrt{\lambda L} \ll \lambda_0$, при котором к интегралу (30) можно применить метод стационарной фазы. В случае же нарушения этого условия, как ясно из структуры выражения (30), это разложение теряет смысл. Следовательно, при нарушении условия $\sqrt{\lambda L} \ll \lambda_0$ теряет смысл не только первое

(по k^{-1}) приближение геометрической оптики, но и вообще весь этот метод, так что и учет высших членов разложения по k^{-1} не дает положительных результатов. В то же время выражение (30) для $\Phi_1(r)$ сохраняется, если только не нарушено гораздо более слабое ограничение (29).

Таким образом, метод плавных возмущений имеет более широкую область применимости, чем метод геометрической оптики, даже если последний и исправлен путем учета конечного числа своих высших приближений. В некотором смысле метод плавных возмущений суммирует бесконечное число высших приближений метода геометрической оптики.

§ 46. Флуктуации амплитуды и фазы плоской волны

Применим метод плавных возмущений к расчету флуктуаций фазы и амплитуды плоской волны, распространяющейся в турбулентной атмосфере. При выполнении конкретных расчетов удобнее исходить из уравнения (32.45):

$$\frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi_1}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Phi_1}{\partial x} = -k^2 \varepsilon_1(x, y, z). \quad (1)$$

Воспользуемся для решения (1) методом спектральных разложений. Представим $\varepsilon_1(x, y, z)$ и $\Phi_1(x, y, z)$ в виде двумерных стохастических интегралов Фурье — Стильтьеса (19.5):

$$\varepsilon_1(x, y, z) = \varepsilon_1(x, 0, 0) + \iint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] u_\varepsilon(d\kappa_2, d\kappa_3, x), \quad (2)$$

$$\Phi_1(x, y, z) = \Phi_1(x, 0, 0) + \iint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] u_\Phi(d\kappa_2, d\kappa_3, x). \quad (3)$$

Подставляя разложения (2), (3) в уравнение (1), получим

$$\begin{aligned} & - \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) u_\Phi(d\kappa_2, d\kappa_3, x) + 2ik \frac{d\Phi_1(x, 0, 0)}{dx} + \\ & + 2ik \iint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] \frac{\partial u_\Phi(d\kappa_2, d\kappa_3, x)}{\partial x} = -k^2 \varepsilon_1(x, 0, 0) - \\ & - k^2 \iint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] u_\varepsilon(d\kappa_2, d\kappa_3, x). \quad (4) \end{aligned}$$

Положив в (4) $y = z = 0$, найдем

$$\int_{-\infty}^{\infty} (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) u_{\Phi}(d\kappa_2, d\kappa_3, x) + 2ik \frac{d\Phi_1(x, 0, 0)}{dx} = -k^2 \epsilon_1(x, 0, 0). \quad (5)$$

Вычтем (5) из (4):

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) u_{\Phi}(d\kappa_2, d\kappa_3, x) + \\ & + 2ik \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] \frac{\partial u_{\Phi}(d\kappa_2, d\kappa_3, x)}{\partial x} = \\ & = -k^2 \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] u_{\epsilon}(d\kappa_2, d\kappa_3, x). \quad (6) \end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $u_{\Phi}(d\kappa_2, d\kappa_3, x)$ удовлетворяет уравнению

$$2ik \frac{\partial u_{\Phi}}{\partial x} - (\kappa_2^2 + \kappa_3^2) u_{\Phi} = -k^2 u_{\epsilon}(d\kappa_2, d\kappa_3, x). \quad (7)$$

В дальнейшем мы будем обозначать $\kappa_2^2 + \kappa_3^2 = \kappa^2$. Решение уравнения (7) с граничным условием $u_{\Phi}(d\kappa_2, d\kappa_3, 0) = 0$ (это граничное условие вытекает из формулы (30.45) для Φ_1) имеет вид

$$u_{\Phi}(d\kappa_2, d\kappa_3, x) = \frac{ik}{2} \int_0^x \exp\left\{-\frac{i\kappa^2(x-x')}{2k}\right\} u_{\epsilon}(d\kappa_2, d\kappa_3, x') dx'. \quad (8)$$

Формула (8) является двумерным преобразованием Фурье выражения (30.45).

Перейдем к вычислению структурных функций амплитуды и фазы. Положим $\Phi = \ln A + iS$, где A — амплитуда и S — фаза волны. Тогда $\Phi_0 = \ln A_0 + iS_0$, где A_0 и S_0 — амплитуда и фаза падающей волны,

$$\Phi_1 = \Phi - \Phi_0 = \ln \frac{A}{A_0} + i(S - S_0),$$

т. е.

$$\Phi_1 = \chi + iS_1, \quad (9)$$

где $\chi = \ln(A/A_0)$, $S_1 = S - S_0$. Нас будут интересовать структурные (корреляционные) функции амплитуды, фазы и их взаимные корреляции. Все три функции могут быть получены

из следующих двух функций [113]:

$$\langle (\Phi_1(\mathbf{r}_1) - \Phi_1(\mathbf{r}_2)) (\Phi_1^*(\mathbf{r}_1) - \Phi_1^*(\mathbf{r}_2)) \rangle = D_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (10)$$

$$\langle |\Phi_1(\mathbf{r}_1) - \Phi_1(\mathbf{r}_2)|^2 \rangle = D_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2). \quad (11)$$

Действительно, подставляя $\Phi_1 = \chi + iS_1$, получим

$$D_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = D_\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + D_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (12)$$

$$D_2(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = D_\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) - D_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) + 2iD_{\chi S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2), \quad (13)$$

где

$$D_\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [\chi(\mathbf{r}_1) - \chi(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle,$$

$$D_S(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [S_1(\mathbf{r}_1) - S_1(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle,$$

$$D_{\chi S}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [\chi(\mathbf{r}_1) - \chi(\mathbf{r}_2)] [S_1(\mathbf{r}_1) - S_1(\mathbf{r}_2)] \rangle.$$

Разрешая систему уравнений (12), (13), получим

$$D_\chi = \frac{1}{2} [D_1 + \text{Re } D_2], \quad (14)$$

$$D_S = \frac{1}{2} [D_1 - \text{Re } D_2], \quad (15)$$

$$D_{\chi S} = \frac{1}{2} \text{Im } D_2. \quad (16)$$

Выразим структурные функции D_1 и D_2 через спектральную плотность u_Φ . Мы будем рассматривать $D_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ при $x_1 = x_2$. В этом случае, подставляя (3) в (10), получим

$$D_1(x, y, z; x, y', z') = \iiint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(x_2 y + x_2 z)} - e^{i(x_2 y' + x_2 z')}] \times \\ \times [e^{-i(x_2' y + x_2' z)} - e^{-i(x_2' y' + x_2' z')}] \langle u_\Phi(d\kappa_2, d\kappa_3, x) u_\Phi^*(d\kappa_2', d\kappa_3', x) \rangle, \quad (17)$$

$$D_2(x, y, z; x, y', z') = \iiint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(x_2 y + x_2 z)} - e^{i(x_2 y' + x_2 z')}] \times \\ \times [e^{i(x_2' y + x_2' z)} - e^{i(x_2' y' + x_2' z')}] \langle u_\Phi(d\kappa_2, d\kappa_3, x) u_\Phi(d\kappa_2', d\kappa_3', x) \rangle. \quad (18)$$

Воспользуемся формулой (8) для вычисления входящих сюда средних значений:

$$\langle u_\Phi(d\kappa_2, d\kappa_3, x) u_\Phi^*(d\kappa_2', d\kappa_3', x) \rangle = \\ = \frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x \exp \left\{ -\frac{i}{2k} [\kappa^2 (x - x') - \kappa'^2 (x - x'')] \right\} \times \\ \times \langle u_\epsilon(d\kappa_2, d\kappa_3, x') u_\epsilon^*(d\kappa_2', d\kappa_3', x'') \rangle dx' dx''. \quad (19)$$

Учитывая соотношение

$$\begin{aligned} \langle u_\varepsilon(d\kappa_2, d\kappa_3, x') u_\varepsilon^*(d\kappa_2', d\kappa_3', x'') \rangle = \\ = \delta(\kappa_2 - \kappa_2') \delta(\kappa_3 - \kappa_3') F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') d\kappa_2 d\kappa_3 d\kappa_2' d\kappa_3', \end{aligned} \quad (20)$$

где F_ε — двумерная спектральная плотность флуктуаций ε , и подставляя (20) в (19), получим

$$\begin{aligned} \langle u_\Phi(d\kappa_2, d\kappa_3, x) u_\Phi^*(d\kappa_2', d\kappa_3', x) \rangle = \delta(\kappa_2 - \kappa_2') \delta(\kappa_3 - \kappa_3') d\kappa_2 d\kappa_3 d\kappa_2' d\kappa_3' \times \\ \times \frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x \exp\left\{ \frac{i\kappa^2(x' - x'')}{2k} \right\} F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') dx' dx''. \end{aligned} \quad (21)$$

Обозначим через $F_1(\kappa_2, \kappa_3, x)$ следующее выражение:

$$F_1(\kappa_2, \kappa_3, x) = \frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x \exp\left\{ \frac{i\kappa^2(x' - x'')}{2k} \right\} F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') dx' dx''. \quad (22)$$

Подставим (21) в (17) и выполним интегрирование по κ' :

$$\begin{aligned} D_1(x, y, z; x, y', z') = \iint_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_1 y' + \kappa_2 z)} - e^{i(\kappa_1 y + \kappa_2 z')}] \times \\ \times [e^{-i(\kappa_1 y' + \kappa_2 z')} - e^{-i(\kappa_1 y + \kappa_2 z)}] F_1(\kappa_2, \kappa_3, x) d\kappa_2 d\kappa_3 = \\ = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \{1 - \cos[\kappa_2(y - y') + \kappa_3(z - z')]\} F_1(\kappa_2, \kappa_3, x) d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (23)$$

Вычислим теперь величину

$$\begin{aligned} \langle u_\Phi(d\kappa_2, d\kappa_3, x) u_\Phi(d\kappa_2', d\kappa_3', x) \rangle = \\ = -\frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x \exp\left\{ -\frac{i}{2k} [\kappa^2(x - x') + \kappa'^2(x - x'')] \right\} \times \\ \times \langle u_\varepsilon(d\kappa_2, d\kappa_3, x') u_\varepsilon(d\kappa_2', d\kappa_3', x'') \rangle dx' dx''. \end{aligned} \quad (24)$$

Так как величина ε_1 действительна, то, подставляя в равенство

ε_1^* = ε_1 разложение (2), получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] u_z(d\kappa_2, d\kappa_3, x) = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{-i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] u_z^*(d\kappa_2, d\kappa_3, x).$$

Производя в правом интеграле замену переменных интегрирования $\kappa_2 \rightarrow -\kappa_2$, $\kappa_3 \rightarrow -\kappa_3$, получаем

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] u_z(d\kappa_2, d\kappa_3, x) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} [e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} - 1] u_z^*(-d\kappa_2, -d\kappa_3, x), \end{aligned}$$

откуда следует соотношение

$$u_z(d\kappa_2, d\kappa_3, x) = u_z^*(-d\kappa_2, -d\kappa_3, x)$$

или, полагая $d\kappa_2 = -d\kappa_2''$, $d\kappa_3 = -d\kappa_3''$,

$$u_z^*(d\kappa_2'', d\kappa_3'', x) = u_z(-d\kappa_2'', -d\kappa_3'', x).$$

Подставляя это выражение в (20), получим

$$\begin{aligned} \langle u_z(d\kappa_2, d\kappa_3, x') u_z(-d\kappa_2'', -d\kappa_3'', x'') \rangle = \\ = \delta(\kappa_2 - \kappa_2'') \delta(\kappa_3 - \kappa_3'') F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') d\kappa_2 d\kappa_3 d\kappa_2'' d\kappa_3''. \end{aligned}$$

Полагая здесь $\kappa_2'' = -\kappa_2'$, $\kappa_3'' = -\kappa_3'$, окончательно найдем

$$\begin{aligned} \langle u_z(d\kappa_2, d\kappa_3, x') u_z(d\kappa_2', d\kappa_3', x'') \rangle = \\ = \delta(\kappa_2 + \kappa_2') \delta(\kappa_3 + \kappa_3') F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') d\kappa_2 d\kappa_3 d\kappa_2' d\kappa_3'. \quad (20a) \end{aligned}$$

Подставим (20a) в (24):

$$\begin{aligned} \langle u_\Phi(d\kappa_2, d\kappa_3, x) u_\Phi(d\kappa_2', d\kappa_3', x) \rangle = \\ = \delta(\kappa_2 + \kappa_2') \delta(\kappa_3 + \kappa_3') d\kappa_2 d\kappa_3' d\kappa_3 d\kappa_3' F_2(\kappa_2, \kappa_3, x), \quad (25) \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} F_2(\kappa_2, \kappa_3, x) = -\frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x \exp\left\{-\frac{i\kappa^2}{2k}(2x - x' - x'')\right\} \times \\ \times F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') dx' dx''. \quad (26) \end{aligned}$$

Подставляя (25) в (18) и выполняя интегрирование по κ_2' , κ_3' , получим

$$\begin{aligned} D_2(x, y, z; x, y', z') = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - \cos[\kappa_2(y - y') + \kappa_3(z - z')]\} \times \\ \times F_2(\kappa_2, \kappa_3, x) d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (27) \end{aligned}$$

Таким образом, функции F_1 и F_2 , определяемые соотношениями (22), (26), дают спектральные разложения функций D_1, D_2 .

Перейдем к вычислению этих функций. При этом мы учтем указанную в гл. 1 характерную особенность функции $F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, \xi)$, заключающуюся в том, что эта функция заметно отлична от нуля лишь в области $\kappa\xi \lesssim 1$. Поэтому в интеграле (22) существенна лишь область $|\kappa(x' - x'')| \lesssim 1$. Но в этой области

$$\left| \frac{\kappa^2(x' - x'')}{2k} \right| \lesssim \frac{\kappa}{2k}.$$

Максимальные значения κ , которые могут нас интересовать, имеют порядок $\kappa_m \sim \frac{1}{\lambda_0}$. Поэтому

$$\left| \frac{\kappa^2(x' - x'')}{2k} \right| \lesssim \frac{\kappa_m}{2k} \sim \frac{\lambda}{2\lambda_0} \ll 1$$

в силу малости длины волны по сравнению с внутренним масштабом турбулентности. Таким образом, в существенной для интегрирования области аргумент экспоненты мал и можно считать

$$\exp \left\{ \frac{i\kappa^2(x' - x'')}{2k} \right\} \approx 1.$$

Следовательно,

$$F_1(\kappa_2, \kappa_3, x) \approx \frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') dx' dx''. \quad (28)$$

Функция $F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'')$ является четной функцией $(x' - x'')$. Применяя формулу

$$\int_0^x \int_0^x f(x' - x'') dx' dx'' = 2 \int_0^x (x - \xi) f(\xi) d\xi, \quad (29)$$

выведенную в разделе А, получим

$$F_1(\kappa_2, \kappa_3, x) = \frac{k^2}{2} \int_0^x (x - \xi) F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi. \quad (30)$$

Значения структурных функций D_1, D_2 будут интересовать нас лишь в области $\sqrt{(y - y')^2 + (z - z')^2} \ll x$. В этом случае существенны лишь значения κ , удовлетворяющие условию $\kappa x \gg 1$. В то же время в (30) существенны лишь значения ξ из области $\kappa\xi \lesssim 1$, т. е. $\xi \ll x$. Поэтому в (30) можно положить $x - \xi \approx x$, а интегрирование по ξ распространить до бесконечности:

$$F_1(\kappa_2, \kappa_3, L) = \frac{k^2 L}{2} \int_0^\infty F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi. \quad (31)$$

Используя формулу

$$\int_0^{\infty} F_{\varepsilon}(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi = \pi \Phi_{\varepsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3), \quad (32)$$

связывающую двумерную и трехмерную спектральные плотности (см. (28.5)), окончательно получаем

$$F_1(\kappa_2, \kappa_3, L) = \frac{\pi}{2} k^2 L \Phi_{\varepsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3). \quad (33)$$

Перейдем к вычислению F_2 . Введем в интеграле (26) новые переменные интегрирования $\xi = x' - x''$, $\eta = \frac{1}{2}(x' + x'')$. Область интегрирования в переменных (ξ, η) — ромб, уравнения границ которого $\eta = \frac{1}{2}\xi$, $\eta = -\frac{1}{2}\xi$, $\eta = x - \frac{1}{2}\xi$, $\eta = x + \frac{1}{2}\xi$. Как мы уже установили, существенной для интегрирования является лишь область малых ξ : $|\xi| \ll x$, так как вне этой области $F_{\varepsilon}(\kappa_2, \kappa_3, \xi)$ пренебрежимо мала. Поэтому интегрирование по ξ можно распространить с внутренней части ромба на бесконечную полосу, ограниченную прямыми $\eta = 0$, $\eta = x$. Следовательно,

$$F_2(\kappa_2, \kappa_3, x) \approx -\frac{k^2}{4} \int_0^x \exp\left\{-\frac{i\kappa^2(x-\eta)}{k}\right\} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} F_{\varepsilon}(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi. \quad (34)$$

Учитывая (32), получим

$$F_2(\kappa_2, \kappa_3, x) = -\frac{\pi k^2}{2} \Phi_{\varepsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3) \int_0^x \exp\left\{-\frac{i\kappa^2(x-\eta)}{k}\right\} d\eta.$$

Выполняя интегрирование по η , получим окончательно

$$F_2(\kappa_2, \kappa_3, L) = \frac{i\pi}{2} \frac{k^3}{\kappa^2} \left(1 - \exp\left(-\frac{i\kappa^2 L}{k}\right)\right) \Phi_{\varepsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3). \quad (35)$$

Из формул (14)–(16) следуют аналогичные соотношения для спектральных функций F :

$$F_x = \frac{1}{2} [F_1 + \operatorname{Re} F_2], \quad (14a)$$

$$F_S = \frac{1}{2} [F_1 - \operatorname{Re} F_2], \quad (15a)$$

$$F_{xS} = \frac{1}{2} \operatorname{Im} F_2. \quad (16a)$$

Подставляя сюда найденные выражения для F_1 , F_2 , получим

$$F_x(\kappa_2, \kappa_3, L) = \frac{\pi k^2 L}{4} \left(1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3), \quad (36)$$

$$F_S(\kappa_2, \kappa_3, L) = \frac{\pi k^2 L}{4} \left(1 + \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3), \quad (37)$$

$$F_{xS}(\kappa_2, \kappa_3, L) = \frac{\pi k^3}{4\kappa^2} \left(1 - \cos \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3). \quad (38)$$

В случае локально изотропной турбулентности

$$\Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3) = \Phi_\varepsilon\left(\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}\right) = \Phi_\varepsilon(\kappa)$$

и функции F_x , F_S , F_{xS} зависят только от κ :

$$F_x(\kappa, L) = \frac{\pi k^2 L}{4} \left(1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_\varepsilon(\kappa), \quad (36a)$$

$$F_S(\kappa, L) = \frac{\pi k^2 L}{4} \left(1 + \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right) \Phi_\varepsilon(\kappa), \quad (37a)$$

$$F_{xS}(\kappa, L) = \frac{\pi k^3}{2\kappa^2} \sin^2 \frac{\kappa^2 L}{2k} \Phi_\varepsilon(\kappa). \quad (38a)$$

Отметим некоторые особенности формул (36)–(38). В случае, если выполняется соотношение $\frac{\kappa_m^2 L}{k} \ll 1$, т. е. $\lambda L \ll \lambda_0^2$, формулы (36)–(38) можно приближенно записать в виде

$$F_x(\kappa, L) \approx \frac{\pi}{24} L^3 \kappa^4 \Phi_\varepsilon(\kappa), \quad (39)$$

$$F_S(\kappa, L) \approx \frac{\pi k^2 L}{2} \Phi_\varepsilon(\kappa), \quad (40)$$

$$F_{xS}(\kappa, L) \approx \frac{\pi}{8} k L^2 \kappa^2 \Phi_\varepsilon(\kappa). \quad (41)$$

При выполнении условия $\lambda L \ll \lambda_0^2$, как мы убедились выше, метод плавных возмущений переходит в метод геометрической оптики. Поэтому выражения (39) и (40) совпадают с формулами (54.40) и (21.40), полученными методом геометрической оптики ((40) отличается от (21.40) множителем k^2 , так как последняя формула написана не для фазы, а для эйконала).

В случае, если условие $\lambda L \ll \lambda_0^2$ не выполняется, формулы (39)–(41) справедливы для малых κ , удовлетворяющих условию $\kappa \ll \sqrt{k/L}$. Таким образом, геометрическая оптика всегда применима к крупномасштабной части спектра турбулентности.

Даже в случае, когда $\Phi_e(\kappa) \sim \kappa^{-11/3}$, т. е. обращается в бесконечность при $\kappa \rightarrow 0$, имеет место соотношение $F_x(0, L) = 0$, откуда следует, что интеграл от $F_x(\kappa, L)$ сходится. Это означает, что наряду со структурной функцией логарифма амплитуды существует и ее корреляционная функция

$$B_x(\eta, \xi) = \iint_{-\infty}^{\infty} \cos(\kappa_2\eta + \kappa_3\xi) F_x(\kappa_2, \kappa_3, x) d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (42)$$

удовлетворяющая соотношению

$$\iint_{-\infty}^{\infty} B_x(\eta, \xi) d\xi d\eta = 0. \quad (43)$$

Аналогично в формуле для F_{xS} множитель $\frac{1}{\kappa^2} \left(i - \cos \frac{\kappa^2 L}{k} \right)$ при $\kappa \rightarrow 0$ пропорционален κ^2 , так что даже в случае, когда $\Phi_e(\kappa) \sim \kappa^{-11/3}$, интеграл от F_{xS} по κ_2, κ_3 сходится. Это означает, что существует взаимная корреляционная функция

$$\begin{aligned} B_{xS}(r_1, r_2) &= \frac{\langle \chi(r_1) S_1(r_2) + \chi(r_2) S_1(r_1) \rangle}{2} = \\ &= \iint_{-\infty}^{\infty} \cos(\kappa_2\eta + \kappa_3\xi) F_{xS}(\kappa_2, \kappa_3, L) d\kappa_2 d\kappa_3, \end{aligned} \quad (44)$$

связанная с функцией D_{xS} соотношением

$$D_{xS}(\rho) = 2B_{xS}(0) - 2B_{xS}(\rho). \quad (45)$$

В частности, при $r_1 = r_2$

$$\langle \chi(L) S_1(L) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} F_{xS}(\kappa_2, \kappa_3, L) d\kappa_2, d\kappa_3. \quad (46)$$

§ 47. Структурные функции амплитуды и фазы в локально изотропном турбулентном потоке

Найдем структурные функции D_1 и D_2 для локально изотропной турбулентности, когда $\Phi_e(\kappa)$ задается соотношением

$$\Phi_e(\kappa) = 0,033 C_e^2 \kappa^{-11/3} e^{-\kappa^2/\kappa_m^2}. \quad (1)$$

В случае, когда $F_{1,2}$ зависит от $\kappa = \sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}$, формулы (23.46),

(27.46) принимают вид

$$D_{1,2}(\rho) = 4\pi \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa\rho)] F_{1,2}(\kappa, L) \kappa d\kappa. \quad (2)$$

Подставляя (33.46) и (1), получим

$$D_1(\rho) = \frac{0,033 \cdot 4\pi^2}{2} k^2 LC_\epsilon^2 \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa\rho)] \kappa^{-1/2} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) d\kappa. \quad (3)$$

После замены переменных $\kappa = \kappa_m \sqrt{t}$ формула (3) принимает вид

$$D_1(\rho) = 0,033\pi^2 k^2 LC_\epsilon^2 \kappa_m^{-1/2} \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa_m \rho \sqrt{t})] t^{-1/4} e^{-t} dt. \quad (4)$$

Интеграл (4) вычисляется, если разложить J_0 в ряд. Вычисления вполне аналогичны тем, которые проводились в разделе А при вычислениях по методу геометрической оптики. Для $D_1(\rho)$ получаем после интегрирования

$$D_1(\rho) = 0,033\pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^2 LC_\epsilon^2 \kappa_m^{-1/2} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, i, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) - i \right]. \quad (5)$$

Вычислим теперь $D_2(\rho)$. Подставляя в (2) выражения (35.46) и (1), получим

$$D_2(\rho) = 0,033 \cdot 2\pi^2 i k^3 C_\epsilon^2 \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa\rho)] \times \\ \times \left(i - \exp\left(-\frac{i\kappa^2 L}{k}\right) \right) \kappa^{-14/3} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) d\kappa. \quad (6)$$

При $\kappa \rightarrow 0$

$$[1 - J_0(\kappa\rho)] \left(i - \exp\left(-\frac{i\kappa^2 L}{k}\right) \right) \sim \kappa^4.$$

так что интеграл (6) сходится в нуле.

Обозначим

$$A(p) = \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa\rho)] \left(i - \exp\left(-\frac{i\kappa^2 L}{k}\right) \right) \kappa^{-p} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) d\kappa. \quad (7)$$

Нас интересует значение $A(14/3)$. Интеграл (7) сходится при всех $p < 5$. Разобьем его на два слагаемых

$$B(p) = \int_0^{\infty} [1 - J_0(x\rho)] x^{-p} \exp\left(-\frac{x^2}{x_m^2}\right) dx, \quad (8)$$

$$C(p) = \int_0^{\infty} [1 - J_0(x\rho)] x^{-p} \exp\left\{-x^2\left(\frac{1}{x_m^2} + \frac{iL}{k}\right)\right\} dx. \quad (9)$$

Интегралы (8) и (9) сходятся при $p < 3$. В точке $p = 3$ функции $B(p)$ и $C(p)$ имеют полюсы. Однако в разности $B(p) - C(p)$ особенности при $p = 3$ компенсируются и функция $A(p)$ при $3 < p < 5$ может быть определена как аналитическое продолжение по p разности $B(p) - C(p)$. Интегралы (8) и (9) имеют тот же вид, что и (3), и вычисляются аналогичным образом:

$$B(p) = -\frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{p-1}{2}\right) x_m^{-(p-1)} \left[{}_1F_1\left(-\frac{p-1}{2}, 1, -\frac{x_m^2 \rho^2}{4}\right) - 1 \right]. \quad (10)$$

$C(p)$ можно получить из $B(p)$, если заменить $1/x_m^2$ на $1/x_m^2 + iL/k$, т. е.

$$x_m^2 \rightarrow \frac{1}{\frac{1}{x_m^2} + \frac{iL}{k}}.$$

Таким образом,

$$C(p) = -\frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{p-1}{2}\right) \left(\frac{1}{x_m^2} + \frac{iL}{k}\right)^{(p-1)/2} \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{p-1}{2}, 1, -\frac{x_m^2 \rho^2}{4} \frac{1}{1 + \frac{i x_m^2 L}{k}}\right) - 1 \right]. \quad (11)$$

Выражения (10) и (11) имеют полюсы при $p = 3$ (обращается в бесконечность множитель $F\left(-\frac{p-1}{2}\right)$). Образует разность $A(p) = B(p) - C(p)$:

$$A(p) = -\frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{p-1}{2}\right) x_m^{-(p-1)} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{p-1}{2}, 1, -\frac{x_m^2 \rho^2}{4}\right) - 1 - \right. \\ \left. - \left(1 + \frac{i x_m^2 L}{k}\right)^{(p-1)/2} \left[{}_1F_1\left(-\frac{p-1}{2}, 1, -\frac{x_m^2 \rho^2}{4} \left(1 + \frac{i x_m^2 L}{k}\right)^{-1}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (12)$$

Покажем, что фигурная скобка обращается в нуль при $p = 3$. Действительно, при $p = 3$ мы получаем ${}_1F_1(-1, 1, z) = 1 - z$, т. е.

$${}_1F_1\left(-\frac{p-1}{2}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) - 1 \rightarrow \frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4},$$

$${}_1F_1\left(-\frac{p-1}{2}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \left(1 + \frac{i\kappa_m^2 L}{k}\right)^{-1}\right) - 1 \rightarrow \frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \left(1 + \frac{i\kappa_m^2 L}{k}\right)^{-1}$$

и фигурная скобка обращается в нуль, что компенсирует простой полюс функции $\Gamma\left(-\frac{p-1}{2}\right)$. Таким образом, мы можем рассматривать выражение (12) для $p < 5$ (при $p = 5$ появляется следующий полюс гамма-функции). Полагая, в (12) $p = 14/3$ и подставляя (12) в (6), получим выражение

$$D_2(\rho) = -0,033\pi^2 \frac{36}{55} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) ik^3 C_\epsilon^2 \kappa_m^{-11/3} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) - 1 - \left(1 + \frac{i\kappa_m^2 L}{k}\right)^{11/6} \left[{}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \left(1 + \frac{i\kappa_m^2 L}{k}\right)^{-1}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (13)$$

Функция $D_2(\rho)$ зависит от двух безразмерных параметров:

$$g = \frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} = 8,8 \frac{\rho^2}{\lambda_0^2}, \quad D = \frac{\kappa_m^2 L}{k} = 5,6 \frac{\lambda L}{\lambda_0^2}$$

(D носит название волнового параметра). Формулу (13) удобно записать в виде

$$D_2(\rho) = -0,033 i\pi^2 \frac{36}{55} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^3 C_\epsilon^2 \kappa_m^{-5/3} L \frac{1}{D} \times \\ \times \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -g\right) - 1 - \left(1 + iD\right)^{11/6} \left[{}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{g}{1+iD}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (13a)$$

Рассмотрим предельные случаи малых и больших D . В случае $D \rightarrow 0$ разложим правую часть (13a) в ряд с точностью до членов порядка D^2 (это разложение несколько проще получать непосредственно из (6), разлагая в ряд $\exp(-i\kappa^2 L/k)$)

$$D_2(\rho) = -0,033\pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^3 C_\epsilon^2 \kappa_m^{-5/3} L \left\{ \frac{6}{5} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -g\right) - 1 \right] + \frac{iD}{2} \left[{}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -g\right) - 1 \right] + \frac{D^2}{36} \left[{}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 1, -g\right) - 1 \right] + \dots \right\}. \quad (14)$$

При помощи (14) можно найти функции D_S , D_x и D_{xS} для случая $D \ll 1$, когда должна быть справедлива геометрическая оптика. Подставляя (5) и (14) в формулы (14.46)–(16.46), найдем

$$D_x(\rho) = \frac{0,033 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{72} C_\epsilon^2 L^3 \chi_m^{7/2} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 1, -g\right) \right]. \quad (15)$$

При $\rho \rightarrow \infty$ $F\left(\frac{7}{6}, 1, -g\right) \rightarrow 0$, так что

$$D_x(\infty) = 2B_x(0) = \frac{0,033 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{72} C_\epsilon^2 L^3 \chi_m^{7/2}.$$

Отсюда мы получаем для $\langle \chi^2 \rangle = B_x(0)$ прежнее выражение (16.42), полученное непосредственно при помощи геометрической оптики.

Если от $D_x(\rho)$ перейти к $B_x(\rho) = \frac{1}{2} [D_x(\infty) - D_x(\rho)]$, то получим выражение (17.42).

При вычислении $D_S(\rho)$ достаточно взять лишь первый член (14):

$$D_S(\rho) = 0,033 \pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^2 L C_\epsilon^2 \chi_m^{-5/2} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -g\right) - 1 \right]. \quad (16)$$

Это выражение совпадает с формулой (6.42), полученной при помощи метода геометрической оптики (в (6.42) отсутствует множитель k^2 , так как это выражение записано для эйконала, а не для фазы).

Наконец, выпишем $D_{xS}(\rho)$:

$$D_{xS}(\rho) = \frac{0,033 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{4} C_\epsilon^2 k L^2 \chi_m^{1/2} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -g\right) \right]. \quad (17)$$

Рассмотрим величину

$$R_{xS}^2 = \frac{[D_{xS}(\rho)]^2}{D_x(\rho) D_S(\rho)} = \frac{\langle [\chi(r_1) - \chi(r_2)] [S_1(r_1) - S_1(r_2)] \rangle^2}{\langle [\chi(r_1) - \chi(r_2)]^2 \rangle \langle [S_1(r_1) - S_1(r_2)]^2 \rangle},$$

представляющую собой квадрат коэффициента корреляции между флуктуациями разности фаз и разности логарифмов амплитуд в двух точках r_1 и $r_2 = r_1 + \rho$. Подставляя в формулу для R_{xS}^2 выражения (15), (16) и (17), получим

$$R_{xS}^2 = \frac{15 \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -g\right) \right]^8}{4 \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 1, -g\right) \right] \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -g\right) - 1 \right]}. \quad (18)$$

При $\rho = 0 R_{XS} = \sqrt{3/28} \approx 0,33$, при $\rho \rightarrow \infty R_{XS} \rightarrow 0$. Тот факт, что при малых ρ коэффициент корреляции оказался существенно меньшим 1, объясняется тем, что одни и те же компоненты спектра турбулентности по-разному влияют на амплитудные и фазовые флуктуации. При $\rho \rightarrow \infty$ наибольший вклад в флуктуации разности фаз вносят неоднородности с размерами порядка ρ , в то время как флуктуации амплитуды (при $D \ll 1$) определяются неоднородностями порядка λ_0 , что и приводит к малым R_{XS} .

Рассмотрим теперь случай больших значений волнового параметра D , когда существенно начинают влиять дифракционные эффекты. В этом случае

$$(1 + iD)^{1/2} \approx D^{1/2} \exp\left(\frac{11}{12} i\pi\right), \quad -\frac{g}{1 + iD} \approx \frac{ig}{D}$$

и

$$D_2(\rho) = -0,033 \pi^2 \frac{36}{55} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^2 C_\epsilon^2 L \kappa_m^{-1/2} \frac{1}{D} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -g\right) - i - \exp\left(\frac{11}{12} i\pi\right) D^{1/2} \left[{}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, \frac{ig}{D}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (19)$$

В области $D \gg 1$ функция $D_2(\rho)$ зависит от двух безразмерных параметров: g и $\frac{g}{D} = \frac{k\rho^2}{4L} = \frac{\pi\rho^2}{2\lambda L}$. Параметр g/D пропорционален квадрату отношения ρ к радиусу первой зоны Френеля.

Рассмотрим сначала случай $g \ll 1$. Тогда и $g/D \ll 1$ и мы можем взять первые члены разложения функции ${}_1F_1$ в ряд. В результате получаем

$$D_1(\rho) \approx \frac{0,033 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{4} C_\epsilon^2 k^2 L \kappa_m^{1/2} \rho^2 + \dots, \quad (20)$$

$$D_2(\rho) \approx \exp\left(\frac{11}{12} \pi i\right) \frac{0,033 \pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{4} C_\epsilon^2 k^{1/2} L^{1/2} \rho^2 + \dots \quad (21)$$

Таким образом, при $g \ll 1$, т. е. $\rho \ll \lambda_0$, структурные функции D_1 и D_2 квадратичны по ρ . То же относится и к функциям D_x, D_S, D_{XS} :

$$\begin{aligned} D_x(\rho) &= \frac{0,033 \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{8} C_\epsilon^2 k^2 L \kappa_m^{1/2} \left[1 - \frac{6}{5} \cos \frac{\pi}{12} \left(\frac{k}{\kappa_m^2 L} \right)^{1/2} \right] \rho^2 + \dots = \\ &= 0,41 C_\epsilon^2 k^2 L \lambda_0^{-1/2} \left[1 - 0,87 \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda L} \right)^{1/2} \right] \rho^2 + \dots, \end{aligned} \quad (22)$$

$$D_S(\rho) = 0,41 C_\epsilon^2 k^2 L \lambda_0^{-1/2} \left[1 + 0,87 \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda L} \right)^{1/2} \right] \rho^2 + \dots \quad (23)$$

Таким образом, при $D \gg 1$ и $g \ll 1$ функции $D_x(\rho)$ и $D_S(\rho)$ совпадают (с точностью до малой поправки порядка $D^{-1/2}$).

Для $D_{xS}(\rho)$ получим

$$D_{xS}(\rho) = 0,071 C_e^2 k^{11/2} L^{1/2} \rho^2 + \dots, \quad (24)$$

а коэффициент корреляции оказывается равным

$$R_{xS} = \frac{D_{xS}}{\sqrt{D_S D_x}} = 0,23 \left(\frac{\lambda L}{\lambda_0^2} \right)^{-1/2}. \quad (25)$$

При $D \gg 1$ величина $R_{xS}(0) \ll 1$, тогда как при малых значениях волнового параметра мы имели $R_{xS}(0) \approx 0,33$. Относительно большое значение R_{xS} при $D \ll 1$ объясняется тем, что в случае геометрической оптики амплитудные флуктуации (изменения сечения лучевой трубки) определяются фазовыми флуктуациями.

Перейдем к рассмотрению наиболее важного случая $D \gg 1$, $g \gg 1$. При этом параметр $\frac{g}{D} = \frac{k\rho^2}{4L}$ может быть произвольным. Используя асимптотику функции ${}_1F_1$ при больших значениях g , найдем

$$D_1(\rho) = \frac{0,033 \pi^2 \left(\frac{6}{5}\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) 2^{5/2}} C_e^2 k^2 L \rho^{5/2} = 0,73 C_e^2 k^2 L \rho^{5/2}, \quad (26)$$

$$D_2(\rho) = -i \frac{0,033 \pi^2 \frac{36}{55} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right) 2^{11/3}} C_e^2 k^3 \rho^{11/2} \left\{ 1 - \Gamma\left(\frac{17}{6}\right) \left(\frac{iD}{g}\right)^{11/6} \times \right. \\ \left. \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{g}{iD}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (27)$$

Используя (26) и (27), запишем выражения для $D_x(\rho)$:

$$D_x(\rho) = \frac{1}{2} \frac{0,033 \pi^2 \left(\frac{6}{5}\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) 2^{5/3}} \left\{ C_e^2 k^2 L \rho^{5/2} + \frac{1}{4} \left(\frac{6}{11}\right)^2 C_e^2 k^3 \rho^{11/2} \Gamma\left(\frac{17}{6}\right) \times \right. \\ \left. \times \left(\frac{D}{g}\right)^{11/6} \operatorname{Re} \left[i^{11/6} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{g}{iD}\right) - 1 \right] \right\}. \quad (28)$$

Прежде всего найдем $D_x(\infty)$, поскольку эта величина определяет средний квадрат флуктуаций. Для этого необходимо выяснить асимптотику входящей в (28) функции ${}_1F_1$. Асимптотический

ряд для ${}_1F_1(\alpha, \gamma, z)$ имеет вид

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} G(\alpha, \alpha + 1 - \gamma, -z) + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^z z^{\alpha - \gamma} G(\gamma - \alpha, 1 - \alpha, z), \quad (29)$$

где

$$G(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha\beta}{1!z} + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!z^2} + \dots$$

Рассмотрим случай $\alpha = -11/6$, $\gamma = 1$. Так как z чисто мнимо, то $|e^z| = 1$. Величина $\alpha - \gamma < 0$, поэтому достаточно рассмотреть первое слагаемое в (29). В выражении для G мы возьмем первые два члена, так как остальные приводят к малым поправкам

$${}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{g}{iD}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} \left(\frac{g}{iD}\right)^{11/6} \left[1 + \left(\frac{11}{6}\right)^2 \frac{iD}{g} + \dots\right].$$

Подставим это разложение в (28). При вычислении действительной части от $i^{11/6} {}_1F_1(-11/6, 1, -g/iD)$ главный член разложения исчезает, так как он после умножения на $i^{11/6}$ становится чисто мнимым. Поэтому

$$\lim_{\rho \rightarrow \infty} D_x(\rho) = \lim_{\rho \rightarrow \infty} \frac{1}{2} 0,73 \left\{ C_e^2 k^2 L \rho^{5/6} + \frac{1}{4} \left(\frac{6}{11}\right)^2 \Gamma\left(\frac{17}{6}\right) C_e^2 \times \right. \\ \left. \times k^3 \rho^{11/6} \left(\frac{D}{g}\right)^{11/6} \left[-\frac{\left(\frac{11}{6}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} \left(\frac{g}{D}\right)^{1/6} - \cos\left(\frac{17}{12}\pi\right) \right] \right\}.$$

Подставляя $\frac{g}{D} = \frac{k\rho^2}{4L}$, убеждаемся, что члены, содержащие $\rho^{5/6}$, взаимно уничтожаются и что искомый предел есть

$$D_x(\infty) = \frac{0,73}{2} 2^{1/2} \frac{6}{11} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \left(-\cos\frac{17\pi}{12}\right) C_e^2 k^{7/6} L^{11/6} = 0,154 C_e^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (30)$$

Отсюда мы получаем выражение для среднего квадрата флуктуаций $\langle \chi \rangle^2 = \frac{1}{2} D_x(\infty)$:

$$\langle \chi^2 \rangle = 0,077 C_e^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (31)$$

Выведем также формулу для нормированного коэффициента корреляции флуктуаций амплитуды

$$b_x(\rho) = \frac{B_x(\rho)}{B_x(0)} = \frac{\frac{1}{2} [D_x(\infty) - D_x(\rho)]}{\frac{1}{2} D_x(\infty)} = 1 - \frac{D_x(\rho)}{D_x(\infty)}. \quad (32)$$

Подставляя сюда выражения (28) и (31), получим после простых преобразований

$$b_x(\rho) = \operatorname{Re} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, \frac{ik\rho^2}{4L}\right) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \operatorname{Im} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, \frac{ik\rho^2}{4L}\right) - \frac{1}{\frac{6}{11} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}} \left(\frac{k\rho^2}{4L}\right)^{1/6} \quad (\rho \gg \lambda_0). \quad (33)$$

Из формулы (33) следует, что при $D \gg 1$ в области $\rho \gg \lambda_0$ функция $b_x(\rho)$ зависит лишь от безразмерного аргумента $\frac{k\rho^2}{4L} = \frac{\pi\rho^2}{2\lambda L}$, т. е. от отношения расстояния между точками наблюдения к радиусу первой зоны Френеля. Формально мы можем рассматривать (33) и при $\rho \rightarrow 0$ (соотношение $b_x(0) = 1$ выполняется), но при этом нарушается условие $g \gg 1$, т. е. $\rho \gg \lambda_0$, использованное при выводе этой формулы. Формулой (33) можно пользоваться при $g \gg 1$, т. е. $\frac{g}{D} \gg \frac{1}{D}$. При значениях же аргумента $\frac{g}{D} = \frac{k\rho^2}{4L} \lesssim \frac{1}{D} \ll 1$ формула (33) перестает быть справедливой и уступает место формуле, вытекающей из (22), (31) и (32):

$$b_x(\rho) = i - 12,3 \frac{\rho^2}{(\lambda L)^{2/3} \lambda_0^{1/3}} + \dots \quad (\rho \ll \lambda_0). \quad (33a)$$

В области значений $\lambda_0 \ll \rho \ll \sqrt{\lambda L}$ вид функции $b_x(\rho)$ определяется формулой (33), в которой взяты лишь первые члены ряда для ${}_1F_1$:

$$b_x(\rho) = 1 - \frac{1}{\frac{6}{11} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}} \left(\frac{k\rho^2}{4L}\right)^{1/6} + \frac{11}{6} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \frac{k\rho^2}{4L} - \frac{55}{144} \left(\frac{k\rho^2}{4L}\right)^2 + \dots = 1 - 2,36 \left(\frac{k\rho^2}{L}\right)^{1/6} + 1,71 \frac{k\rho^2}{L} - 0,024 \left(\frac{k\rho^2}{L}\right)^2 + \dots \quad (34)$$

Чтобы получить асимптотику функции $b_x(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$, следует взять первые четыре члена в формуле (29) для $G\left(-\frac{11}{6}, -\frac{11}{6}, -\frac{ik\rho^2}{4L}\right)$. В результате можно получить выражение

$$b_x(\rho) = -A \left(\frac{k\rho^2}{4L}\right)^{-7/6} \quad \left(\frac{k\rho^2}{4L} \gg 1\right), \quad (35)$$

где

$$A = \frac{11 \cdot 25}{6^6 \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}} = 0,0242.$$

Функция (33) изображена на рис. 45.

Рассмотрим теперь структурную функцию фазы D_S . Выражение для нее удобнее всего получить из формулы

$$D_x(\rho) + D_S(\rho) = D_1(\rho).$$

Подставляя сюда

$$D_x(\rho) = 2B_x(0) - 2B_x(\rho) = 2\langle\chi^2\rangle [1 - b_x(\rho)]$$

и используя выражение (26) для функции $D_1(\rho)$ при $D \gg 1$, $g \gg 1$, получим

$$D_S(\rho) = 0,73 C_2^2 k^2 L \rho^{3/2} - 0,154 C_2^2 k^{7/2} L^{5/2} [1 - b_x(\rho)]. \quad (36)$$

При $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$ второй член в (36) стремится к постоянной величине.

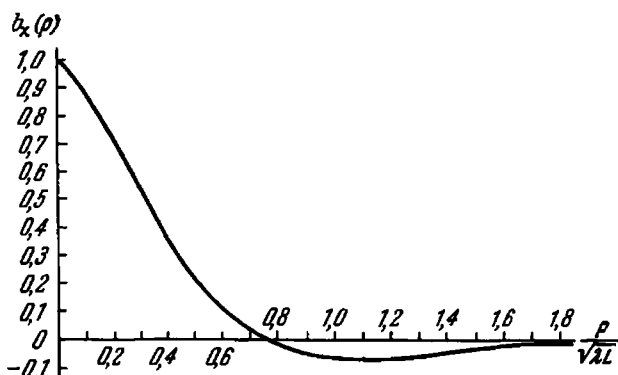


Рис. 45. Корреляционная функция флуктуаций логарифма амплитуды при условии $\sqrt{\lambda L} \gg l_0$.

в то время как первый возрастает и в выражении для D_S можно оставить лишь первое слагаемое:

$$D_S(\rho) = 0,73 C_2^2 k^2 L \rho^{3/2} \quad (\rho \gg \sqrt{\lambda L}). \quad (37)$$

При $\rho \ll \sqrt{\lambda L}$ используем первые два члена разложения (34) функции $b_x(\rho)$:

$$1 - b_x(\rho) \approx 2,36 k^{3/2} L^{-3/2} \rho^{3/2}.$$

Подставляя это выражение в (36), найдем

$$D_S(\rho) = \frac{1}{2} 0,73 C_2^2 k^2 L \rho^{3/2} \quad (\lambda_0 \ll \rho \ll \sqrt{\lambda L}). \quad (36a)$$

Таким образом, выражения для $D_S(\rho)$ при $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$ и $\rho \ll \sqrt{\lambda L}$ отличаются лишь коэффициентом $1/2$. При $\rho \ll \lambda_0$ функция $D_S(\rho)$ имеет квадратичный вид (23).

Выражение для D_{XS} легко получить из (27), взяв мнимую часть $D_2(\rho)$. Мы приведем лишь выражение $\frac{1}{2} D_{XS}(\infty) = B_{XS}(0)$. Используя асимптотическое разложение функции ${}_1F_1$, получим

$$B_{XS}(0) = \langle \chi S_1 \rangle = \text{ctg} \frac{\pi}{12} \langle \chi^2 \rangle = 0,28 C_i^2 k'^{1/2} L^{1/4}. \quad (38)$$

Из этой формулы видно, что $\langle \chi S_1 \rangle \sim \langle \chi^2 \rangle$.

Выражения для корреляционных функций флуктуаций угла прихода можно получить из структурной функции $D_S(\rho)$ по формулам, аналогичным (35.40) и (38.40) (введя лишь дополнительный множитель k^{-2} в правые части этих формул). Средний квадрат флуктуаций направления распространения на основании формулы (23) при $D \gg 1$ равен

$$\langle \alpha^2 \rangle = 0,41 C_i^2 L \lambda_0^{-1/2}.$$

Эта формула отличается от соответствующего выражения (11.42), полученного методом геометрической оптики, лишь коэффициентом $1/2$. Радиус корреляции флуктуаций угла прихода, как и в случае $D \ll 1$, имеет порядок λ_0 .

В заключение этого параграфа дадим наглядное объяснение полученных результатов. Основные формулы, определяющие структурную функцию фазы, и выражение для среднего квадрата флуктуаций амплитуды можно вывести с точностью до численных коэффициентов на основании простых качественных рассуждений.

Рассмотрим сначала случай геометрической оптики. Пусть два луча длиной L располагаются параллельно друг другу на расстоянии ρ , причем $\rho \gg l_0$. Разобьем эти лучи на отрезки, длина каждого из которых также равна ρ . Число таких отрезков N на каждом из лучей будет равно $N = L/\rho$. Разность фаз, возникающая после прохождения волной выделенной пары отрезков, имеет порядок $\Delta S \sim k\rho \Delta n(\rho)$. Величина Δn в среднем равна нулю. Средний квадрат разности фаз после прохождения одной пары отрезков равен $\langle \Delta S^2 \rangle_1 \sim k^2 \rho^2 \langle \Delta n^2(\rho) \rangle$. Полное же значение среднего квадрата разности фаз после прохождения всех N отрезков равно

$$\langle \Delta S^2 \rangle = N \langle \Delta S^2 \rangle_1 = k^2 \rho^2 \langle \Delta n^2(\rho) \rangle \frac{L}{\rho}.$$

Подставляя

$$\langle \Delta n^2(\rho) \rangle = C_n^2 \rho^{-2/3} \left(C_n^2 = \frac{1}{4} C_i^2 \right),$$

получим

$$\langle \Delta S^2 \rangle \sim C_n^2 k^2 L \rho^{5/2},$$

т. е. выражение для структурной функции фазы при $\rho \gg l_0$. Если же $\rho \ll l_0$, то длину рассматриваемых отрезков следует взять равной l_0 , так как в пределах этого расстояния значение n приблизительно постоянно. Тогда $\Delta S \sim k l_0 \Delta n(\rho)$, $N = \frac{L}{l_0}$ и

$$\begin{aligned} \langle \Delta S^2 \rangle_1 &\sim k^2 l_0^2 \langle \Delta n^2(\rho) \rangle, \\ \langle \Delta S^2 \rangle &\sim k^2 l_0 L \langle \Delta n^2(\rho) \rangle. \end{aligned}$$

Но в рассматриваемом случае (при $\rho \ll l_0$)

$$\langle \Delta n^2(\rho) \rangle \sim C_n^2 l_0^{5/2} \left(\frac{\rho}{l_0} \right)^2,$$

так что

$$\langle \Delta S^2 \rangle \sim C_n^2 k^2 L l_0^{-1/2} \rho^2.$$

Обратимся теперь к амплитудным флуктуациям. Пусть на собирающую линзу с фокусным расстоянием F и радиусом R падает плоская волна. Проведем плоскость, перпендикулярную оптической оси линзы, на расстоянии x от линзы, т. е. на расстоянии $F - x$ от ее фокуса. Тогда сечение пучка в этой плоскости определится из равенства $R/F = r/(F - x)$, т. е. $R/r = F/(F - x)$. Если амплитуда волны до линзы равна A_0 , а в сечении x она равна A , то, очевидно, $A_0^2 R^2 = A^2 r^2$, откуда $A = A_0 R/r$ и

$$\delta A = A - A_0 = A_0 \left(\frac{R}{r} - 1 \right) = \frac{A_0 x}{F - x}.$$

Отсюда относительное изменение амплитуды

$$\frac{\delta A}{A_0} = \frac{x}{F - x}.$$

Пусть $x \ll F$. Тогда $\delta A/A_0 \sim x/F$. Отсюда следует, что если имеются линзы с различными фокусными расстояниями, то наибольший эффект произведут те из них, фокусное расстояние которых минимально. Фокусное расстояние линзы определяется известной формулой $F = R/(n - 1)$, где R — радиус кривизны линзы. Если роль линз играют турбулентные неоднородности, то $n - 1 \sim C_n R^{1/2}$ и $F \sim R^{3/2}/C_n$. Тогда для наименьших линз $R \sim l_0$ будет $F \sim l_0^{3/2}/C_n$ и $\frac{\delta A}{A} \sim \frac{C_n x}{l_0^{3/2}}$. Пусть на пути луча имеется

множество линз со случайными значениями F . Их число N равно $N = \frac{L}{l_0}$, где L — длина трассы. Величина x для различных линз различна, но всегда имеет порядок L . Тогда суммарный эффект по порядку величины будет равен

$$\langle (\frac{\delta A}{A})^2 \rangle \sim \left(\frac{C_n L}{l_0^{3/2}} \right)^2 \frac{L}{l_0} = C_n^2 l_0^{-7/2} L^3.$$

Мы получили формулу для среднего квадрата флуктуаций амплитуды в приближении геометрической оптики.

Учтем теперь дифракционные эффекты. Они проявляются в рассеянии волны на малый угол λ/l , где l — размер неоднородности. Никаких существенных изменений в механизме образования флуктуаций фазы при этом учитывать нет необходимости. Что же касается флуктуаций амплитуды, то здесь картина может существенно измениться.

Если согласно геометрической оптике радиус пучка в плоскости x был равен r , то за счет дифракции он изменится на величину порядка $\frac{\lambda x}{R}$. Если $\frac{\lambda x}{R} \ll r \approx R$ (при слабых флуктуациях $r \approx R$),

т. е. $\lambda x \ll R^2$, то это изменение несущественно. Если же $\frac{\lambda}{R} x \gg \gg R$, т. е. $\lambda x \gg R^2$, то дифракционная картина полностью определяет распределение освещенности в сечении x и весь фокусирующий эффект линзы исчезает (дифракционная картина от слабой собирающей и слабой рассеивающей линз приблизительно одинакова). Поэтому линзы, для которых $\lambda L \gg R^2$, не обладают фокусирующими свойствами и не влияют существенно на флуктуации амплитуды волны. Если в турбулентной среде имеются линзы различных размеров, часть которых удовлетворяет условию $\lambda L \ll R^2$, а часть — нет, то флуктуации амплитуды в основном будут вызываться наименьшими из тех неоднородностей, которые еще обладают фокусирующими свойствами, т. е. неоднородностями, для которых $\lambda L \sim R^2$. Отсюда следует, что в случае, когда $\lambda L \gg l_0^2$, величина l_0 в формуле, определяющей $\langle (\delta A/A)^2 \rangle$, должна быть заменена на $\sqrt{\lambda L}$. Тогда мы получим

$$\langle (\frac{\delta A}{A})^2 \rangle \sim C_n^2 k^{7/2} L^{3/2},$$

т. е. выражение, полученное методом плавных возмущений для случая $\sqrt{\lambda L} \gg l_0$. Из приведенных рассуждений следует, что эту формулу можно интерпретировать как результат применения геометрической оптики к среде, из которой изъяты мелкомасштабные неод-

нородности с размерами, меньшими $\sqrt{\lambda L}$. Такая интерпретация этой формулы в некоторых случаях оказывается весьма полезной (см. раздел Б гл. 5).

Отметим, что полученные выражения справедливы только при условии $L \ll F$. Если это условие не выполняется и, наоборот, имеет место неравенство $F \ll L$, то картина резко меняется. Если рассмотреть короткофокусную линзу на большом расстоянии от точки наблюдения, то независимо от «знака» линзы ее присутствие приведет к расширению пучка (лучи будут казаться расходящимися или из действительного, или из мнимого фокуса, причем расстояние $2F$ между этими фокусами мало по сравнению с расстоянием от линзы до точки наблюдения). В этом случае увеличение числа или «силы» линз, находящихся далеко от точки наблюдения, практически не меняет амплитуду. Сильные же изменения амплитуды будут вызываться лишь теми линзами, фокусы которых лежат вблизи от точки наблюдения. В этом случае при увеличении длины трассы ее «эффективно работающий» участок все время будет примыкать к точке наблюдения и относительный уровень флуктуаций будет меняться очень слабо: наступает насыщение флуктуаций амплитуды.

Количественный расчет этого эффекта достаточно сложен и еще не завершен окончательно. Мы приведем два варианта расчета — в последнем параграфе этой главы и в разделе Б гл. 5.

§ 48. Флуктуации фазы и амплитуды в локально однородной турбулентной среде с плавно меняющимися средними характеристиками

До сих пор мы рассматривали случай, когда интенсивность флуктуаций ϵ была постоянна в пространстве.

Легко обобщить полученные результаты на тот случай, когда величина C_ϵ^2 является функцией координат [108]. Такая модель турбулентности была рассмотрена в гл. 1. В этой модели структурная функция $D_\epsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [\epsilon_1(\mathbf{r}_1) - \epsilon_1(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle$ имеет вид

$$D_\epsilon(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = C_\epsilon^2 \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) D_\epsilon^{(0)}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (1)$$

Аналогичный вид имеют и спектральные плотности:

$$\Phi_\epsilon = C_\epsilon^2 \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) \Phi_\epsilon^{(0)}(\mathbf{x}) = \Phi_\epsilon \left(\mathbf{x}, \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right), \quad (2)$$

$$F_\epsilon = C_\epsilon^2 \left(\frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right) F_\epsilon^{(0)}(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = F_\epsilon \left(\mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3, \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2, \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2}{2} \right). \quad (3)$$

Формулы (22.46) и (26.46) для двумерных спектральных плотностей F_1 и F_2 справедливы и в этом случае, так как при их выводе предположение о постоянстве C_ε^2 не использовалось:

$$F_1(\kappa_2, \kappa_3, x) = \frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x \exp\left\{\frac{i\kappa^2(x' - x'')}{2k}\right\} F_\varepsilon\left(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'', \frac{x' + x''}{2}\right) dx' dx'', \quad (4)$$

$$F_2(\kappa_2, \kappa_3, x) = -\frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x \exp\left\{-\frac{i\kappa^2}{2k}(2x - x' - x'')\right\} F_\varepsilon\left(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'', \frac{x' + x''}{2}\right) dx' dx''. \quad (5)$$

Здесь учтена зависимость функции F_ε лишь от продольной координаты $(x' + x'')/2$, так как характерный размер L_0 , на котором заметно меняется функция $C_\varepsilon(r)$, велик по сравнению с интересующими нас поперечными размерами (с радиусом корреляции амплитудных флуктуаций $\sqrt{\lambda L}$ или с аргументом ρ функции $D_\varepsilon(\rho)$). Подставим в (4) выражение (3) для F_ε :

$$F_1(\kappa_1, \kappa_2, x) = \frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x C_\varepsilon^2\left(\frac{x' + x''}{2}\right) \exp\left\{\frac{i\kappa^2(x' - x'')}{2k}\right\} F_\varepsilon^{(0)}(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') dx' dx''. \quad (6)$$

Введем новые переменные $\xi = x' - x''$, $\eta = \frac{1}{2}(x' + x'')$. Интегрирование по ξ можно, как и раньше, распространить на пределы от $-\infty$ до $+\infty$, а экспоненту считать равной единице. Используя соотношение

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon^{(0)}(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi = 2\pi\Phi_\varepsilon^{(0)}(0, \kappa_2, \kappa_3), \quad (7)$$

получим

$$F_1(\kappa_1, \kappa_2, x) = \frac{1}{2} \pi k^2 \Phi_\varepsilon^{(0)}(0, \kappa_2, \kappa_3) \int_0^x C_\varepsilon^2(\eta) d\eta$$

или, используя обозначение (2),

$$F_1(\kappa_1, \kappa_2, L) = \frac{1}{2} \pi k^2 \int_0^L \Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3, x) dx. \quad (8)$$

Аналогичным образом вычисляется и функция F_2 :

$$\begin{aligned} F_2(\kappa_2, \kappa_3, x) &= \\ &= -\frac{k^2}{4} \int_0^x C_\varepsilon^2(\eta) \exp\left\{-\frac{i\kappa^2}{k}(x-\eta)\right\} d\eta \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon^{(0)}(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi = \\ &= -\frac{\pi k^2}{2} \Phi_\varepsilon^{(0)}(0, \kappa_2, \kappa_3) \int_0^x C_\varepsilon^2(\eta) \exp\left\{-\frac{i\kappa^2(x-\eta)}{k}\right\} d\eta \end{aligned}$$

или

$$F_2(\kappa_2, \kappa_3, L) = -\frac{\pi k^2}{2} \int_0^L \exp\left\{-\frac{i\kappa^2(L-x)}{k}\right\} \Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3, x) dx. \quad (9)$$

В формулы (8) и (9) входят интегралы от переменной спектральной плотности. При этом в F_1 входит просто усредненное вдоль луча значение Φ_ε , в то время как в F_2 усреднение происходит с весом $\exp\left\{-\frac{i\kappa^2(L-x)}{k}\right\}$.

Произведем расчет функций D_1 и D_2 для случая, когда $\Phi_\varepsilon^{(0)}$ задается формулой

$$\Phi_\varepsilon^{(0)}(\kappa) = 0,033 \kappa^{-1/2} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right). \quad (10)$$

Подставляя (10) в (8), получим

$$\begin{aligned} D_1(\rho) &= 4\pi \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)] F_1(\kappa, L) \kappa d\kappa = \\ &= 2\pi^2 \cdot 0,033 k^2 \int_0^L C_\varepsilon^2(x) dx \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)] \kappa^{-3/2} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) d\kappa. \quad (11) \end{aligned}$$

Это выражение отличается от формулы (3.47) лишь тем, что в ней вместо величины LC_ε^2 фигурирует

$$LC_\varepsilon^2 \rightarrow \int_0^L C_\varepsilon^2(x) dx. \quad (12)$$

Следовательно, выражение для $D_1(\rho)$ можно получить из соответствующих выражений случая $C_\varepsilon^2 = \text{const}$ при помощи замены (12):

$$D_1(\rho) = 0,033 \pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^2 \kappa_m^{-1/2} \int_0^L C_\varepsilon^2(x) dx \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa^2 \rho^2}{4}\right) - 1 \right]. \quad (13)$$

Найдем теперь выражение для $D_2(\rho)$ для спектра (10):

$$D_2(\rho) = -2\pi^2 0,033 k^2 \int_0^L C_z^2(x) dx \int_0^\infty [1 - J_0(\kappa\rho)] \kappa^{-5/2} \times \\ \times \exp\left\{-\kappa^2 \left[\frac{1}{\kappa_m^2} + \frac{i(L-x)}{k}\right]\right\} d\kappa.$$

Используя формулы (9.47) и (12.47), в которых вместо L следует подставить $(L-x)$ и положить $\rho = \rho/3$, получим

$$D_2(\rho) = -0,033 \pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^2 \kappa_m^{-3/2} \int_0^L C_z^2(x) \left[1 + \frac{i\kappa_m^2(L-x)}{k}\right]^{5/6} \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{g}{1 + \frac{i\kappa_m^2(L-x)}{k}}\right) - 1\right] dx, \quad (14)$$

где снова обозначено $g = \frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}$.

Как и в случае $C_z^2 = \text{const}$, рассмотрим случаи $D \ll 1$ и $D \gg 1$.

Если $D \ll 1$, то $1 + \frac{i\kappa_m^2(L-x)}{k} \approx 1$ и $D_2(\rho) \approx -D_1(\rho)$. Поэтому

$$D_S = \frac{1}{2} [D_1 - \text{Re } D_2] \approx D_1, \quad \text{т. е.}$$

$$D_S(\rho) = 0,033 \pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^2 \kappa_m^{-3/2} \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right) - 1\right] \int_0^L C_z^2(x) dx. \quad (15)$$

Таким образом, фазовые флуктуации определяются интегралом от $C_z^2(x)$ вдоль луча.

Найдем теперь $D_x(\rho)$. В этом случае следует разложить (14) в ряд по $D = \frac{\kappa_m^2 L}{k}$ с точностью до членов второго порядка (это разложение проще выполнить в интеграле, который приводит

к (14):

$$D_2(\rho) = -D_1(\rho) - 0,033 \pi^2 ik \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \kappa_m^{1/6} \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(\frac{1}{6}, 1, -g\right) - 1 \right] \int_0^L (L-x) C_\varepsilon^2(x) dx - \frac{1}{2} \pi^2 0,033 \Gamma\left(\frac{7}{6}\right) \kappa_m^{1/6} \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 1, -g\right) - 1 \right] \int_0^L (L-x)^2 C_\varepsilon^2(x) dx + \dots \quad (16)$$

Найдем $D_x(\rho) = \frac{1}{2} [D_1(\rho) + \text{Re } D_2(\rho)]$

$$D_x(\rho) = \frac{\pi^2}{24} 0,033 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \kappa_m^{1/6} \left[1 - {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 1, -g\right) \right] \int_0^L (L-x)^2 C_\varepsilon^2(x) dx. \quad (17)$$

Сравним эту формулу с формулой (15.47), справедливой при $C_\varepsilon^2 = \text{const}$. Мы видим, что вместо величины $\frac{1}{3} L^3 C_\varepsilon^2$ в (17) фигурирует интеграл

$$\frac{1}{3} L^3 C_\varepsilon^2 \rightarrow \int_0^L (L-x)^2 C_\varepsilon^2(x) dx. \quad (18)$$

Поэтому все формулы для амплитудных флуктуаций в случае $D \ll 1$ можно получить из соответствующих выражений случая $C_\varepsilon^2 = \text{const}$ заменой (18). Например,

$$\langle \chi^2 \rangle = 2,4 \lambda^{-7/6} \int_0^L C_\varepsilon^2(x) (L-x)^2 dx \quad (D \ll 1). \quad (19)$$

Рассмотрим теперь случай $D \gg 1$. В этом случае почти во всей области интегрирования в (14) $\kappa_m^2(L-x)/k \gg 1$, так что можно считать

$$\left[1 + \frac{i\kappa_m^2(L-x)}{k} \right]^{5/6} \approx \left[\frac{i\kappa_m^2(L-x)}{k} \right]^{5/6}.$$

Аналогично

$${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{g}{1 + \frac{i\kappa_m^2}{k}(L-x)}\right) \approx {}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, \frac{ik_0^2}{i(L-x)}\right),$$

так что

$$D_2(\rho) = -i^{5/6} 0,033 \pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^{7/6} \int_0^L C_{\varepsilon}^2(x) (L-x)^{5/6} \times \\ \times \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, \frac{ik\rho^2}{4(L-x)}\right) - 1 \right] dx. \quad (20)$$

Из этой формулы видно, что вид функции $D_2(\rho)$ зависит от функции $C_{\varepsilon}^2(x)$. Поскольку $C_{\varepsilon}^2(x)$ — произвольная функция, то, не задавая ее конкретного вида, мы не сможем получить определенной функции $D_2(\rho)$. Однако выражение для $\langle \chi^2 \rangle$ можно получить в общем виде. Так как

$$D_x(\rho) = \frac{1}{2} [D_1(\rho) + \text{Re } D_2(\rho)]$$

и $\langle \chi^2 \rangle = \frac{1}{2} D_x(\infty)$, то нам необходимо найти $D_1(\rho)$ и $D_2(\rho)$ при $\rho \rightarrow \infty$. Из (13) легко получаем

$$D_1(\rho) \approx \frac{0,033 \pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right)}{2^{5/6} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} k^2 \rho^{5/6} \int_0^L C_{\varepsilon}^2(x) dx + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \quad (21)$$

Подставляя асимптотическое разложение

$${}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, \frac{ik\rho^2}{4(L-x)}\right) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} \left(\frac{k\rho^2}{4i(L-x)}\right)^{5/6} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

в (20), получим

$$\text{Re } D_2(\rho) = -\frac{0,033 \pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^{7/6}}{2^{5/6} \Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} k^{5/6} \rho^{5/6} \int_0^L C_{\varepsilon}^2(x) dx + \\ + \cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) 0,033 \pi^2 \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^{7/6} \int_0^L C_{\varepsilon}^2(x) (L-x)^{5/6} dx. \quad (22)$$

Складывая (21) и (22), получим

$$D_x(\rho) = 0,033 \pi^2 \cos\left(\frac{5}{12}\pi\right) \frac{3}{5} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^{7/6} \int_0^L C_{\varepsilon}^2(x) (L-x)^{5/6} dx + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \quad (23)$$

откуда найдем окончательную формулу:

$$\langle \chi \rangle^2 = \frac{3 \cdot 0,033 \pi^2}{10} \cos\left(\frac{5}{12} \pi\right) \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) k^{7/6} \int_0^L C_e^2(x) (L-x)^{5/6} dx = \\ = 0,141 k^{7/6} \int_0^L C_e^2(x) (L-x)^{5/6} dx \quad (D \gg 1). \quad (24)$$

Если в (24) положить $C_e^2(x) = \text{const}$, то мы получим прежнюю формулу (31.47).

Функция $D_S(\rho)$ может быть определена из соотношения $D_S + D_x = D_1$. Из него следует, что при $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$, когда функция $D_x(\rho)$ постоянна и мала по сравнению с D_1 , $D_S(\rho) \approx D_1(\rho)$. Таким образом,

$$D_S(\rho) = 0,73 k^2 \rho^{5/6} \int_0^L C_e^2(x) dx \quad (\rho \gg \sqrt{\lambda L}). \quad (25)$$

В области же $\rho \lesssim \sqrt{\lambda L}$ вид функции $D_S(\rho)$ существенно зависит от $D_x(\rho)$, т. е. в конечном счете от функции $C_e^2(x)$, и поэтому не является универсальным.

Из полученных формул следует, что вклад различных неоднородностей в флуктуации фазы не зависит от их координат (например, сдвиг фазы, вносимый плоскопараллельной пластинкой, не зависит от того места на луче, куда помещена пластинка). В то же время вклад неоднородностей ε в образование амплитудных флуктуаций тем больше, чем дальше от точки наблюдения находится неоднородность. Это находится в согласии с хорошо известным фактом, что если линза находится непосредственно перед точкой наблюдения, то она не вызывает изменения интенсивности излучения в этой точке *).

*) На первый взгляд может показаться, что формулы (19), (24) противоречат принципу взаимности, так как значения интегралов зависят от того, помещено начало координат в точку наблюдения или вблизи источника. Меняя местами источник и точку наблюдения, мы получим согласно (19), (24) равные значения $\langle \chi^2 \rangle$. Это кажущееся противоречие объясняется тем, что формулы (19), (24) справедливы для плоской волны. Однако для применения принципа взаимности к плоской волне необходимо рассмотреть бесконечно удаленный точечный источник, расположенный за неоднородным слоем в свободном пространстве. Поэтому применительно к плоской волне принцип взаимности утверждает, что если поместить точечный источник в точку наблюдения, а точку наблюдения отнести на бесконечность (в свободное пространство за неоднородным слоем), то уровень флуктуаций в этих двух случаях будет одинаковым. Но такая перестановка не эквивалентна перемене местами источника плоской волны и точки наблюдения. Отметим, что для источника сферической волны весовая функция при $C_e^2(x)$ в интеграле, определяющем $\langle \chi^2 \rangle$, симметрична относительно x и $(L-x)$ и в этом случае $\langle \chi^2 \rangle$ одинаково для волн, распространяющихся в противоположных направлениях.

§ 49. Флуктуации амплитуды сферической волны

Для расчета флуктуаций сферической волны используем выражение (14.45), дающее значение $\Phi_1(r)$ для случая произвольной функции $\Psi_0(r)$:

$$\Phi_1(r) = \frac{k^2}{4\pi} \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} \frac{\Psi_0(r')}{\Psi_0(r)} \varepsilon_1(r') d^3r'. \quad (1)$$

В случае, если $\Psi_0(r)$ — сферическая волна, распространяющаяся из начала координат,

$$\frac{\Psi_0(r')}{\Psi_0(r)} = \frac{r}{r'} e^{ik(r'-r)} \quad (2)$$

и формула (1) принимает вид

$$\Phi_1(r) = \frac{k^2 r}{4\pi} \int \frac{e^{ik|r-r'|+ik(r'-r)}}{r'|r-r'|} \varepsilon_1(r') d^3r'. \quad (3)$$

При $\lambda \ll \lambda_0$ в (3), как и для случая плоской волны, существенна лишь область между источником и точкой наблюдения, примыкающая к прямой линии, соединяющей эти точки. Направим ось x на точку наблюдения. Тогда $r = \{x, 0, 0\}$ и в существенной для интегрирования области $|x-x'| \gg |y'|, |z'|$. Поэтому, как и в случае плоской волны, можно положить в экспоненте

$$|r-r'| = x-x' + \frac{y'^2+z'^2}{2(x-x')} + \dots, \quad (4)$$

а в знаменателе (3) — просто $|r-r'| = x-x' + \dots$. Интегрирование по x' распространяется на участок $0 < x' < x$ по y' и z' — на бесконечный интервал. Величину r' в экспоненте также можно представить в виде $r' = x' + \frac{y'^2+z'^2}{2x'} + \dots$, а в знаменателе положить ее равной x' . В результате получаем для Φ_1 формулу

$$\Phi_1(x, 0, 0) = \frac{k^2 x}{4\pi} \int_0^x \frac{dx'}{(x-x')x'} \iint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \exp\left\{ik \frac{x(y'^2+z'^2)}{2x'(x-x')}\right\} \varepsilon_1(x', y', z') \quad (5)$$

Найдем величины $\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle$ и $\langle \Phi_1^2 \rangle$, определяющие средние квадраты флуктуаций логарифма амплитуды и фазы. Вначале мы будем предполагать турбулентность однородной. Для $\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle$ имеем

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle &= \frac{k^4 x^2}{16 \pi^2} \int_0^x \int_0^x \frac{dx' dx''}{x'(x-x')(x-x'')x''} \iiint_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{ikx}{2} \times \right. \\ &\times \left. \left[\frac{y'^2+z'^2}{x'(x-x')} - \frac{y''^2+z''^2}{x''(x-x'')} \right] \right\} B_\varepsilon(x'-x'', y'-y'', z'-z'') dy' dz' dy'' dz''. \end{aligned} \quad (6)$$

Положим $y' - y'' = \eta$, $z' - z'' = \zeta$, $y'' = y$, $z'' = z$:

$$\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle = \frac{k^4 x^2}{16\pi^2} \int_0^x \int_0^x \frac{dx' dx''}{x'(x-x')(x-x'')x''} \int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(x' - x'', \eta, \zeta) d\eta d\zeta \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{ikx}{2} \left[-\frac{y^2 + z^2}{x'(x-x')} + \frac{y^2 + 2y\eta + \eta^2 + z^2 + 2z\zeta + \zeta^2}{x'(x-x')} \right] \right\} dy dx. \quad (7)$$

Внутренний интеграл по y, z легко вычисляется и равен

$$\frac{2\pi i x' x'' (x-x')(x-x'')}{kx(x'-x'')(x'+x''-x)} \exp \left\{ -\frac{ikx(\eta^2 + \zeta^2)}{2(x'-x'')(x'+x''-x)} \right\}.$$

Подставляя это выражение в (7), получим

$$\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle = \frac{ik^3 x}{8\pi} \int_0^x \int_0^x \frac{dx' dx''}{(x'-x'')(x'+x''-x)} \times \\ \int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(x' - x'', \eta, \zeta) \exp \left\{ \frac{ikx(\eta^2 + \zeta^2)}{2(x'-x'')(x'+x''-x)} \right\} d\eta d\zeta. \quad (8)$$

Воспользуемся двумерным спектральным разложением (31.5) функции $B_\varepsilon(x' - x'', \eta, \zeta)$

$$B_\varepsilon(x' - x'', \eta, \zeta) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)} F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (9)$$

Подставляя (9) в (8), найдем

$$\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle = -\frac{ik^3 x}{8\pi} \int_0^x \int_0^x \frac{dx' dx''}{(x'-x'')(x-x'-x'')} \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') d\kappa_2 d\kappa_3 \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ i(\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta) - \frac{kx(\eta^2 + \zeta^2)}{2i(x'-x'')(x-x'-x'')} \right\} d\eta d\zeta. \quad (10)$$

Интегрирование по η, ζ легко выполняется, и мы получаем формулу

$$\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle = \frac{k^3}{4} \int_0^x \int_0^x dx' dx'' \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') \times \\ \times \exp \left\{ \frac{i\kappa^2 (x' - x'')(x - x' - x'')}{2kx} \right\} d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (11)$$

где введено обозначение $\kappa^2 = \kappa_2^2 + \kappa_3^2$. В существенной для интегрирования по κ области $|\kappa(x' - x'')| \lesssim 1$. Поэтому

$$\left| \frac{\kappa^2(x' - x'')(x - x' - x'')}{2kx} \right| \lesssim \left| \frac{\kappa(x - x' - x'')}{2kx} \right| \sim \frac{\kappa}{k} \ll 1,$$

так как $\kappa/k \lesssim \lambda/\lambda_0 \ll 1$. Поэтому экспоненту в (11) можно считать равной единице:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle &= \frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x dx' dx'' \int_{-\infty}^{\infty} F_{\epsilon}(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') d\kappa_2 d\kappa_3 = \\ &= \frac{k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_2 d\kappa_3 \int_0^x \int_0^x F_{\epsilon}(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') dx' dx''. \end{aligned} \quad (12)$$

Подынтегральное выражение во внутренней интеграле — четная функция от $(x' - x'')$. Применяя формулу

$$\int_0^x \int_0^x F_{\epsilon}(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') dx' dx'' = 2 \int_0^x (x - \xi) F_{\epsilon}(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi,$$

получим

$$\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle = \frac{k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_2 d\kappa_3 \int_0^x (x - \xi) F_{\epsilon}(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi. \quad (13)$$

При вычислениях флуктуаций амплитуды, как было установлено выше, наибольший вклад вносят волновые числа порядка $1/\sqrt{\lambda x}$. Отсюда следует, что в (13) существенное значение имеет лишь область $\xi \lesssim \sqrt{\lambda x} \ll x$. Поэтому можно считать $x - \xi \approx x$, а интегрирование по x распространить до бесконечности. Учитывая формулу

$$\int_0^{\infty} F_{\epsilon}(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\xi = \pi \Phi_{\epsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3),$$

получаем

$$\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle = \frac{\pi k^2 x}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\epsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (14)$$

Перейдем к вычислению величины $\langle \Phi_1^2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1^2 \rangle &= \frac{k^4 x^2}{16\pi^2} \int_0^x \int_0^x \frac{dx' dx''}{x' x'' (x - x') (x - x'')} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ \frac{ikx}{2} \left[\frac{y'^2 + z'^2}{x'(x-x')} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{y''^2 + z''^2}{x''(x-x'')} \right] \right\} B_{\epsilon}(x' - x'', y' - y'', z' - z'') dy' dz' dy'' dz''. \end{aligned} \quad (15)$$

Как и при вычислении интеграла (6), введем $y' - y'' = \eta$, $z' - z'' = \zeta$, $y'' = y$, $z'' = z$. Интегрирование по y , z легко может быть выполнено, и мы получаем формулу, аналогичную (8):

$$\langle \Phi_1^2 \rangle = \frac{ik^2 x}{8\pi} \int_0^x \int_0^x \frac{dx' dx''}{x'(x-x') + x''(x-x'')} \int_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(x' - x'', \eta, \zeta) \times \\ \times \exp \left\{ \frac{ikx(\eta^2 + \zeta^2)}{2[x'(x-x') + x''(x-x'')]} \right\} d\eta d\zeta. \quad (16)$$

Снова воспользуемся спектральным разложением (9) и выполним интегрирование по переменным η , ζ :

$$\langle \Phi_1^2 \rangle = -\frac{k^2}{4} \int_0^x \int_0^x dx' dx'' \int_{-\infty}^{\infty} d\kappa_2 d\kappa_3 F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, x' - x'') \times \\ \times \exp \left\{ -\frac{ik^2 [x'(x-x') + x''(x-x'')]}{2kx} \right\}. \quad (17)$$

Введем новые переменные $u = x' - x''$, $v = \frac{1}{2}(x' + x'')$.

Показатель экспоненты принимает вид

$$-\frac{ik^2 [x'(x-x') + x''(x-x'')]}{2kx} = -\frac{ik^2}{2kx} \left[2vx - 2v^2 - \frac{u^2}{2} \right]. \quad (18)$$

Но в существенной для интегрирования области $ku \ll 1$, поэтому

$$\left| \frac{\kappa^2 u^2}{4kx} \right| \ll \frac{1}{4kx} \ll 1$$

и, следовательно, величину $u^2/2$ в (18) можно отбросить. Интегрирование же по u в силу быстрого убывания функции $F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, u)$ можно распространить на бесконечные пределы. В результате получаем

$$\langle \Phi_1^2 \rangle = -\frac{\pi k^2}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3 \int_0^x \exp \left\{ -\frac{ik^2 v(x-v)}{kx} \right\} dv. \quad (19)$$

Нас будет в дальнейшем интересовать величина $\text{Re} \langle \Phi_1^2 \rangle$, через которую выражаются флуктуации амплитуды и фазы. Действительно, используя выражение $\Phi_1 = \chi + iS_1$, получим

$$\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle = \langle \chi^2 \rangle + \langle S^2 \rangle, \quad \langle \Phi_1^2 \rangle = \langle \chi^2 \rangle - \langle S_1^2 \rangle + 2i \langle \chi S_1 \rangle,$$

откуда

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{1}{2} [\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle + \text{Re} \langle \Phi_1^2 \rangle].$$

Взяв действительную часть (19), получим

$$\operatorname{Re} \langle \Phi_1^2 \rangle = -\frac{\pi k^2}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\bullet}(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3 \int_0^x \cos \left\{ \frac{\kappa^2 v (x-v)}{kx} \right\} dv. \quad (20)$$

Рассмотрим интеграл

$$I = \int_0^x \cos \frac{\kappa^2 v (x-v)}{kx} dv. \quad (21)$$

При помощи подстановки $\xi = -\frac{x}{2} + v$ получим

$$\begin{aligned} I &= \int_{-x/2}^{x/2} \cos \frac{\kappa^2 \left(\frac{x^2}{4} - \xi^2 \right)}{kx} d\xi = 2 \int_0^{x/2} \cos \frac{\kappa^2 \left(\frac{x^2}{4} - \xi^2 \right)}{kx} d\xi = \\ &= 2 \left[\cos \frac{\kappa^2 x}{4k} \int_0^{x/2} \cos \frac{\kappa^2 \xi^2}{kx} d\xi + \sin \frac{\kappa^2 x}{4k} \int_0^{x/2} \sin \frac{\kappa^2 \xi^2}{kx} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Входящие сюда интегралы выражаются через интегралы Френеля

$$C(z) = \int_0^z \cos \frac{\pi t^2}{2} dt, \quad S(z) = \int_0^z \sin \frac{\pi t^2}{2} dt,$$

и мы получаем для I формулу

$$I = x \sqrt{\frac{2\pi k}{\kappa^2 x}} \left[\cos \frac{\kappa^2 x}{4k} C \left(\sqrt{\frac{\kappa^2 x}{2\pi k}} \right) + \sin \frac{\kappa^2 x}{4k} S \left(\sqrt{\frac{\kappa^2 x}{2\pi k}} \right) \right]. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (20), получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \Phi_1^2 \rangle &= -\frac{\pi k^2 x}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{2\pi k}{\kappa^2 x}} \left[\cos \frac{\kappa^2 x}{4k} C \left(\sqrt{\frac{\kappa^2 x}{2\pi k}} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \sin \frac{\kappa^2 x}{4k} S \left(\sqrt{\frac{\kappa^2 x}{2\pi k}} \right) \right] \Phi_{\bullet}(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (23) \end{aligned}$$

При подстановке (14) и (23) в формулу

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{1}{2} [\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle + \operatorname{Re} \langle \Phi_1^2 \rangle],$$

получим

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle &= \frac{\pi k^2 x}{4} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_{\bullet}(0, \kappa_2, \kappa_3) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\pi k}{\kappa^2 x}} \times \right. \\ &\quad \left. \times \left[\cos \frac{\kappa^2 x}{4k} C \left(\sqrt{\frac{\kappa^2 x}{2\pi k}} \right) + \sin \frac{\kappa^2 x}{4k} S \left(\sqrt{\frac{\kappa^2 x}{2\pi k}} \right) \right] \right\} d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (24) \end{aligned}$$

Для случая изотропной турбулентности, когда $\Phi_\epsilon(0, \kappa_2, \kappa_3) = \Phi_\epsilon(\kappa)$, в (24) можно ввести полярные координаты по κ_2, κ_3 и выполнить интегрирование по углу:

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{1}{2} \pi^2 k^2 x \int_0^\infty \Phi_\epsilon(\kappa) \left\{ 1 - \sqrt{\frac{2\pi k}{\kappa^2 x}} \times \right. \\ \left. \times \left[\cos \frac{\kappa^2 x}{4k} C \left(\sqrt{\frac{\kappa^2 x}{2\pi k}} \right) + \sin \frac{\kappa^2 x}{4k} S \left(\sqrt{\frac{\kappa^2 x}{2\pi k}} \right) \right] \right\} \kappa d\kappa. \quad (25)$$

При $\kappa \rightarrow 0$ фигурная скобка в (25) стремится к нулю как κ^4 . Поэтому интеграл (25) сходится и в том случае, если при $\kappa \rightarrow 0$ $\Phi_\epsilon(\kappa)$ имеет особенность (например, $\Phi_\epsilon(\kappa) \sim \kappa^{-11/3}$). Физически это означает, что на флуктуации амплитуды крупномасштабная часть спектра турбулентности не оказывает существенного влияния (как и для плоской волны). Это обстоятельство позволяет распространить формулу (25) и на случай локально изотропной турбулентности, хотя при ее выводе делалось предположение о ее однородности. Выражение для среднего квадрата флуктуаций фазы сферической волны отличается от (25) лишь знаком перед вторым членом в фигурной скобке. Однако в результате этого выражение для $\langle S_1^2 \rangle$ в случае локально изотропной турбулентности оказывается бесконечным (как и в случае плоской волны).

В предельном случае $\sqrt{\lambda x} \ll \lambda_0$ величина $\frac{\kappa^2 x}{2\pi k} \ll 1$ во всей существенной для интегрирования области.

В этом случае, разлагая подынтегральное выражение в ряд, можно получить формулу

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{\pi^2}{120} x^3 \int_0^\infty \Phi_\epsilon(\kappa) \kappa^5 d\kappa \quad (\sqrt{\lambda x} \ll \lambda_0). \quad (26)$$

Сравнивая это выражение с соответствующей формулой, полученной для сферической волны методом геометрической оптики, можно убедиться в их тождественности. В частности, при $\sqrt{\lambda x} \ll \lambda_0$ средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды сферической волны в 10 раз меньше, чем для плоской волны [65, 95, 112].

Произведем расчет флуктуаций амплитуды для случая, когда

$$\Phi_\epsilon(\kappa) = 0,033 C_m^2 \kappa^{-11/3} \exp \left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2} \right). \quad (27)$$

Соответствующие вычисления удобнее произвести, основываясь на промежуточной формуле (19). Если подставить (27) в (19),

то мы получим расходящийся интеграл. Однако, подобно тому как это делалось при вычислениях флуктуаций плоской волны, мы подсчитаем эти интегралы для спектра вида

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = 0,033 C_\varepsilon^2 \kappa^{-p} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) \quad (28)$$

при таких значениях p , при которых интегралы сходятся, а затем, после образования нужной комбинации, положим $p = \frac{11}{3}$.

Подставляя (28) в (19), получим

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1^2 \rangle &= -\pi^2 k^2 \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) \kappa d\kappa \int_0^x \exp\left\{-\frac{i\kappa^2 v(x-v)}{kx}\right\} dv = \\ &= -0,033 \pi^2 C_\varepsilon^2 k^2 \int_0^\infty dv \int_0^\infty \kappa^{1-p} \exp\left\{-\kappa^2 \left[\frac{1}{\kappa_m^2} + \frac{iv(x-v)}{kx}\right]\right\} d\kappa. \end{aligned} \quad (29)$$

Внутренний интеграл вычисляется и равен

$$\frac{1}{2} \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) \left[\frac{1}{\kappa_m^2} + \frac{iv(x-v)}{kx}\right]^{\frac{p}{2}-1}.$$

Следовательно,

$$\langle \Phi_1^2 \rangle = -\frac{1}{2} 0,033 \pi^2 \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) C_\varepsilon^2 k^2 \int_0^\infty \left[\frac{1}{\kappa_m^2} + \frac{iv(x-v)}{kx}\right]^{\frac{p}{2}-1} dv. \quad (30)$$

Подстановка $v = \frac{x}{2} + \xi$ приводит к выражению

$$\langle \Phi_1^2 \rangle = -0,033 \pi^2 \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) C_\varepsilon^2 k^2 \int_0^{x/2} \left[\frac{1}{\kappa_m^2} + \frac{ix}{4k} - \frac{i\xi^2}{kx}\right]^{\frac{p}{2}-1} d\xi. \quad (31)$$

В дальнейшем нас будет интересовать случай, когда $\sqrt{\lambda x} \gg \lambda_0$ (противоположный случай рассмотрен методом геометрической оптики). Тогда в (31) $1/\kappa_m^2 \ll |ix/4k|$ и величиной $1/\kappa_m^2$ можно пренебречь:

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1^2 \rangle &\approx -0,033 \pi^2 \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) C_\varepsilon^2 k^2 \left(\frac{ix}{4k}\right)^{\frac{p}{2}-1} \int_0^{x/2} \left[1 - \frac{4\xi^2}{x^2}\right]^{(p-2)/2} d\xi = \\ &= -\left(i^{\frac{p}{2}-1}\right) 0,033 \pi^2 \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) 2^{1-p} C_\varepsilon^2 k^2 x^{3-\frac{p}{2}} \int_0^1 (1-t^2)^{\frac{p}{2}-1} dt. \end{aligned} \quad (32)$$

Входящий в (32) интеграл выражается через Γ -функцию

$$\int_0^1 (1-t^2)^{\frac{p}{2}-1} dt = \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, \frac{p}{2}\right) = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right)}.$$

Подставляя это выражение в (32), учитывая формулу

$$\Gamma\left(\frac{p}{2}\right) \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) = \frac{\pi}{\sin \frac{\pi p}{2}}$$

и взяв действительную часть от (32), найдем

$$\operatorname{Re} \langle \Phi_1^2 \rangle = - \frac{0,033\pi^3 \sqrt{\pi}}{2^{p+1} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cos \frac{\pi p}{4}} C_e^2 k^{3-\frac{p}{2}} x^{p/2}. \quad (33)$$

Найдем теперь величину $\langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle$. Используя (14), получаем

$$\begin{aligned} \langle \Phi_1 \Phi_1^* \rangle &= \pi^2 k^2 x \int_0^\infty \Phi_e(\kappa) \kappa d\kappa = 0,033\pi^2 C_e^2 k^2 x \int_0^\infty \kappa^{1-p} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right) d\kappa = \\ &= \frac{1}{2} 0,033\pi^2 \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) C_e^2 k^2 \kappa_m^{2-p} x. \quad (34) \end{aligned}$$

Оба выражения, (33) и (34), получены при $p < 2$, когда сходятся представляющие их интегралы. Однако, как было показано при анализе формулы (25), выражение для $\langle \chi^2 \rangle$, равное полусумме (33) и (34), конечно и при $p > 2$, в частности при $p = \frac{11}{3}$. Поэтому в выражении

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} 0,033\pi^2 \Gamma\left(1 - \frac{p}{2}\right) C_e^2 k^2 \kappa_m^{2-p} x - \right. \\ &\quad \left. - \frac{0,033\pi^3 \sqrt{\pi}}{2^{p+1} \Gamma\left(\frac{p+1}{2}\right) \cos \frac{\pi p}{4}} C_e^2 k^{3-\frac{p}{2}} x^{p/2} \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

можно уже положить $p = 11/3$ *). Заметим, что отношение первого слагаемого в (35) ко второму имеет порядок

$$\left(\frac{\lambda_0^3}{\lambda x}\right)^{5/6} \ll 1,$$

*) Легко убедиться в том, что при $p = 2$ выражение (35) остается конечным, т. е. это выражение является аналитической функцией p при $p < 4$ и им можно пользоваться при $p = \frac{11}{3} < 4$.

так как параметр $\sqrt{\lambda x}/\lambda_0$ предполагается большим. Поэтому в (35) можно сохранить лишь второе слагаемое и мы получаем

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{0,033\pi^3 \sqrt{\pi}}{2^{7/2} \Gamma\left(\frac{14}{6}\right) \left(-\cos \frac{11}{12} \pi\right)} C_\epsilon^2 k^{7/2} x^{11/6} = 0,031 C_\epsilon^2 k^{7/2} x^{11/6}. \quad (36)$$

Формула (36) для $\langle \chi^2 \rangle$ отличается от соответствующей формулы для плоской волны лишь численным коэффициентом 0,031 вместо 0,077. Таким образом, при $\sqrt{\lambda x} \gg \lambda_0$ средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды сферической волны приблизительно в 2,5 раза меньше соответствующей величины для плоской волны.

Разница между флуктуациями амплитуды плоской и сферической волн постепенно уменьшается с ростом глубины проникновения x в неоднородную среду. Если при $x \ll \lambda_0^2/\lambda$ отношение этих величин равно 10, а при $x \gg \frac{\lambda_0^2}{\lambda}$ оно равно 2,5, то при $x \gg \frac{L_0^2}{\lambda}$, где L_0 — внешний масштаб турбулентности, эти величины становятся одинаковыми. Последнее следует из формулы (25), из которой видно, что в случае очень больших x второе слагаемое в фигурной скобке несущественно, так же как и в аналогичной формуле для плоской волны, и в этом случае мы имеем для них одинаковые выражения.

§ 50. Границы применимости первого приближения метода плавных возмущений

Метод плавных возмущений основан на приближенном решении уравнения для логарифма поля Φ путем разложения в ряд по малому параметру ϵ_1 . Кроме того, как и в методе геометрической оптики, используется разложение по малому параметру λ/λ_0 . Однако последнее разложение накладывает на решение значительно менее жесткие ограничения, чем в методе геометрической оптики. Как было показано в § 45, переход от точного ядра дифракционной задачи $\exp(ikR)/R$ к ядру $\exp\left(ik \frac{\rho^2}{2x}\right)/x$ с одновременным отбрасыванием интеграла по области, лежащей за точкой наблюдения (это эквивалентно замене полного оператора Лапласа $\Delta \Phi$ на оператор $\Delta_\perp \Phi$), может быть произведен, если $\langle \Phi_{11}^2 \rangle = \frac{1}{16} \sigma_\epsilon^2$ мало по сравнению с $\langle \Phi_1^2 \rangle$. Вместо последней величины мы можем использовать $\langle \chi^2 \rangle$ (поскольку $\langle S_1^2 \rangle$ всегда больше, чем $\langle \chi^2 \rangle$). Воспользовавшись формулой (31.47)

$$\langle \chi^2 \rangle = 0,077 C_\epsilon^2 k^{7/2} L^{11/6},$$

мы сможем записать это условие в виде

$$\frac{1}{16} \sigma_z^2 \ll 0,077 C_z^2 k^{7/6} L^{11/6}. \quad (1)$$

Условие (1) содержит величину σ_z^2 , определяемую крупномасштабными компонентами турбулентности. Ее можно оценить при помощи приближенного соотношения $\sigma_z^2 \approx 2C_z^2 L_0^{11/6}$, где L_0 — внешний масштаб турбулентности, вблизи которого происходит «насыщение» структурной функции $D_z(r)$. Используя эту формулу, запишем (1) в виде

$$k^{7/6} L^{11/6} / L_0^{-11/6} \gg 1 \quad (2)$$

или

$$\frac{L}{L_0} \gg \left(\frac{\lambda}{L}\right)^{3/4}. \quad (2a)$$

Из (2a) видно, что при $\lambda \ll L$ и $L > L_0$ (что всегда выполняется на практике) это условие не накладывает существенных ограничений на входящие в него величины. Более существенным является условие (29.45)

$$L \ll \frac{\lambda_0^4}{\lambda^3}, \quad (3)$$

использованное при переходе от точного дифракционного ядра к френелевскому.

Перейдем теперь к оценкам, связанным с приближенным характером решения нелинейного уравнения для Φ [94, 114—116]. Решение уравнения для Φ было получено в виде ряда $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$, причем был использован его первый член Φ_1 . Для Φ_2 мы имеем выражение (31.45)

$$\Phi_2(L, y, z) = \frac{1}{4\pi} \int_0^L dx' \iint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \frac{\exp \left\{ ik \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2(L-x')} \right\}}{L-x'} \times \\ \times [\nabla \Phi_1(x', y', z')]^2. \quad (4)$$

Найдем прежде всего среднее значение поправки

$$\langle \Phi_2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_0^L dx' \iint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \frac{\exp \left\{ ik \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2(L-x')} \right\}}{L-x'} \times \\ \times \langle [\nabla \Phi_1(x', y', z')]^2 \rangle. \quad (5)$$

Для ее вычисления необходимо предварительно найти величину $\langle [\nabla\Phi_1]^2 \rangle$. Рассмотрим для этого корреляционную функцию градиента Φ_1 в плоскости $x = L$:

$$\langle \nabla\Phi_1(\mathbf{r}_1) \nabla\Phi_1(\mathbf{r}_2) \rangle = B_{\nabla\Phi}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (6)$$

При вычислении $\nabla\Phi_1$ можно ограничиться лишь его «поперечной» частью ∇_{\perp} (так же как при замене Δ на Δ_{\perp}). Следовательно,

$$\begin{aligned} B_{\nabla\Phi}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) &\approx \langle \nabla_{\perp}\Phi_1(\mathbf{r}_1) \nabla_{\perp}\Phi_1(\mathbf{r}_2) \rangle = \\ &= \nabla_{\perp}(\mathbf{r}_1) \nabla_{\perp}(\mathbf{r}_2) \langle \Phi_1(\mathbf{r}_1) \Phi_2(\mathbf{r}_2) \rangle. \end{aligned}$$

Но $\langle \Phi_1(\mathbf{r}_1) \Phi_1(\mathbf{r}_2) \rangle$ зависит лишь от $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, поэтому можно заметить $\nabla_{\perp}(\mathbf{r}_2)$ на $-\nabla_{\perp}(\mathbf{r}_1)$:

$$B_{\nabla\Phi}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\nabla_{\perp}^2 \langle \Phi_1(\mathbf{r}_1) \Phi_1(\mathbf{r}_2) \rangle. \quad (7)$$

Применим оператор $\nabla_{\perp}^2 = \Delta_{\perp}$ к равенству (11.46):

$$D_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \equiv \langle [\Phi_1(\mathbf{r}_1) - \Phi_1(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle = 2 \langle \Phi_1^2 \rangle - 2 \langle \Phi_1(\mathbf{r}_1) \Phi_1(\mathbf{r}_2) \rangle.$$

В результате получим

$$-\Delta_{\perp} \langle \Phi_1(\mathbf{r}_1) \Phi_1(\mathbf{r}_2) \rangle = \frac{1}{2} \Delta_{\perp} D_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2),$$

так как $\langle \Phi_1^2 \rangle$ зависит только от продольных координат.

Подставляя это выражение в (7), найдем

$$B_{\nabla\Phi}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = \frac{1}{2} \Delta_{\perp} D_2(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (8)$$

Положим здесь $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_2$:

$$\langle [\nabla\Phi_1]^2 \rangle = B_{\nabla\Phi}(0) = \frac{1}{2} \Delta_{\perp} D_2(0). \quad (9)$$

Для нахождения правой части (9) воспользуемся спектральным разложением функции $D_2(\rho)$:

$$D_2(\rho) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i(\kappa_1 \eta + \kappa_3 \zeta)}] F_2(\kappa_2, \kappa_3, x') d\kappa_2 d\kappa_3, \quad (10)$$

где (см. (35.46))

$$F_2(\kappa_2, \kappa_3, x') = \frac{i\pi}{2} \frac{k^3}{\kappa^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\kappa^2 x'}{k}\right) \right] \Phi_{\epsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3). \quad (11)$$

Применяя к (10) оператор Δ_{\perp} , полагая затем $\eta = \xi = 0$ и подставляя (11), получим

$$\begin{aligned} \langle |\nabla\Phi_1(x', y', z')|^2 \rangle &= \\ &= \frac{i\pi k^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\kappa^2 x'}{k}\right) \right] \Phi_{\epsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Выражение (12) не зависит от y', z' . Поэтому в (5) можно выполнить интегрирование по этим переменным, в результате чего получаем

$$\langle \Phi_2(L, y, z) \rangle = \frac{i}{2k} \int_0^L \langle |\nabla\Phi_1(x', y', z')|^2 \rangle dx'. \quad (13)$$

Подставляя (12) и выполняя интегрирование по x' , найдем

$$\begin{aligned} \langle \Phi_2(L, y, z) \rangle &= -\frac{\pi k^2}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ L + \frac{ik}{\kappa^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{i\kappa^2 L}{k}\right) \right] \right\} \times \\ &\quad \times \Phi_{\epsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned} \quad (14)$$

Рассмотрим отдельно действительную и мнимую части $\langle \Phi_2 \rangle$:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \Phi_2(L, y, z) \rangle &= \\ &= -\frac{\pi k^2 L}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \left[1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right] \Phi_{\epsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3, \end{aligned} \quad (14a)$$

$$\operatorname{Im} \langle \Phi_2(L, y, z) \rangle = -\frac{\pi k^3}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2 \frac{\kappa^2 L}{2k}}{\kappa^2} \Phi_{\epsilon}(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (15)$$

В § 46 нами были получены формулы (36.46) — (38.46) для спектральных плотностей флуктуаций F_{χ} и $F_{\chi S}$. Сравнивая (14) с (36.46), убеждаемся в том, что

$$\operatorname{Re} \langle \Phi_2(L, y, z) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} F_{\chi}(L, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3 = - \langle \chi^2(L) \rangle, \quad (16)$$

$$\operatorname{Im} \langle \Phi_2(L, y, z) \rangle = - \int_{-\infty}^{\infty} F_{\chi S}(L, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3 = - \langle \chi(L) S_1(L) \rangle.$$

Выше, в § 47 (см. (38.47)), было установлено, что величины $\langle \chi S_1 \rangle$ и $\langle \chi^2 \rangle$ пропорциональны друг другу (они отличаются лишь численным коэффициентом). Поэтому условия применимости первого приближения метода плавных возмущений, вытекающие из (16) и (17), по существу, одинаковы:

$$\langle \chi^2 \rangle (L) \ll 1. \quad (18)$$

При выполнении этого условия как логарифмы амплитуды, так и фазовый множитель падающей волны мало отличаются от принятых при расчете невозмущенных значений $\ln A_0$, $\exp(ikx)$.

Условие (18) непосредственно связано с законом сохранения энергии. Волновое поле Ψ связано с Φ соотношением $\Psi = \exp \Phi$. Плотность потока энергии (если пренебречь несущественными флуктуациями направления распространения, приводящими к поправкам более высокого порядка малости) пропорциональна

$$\begin{aligned} \Psi \Psi^* &= \exp(\Phi + \Phi^*) = A_0^2 \exp(\Phi_1 + \Phi_1^* + \Phi_2 + \Phi_2^* + \dots) = \\ &= A_0^2 \exp\{2\chi + 2 \operatorname{Re} \Phi_2 + \dots\}. \end{aligned}$$

Записав $\Phi_2 = \langle \Phi_2 \rangle + [\Phi_2 - \langle \Phi_2 \rangle]$, получим

$$\Psi \Psi^* = A_0^2 \exp\{2 \operatorname{Re} \langle \Phi_2 \rangle\} \exp\{2\chi + 2 \operatorname{Re} [\Phi_2 - \langle \Phi_2 \rangle] + \dots\}.$$

Усредним это выражение. Очевидно, что при распространении плоской волны в неограниченном пространстве, не обладающем поглощением, плотность потока энергии должна сохраняться, т. е. должно выполняться соотношение $\langle \Psi \Psi^* \rangle = \text{const}$. Так как случайные величины χ и $\operatorname{Re} [\Phi_2 - \langle \Phi_2 \rangle]$ стоят под знаком экспоненты, то для выполнения операции усреднения необходимо знать закон распределения вероятностей этих величин. Величина χ , как было установлено выше, выражается при помощи интеграла от случайной величины ε_1 . В случае, если расстояние L значительно превышает радиус корреляции L_0 флуктуаций ε , в силу центральной предельной теоремы теории вероятностей закон распределения χ приближается к нормальному *).

Аналогичные рассуждения можно было бы применить и к величине $\Phi_2 - \langle \Phi_2 \rangle$, но при выполнении усреднения мы не будем учитывать этого члена, так как он приводит к величинам более высокого порядка малости.

*) Для этого должны выполняться некоторые специальные условия, налагаемые на моменты функции ε_1 , но мы не будем касаться здесь этого вопроса.

Для любой случайной величины ξ (распределенной по нормальному закону) имеет место формула

$$\langle \exp \xi \rangle = \exp \left\{ \frac{1}{2} \langle \xi^2 \rangle \right\} \quad (\langle \xi \rangle = 0).$$

Применяя эту формулу, получим

$$\begin{aligned} \langle \Psi \Psi^* \rangle &= A_0^2 \exp \{2 \operatorname{Re} \langle \Phi_2 \rangle\} \exp \{2 \langle \chi^2 \rangle\} = \\ &= A_0^2 \exp \{2 [\langle \chi^2 \rangle + \operatorname{Re} \langle \Phi_2 \rangle]\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставляя сюда (16), приходим к соотношению

$$\langle \Psi \Psi^* \rangle = A_0^2 = \text{const.}$$

Таким образом, чтобы не вступать в противоречие с законом сохранения энергии, необходимо учитывать в выражении для среднего поля второе приближение метода плавных возмущений. Если же мы ограничимся лишь величиной Φ_1 , то необходимо требовать выполнения условия (18), при котором доля энергии, переходящая от регулярной падающей волны в энергию флуктуаций, мала.

Можно было бы полагать, что, учитывая ослабление среднего поля, даваемое формулами (16) и (17), можно существенно расширить область применимости метода плавных возмущений. В этом случае в качестве падающей волны следовало бы задать

$$\Phi_0 = \ln A_0 + ikr - \langle \chi^2(r) \rangle - i \langle \chi(r) S_1(r) \rangle, \quad (20)$$

где величины $\langle \chi^2 \rangle$ и $\langle \chi S_1 \rangle$ вычислены в первом приближении. Основываясь на (20), можно найти уточненные значения и для флуктуационной части поля Φ_1 . В этом случае формулы для средних квадратов флуктуаций логарифма амплитуды и фазы волны совпадают с полученными выше, но флуктуации в них понимаются как отклонение от среднего значения (20), а не от невозмущенной волны. Однако более подробный анализ, который мы не приводим ввиду его чрезвычайной громоздкости, приводит к выводу, что в этом случае в выражении для $\langle \Phi \rangle$ поправка следующего порядка малости пропорциональна $\langle \chi^2 \rangle^2$. Выражение для $\langle \Phi \rangle$, полученное с точностью до членов четвертого порядка малости, для модели «закон 2/3» равно

$$\begin{aligned} \langle \Phi \rangle &= \ln A_0 + ikr - \langle \chi^2(r) \rangle - i \langle \chi(r) S_1(r) \rangle - \\ &\quad - 2,9 (1 + i\sqrt{3}) \langle \chi^2(r) \rangle^2. \end{aligned} \quad (21)$$

Поэтому формула (20), описывающая ослабление среднего поля, также верна лишь при малых $\langle \chi^2 \rangle$.

Этот вывод на первый взгляд находится в противоречии с соотношением (19), из которого следует, что при Φ_0 , задаваемой

формулой (20), закон сохранения энергии выполняется. В действительности же это означает просто, что в случае $\langle \chi^2 \rangle \sim 1$ одновременно становятся существенными все члены ряда теории возмущений как в выражении для среднего значения логарифма поля, так и в выражении для среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды.

Возникает естественный вопрос: поскольку и метод плавных возмущений ограничен условием малости флуктуаций логарифма амплитуды (18), то имеет ли смысл использовать этот метод и не проще ли ограничиться методом возмущений применительно к исходному волновому уравнению? Если в методе плавных возмущений заменить логарифм амплитуды его первым членом разложения в ряд, то получающиеся таким образом выражения можно непосредственно получить и методом малых возмущений.

Формально преимущество метода плавных возмущений заключается в том, что условие малости накладывается не на флуктуации поля, а на флуктуации его логарифма, что является значительно более слабым ограничением. Однако имеется еще одно существенное обстоятельство. В методе малых возмущений рассеянное поле является случайной комплексной величиной с гауссовским (в силу центральной предельной теоремы) законом распределения. Отсюда следует, что закон распределения вероятностей для амплитуды является в общем случае смещенным законом Релея. Но для этого закона распределения отношение $\langle [A - \langle A \rangle]^2 \rangle / \langle A \rangle^2$ не превышает $\frac{4 - \pi}{\pi} = 0,27$. В то же время метод плавных возмущений приводит к логарифмически нормальному закону распределения для флуктуаций амплитуды. Этот закон распределения допускает любые значения отношения $\langle [A - \langle A \rangle]^2 \rangle / \langle A \rangle^2$. В экспериментах (см. гл. 4) очень часто наблюдаются значения $\langle [A - \langle A \rangle]^2 \rangle / \langle A \rangle^2$, превышающие 0,27 и, следовательно, не могущие быть объясненными при помощи метода возмущений. В то же время логарифмически нормальный закон распределения очень хорошо оправдывается экспериментально.

Таким образом, несмотря на существенное ограничение (18), метод плавных возмущений имеет значительно более широкую область применимости, чем метод малых возмущений, описывающий лишь однократное рассеяние.

При экспериментальном исследовании флуктуаций амплитуды света, распространяющегося в приземном слое атмосферы, было установлено, что метод плавных возмущений оправдывается экспериментально при выполнении условия

$$\sqrt{\langle \chi^2 \rangle} = 0,28 C_e k^{7/12} L^{1/12} < 0,8.$$

При этом значение отношения $\langle [A - \langle A \rangle]^2 \rangle / \langle A \rangle^2$ равно 0,90. Таким образом, имеется большой диапазон условий, при которых можно пользоваться методом плавных возмущений, но уже неприменим метод малых возмущений.

Однако в тех случаях, когда полученная путем расчета величина

$$\sqrt{\langle \chi^2 \rangle} = 0,28 C_2 k^{7/12} L^{11/12}$$

превышает 0,8, наблюдается резкое расхождение результатов эксперимента с теорией (см. рис. 60 на стр. 406), объясняющееся неприменимостью первого приближения метода плавных возмущений.

В следующем параграфе намечен метод расчета, пригодный и в случае больших флуктуаций логарифма амплитуды, когда условие (18) не выполняется.

§ 51. Сильные флуктуации амплитуды и фазы плоской монохроматической волны [178]

Как было выяснено в предыдущем параграфе, первое приближение метода плавных возмущений позволяет рассчитать лишь слабые флуктуации логарифма поля, ограниченные условием $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$. Между тем даже в такой слабонеоднородной среде, как атмосфера, могут наблюдаться сильные флуктуации амплитуды волны. Значение

$$\sigma_1^2(L) = 0,077 C_2^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad (1)$$

представляющее собой вычисленную в первом приближении метода плавных возмущений величину $\langle \chi^2 \rangle$, при достаточно больших k и L может значительно превосходить единицу (например, для света, распространяющегося в приземном слое, σ_1^2 становится равной единице при обычных метеорологических условиях для L порядка нескольких километров (см. гл. 4)).

В случае $\sigma_1^2 \gg 1$ первое приближение метода плавных возмущений уже недостаточно. Более того, учет нескольких следующих членов ряда теории возмущений, т. е. Φ_2, Φ_3, \dots , также не может дать удовлетворительного результата, так как одновременно становятся существенными все члены этого ряда. Таким образом, для вычисления $\langle \chi^2 \rangle$ и $D_S(\rho)$ в этом случае необходимо применить другое разложение.

Прежде чем переходить к выводу соответствующих уравнений, проведем качественное рассмотрение.

Средний квадрат флуктуаций разности фаз на расстоянии ρ в плоскости $x = L$ равен согласно (37.47)

$$D_{S_1}(\rho) = 0,73 C_e^2 k^3 L \rho^{3/2} \quad (2)$$

(фаза S снабжена индексом 1, означающим, что (2) вычислено в первом приближении). Подсчитаем на основании этой формулы средний квадрат флуктуаций разности фаз на расстоянии $\rho = \sqrt{\lambda L} \sim \sqrt{L}/k$, соответствующем радиусу первой зоны Френеля:

$$D_{S_1}(\sqrt{\lambda L}) \sim C_e^2 k^{7/2} L^{11/4} \sim \sigma_1^2(L).$$

Таким образом, в случае, когда $\sigma_1^2(L) \sim 1$, флуктуация разности фаз на краях первой зоны Френеля становятся не малыми. Это означает, что окружность радиуса $\sqrt{\lambda L}$ в действительности больше не является линией, отделяющей область, из которой в точку наблюдения приходят синфазные колебания. Внутри этой окружности можно выделить несколько областей, имеющих неправильную форму, из которых излучение будет приходить в точку наблюдения в фазе и которые будут в действительности являться зонами Френеля. В отличие от общепринятого термина их можно назвать «статистическими» зонами Френеля.

Появление статистических зон Френеля в корне меняет картину распространения волны. Промежуточную плоскость $x = \text{const}$, на которой имеется много беспорядочных изменений фазы на расстояниях порядка $\sqrt{\lambda L}$, можно уподобить излучателю высокого порядка, который, как известно, дает значительно меньшее излучение, чем синфазный излучатель.

Рассмотрим простой пример. Пусть на пути плоской волны, распространяющейся вдоль оси x , помещена линза, вносящая сдвиг фазы

$$S(\eta, \zeta) = \alpha\eta + \beta\zeta + a\eta^2 + b\zeta^2,$$

где η, ζ — координаты в плоскости $x = 0$, где располагается выходная плоскость линзы. Поле $E(x, y, z)$ в точке (x, y, z) за линзой можно вычислить в приближении френелевской дифракции

$$E(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikR}}{R} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{ik}{2R}(2y\eta + 2z\zeta - \eta^2 - \zeta^2)} E_0(\eta, \zeta) d\eta d\zeta,$$

где $R = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Подставляя

$$E_0(\eta, \zeta) = A_0 e^{iS(\eta, \zeta)}$$

и выполняя интегрирование, получим формулу

$$E(x, y, z) = \frac{A_0}{\sqrt{\left|1 + \frac{2Ra}{k}\right| \left|1 + \frac{2Rb}{k}\right|}} e^{iS(x, y, z)}$$

(мы не выписываем выражение для фазы, так как оно не понадобится в дальнейшем). Таким образом, логарифм амплитуды равен

$$\ln A = \ln A_0 - \frac{1}{2} \ln \left|1 + \frac{2Ra}{k}\right| - \frac{1}{2} \ln \left|1 + \frac{2Rb}{k}\right|.$$

Будем считать теперь коэффициенты a и b случайными, причем $\langle a \rangle = \langle b \rangle = \langle ab \rangle = 0$. Для простоты расчета примем, что a и b имеют одинаковый закон распределения вероятностей

$$p(a) = \begin{cases} \frac{1}{2q} & \text{при } |a| < q, \\ 0 & \text{при } |a| > q. \end{cases}$$

Найдем среднее значение

$$\langle \ln A \rangle = \iint \ln A p(a) p(b) da db.$$

Производя несложное вычисление, получим

$$\langle \ln A \rangle = \ln A_0 - \frac{1}{2s} \left\{ s \ln |s^2 - 1| + \ln \left| \frac{s+1}{s-1} \right| \right\} + 1,$$

где

$$s = \frac{2Rq}{k}$$

— величина, пропорциональная среднему квадрату флуктуаций разности фаз на расстоянии радиуса зоны Френеля. Точно так же может быть найдена и величина

$$\langle \chi^2 \rangle = \langle [\ln A - \langle \ln A \rangle]^2 \rangle = \frac{1}{2} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 1}{4s^2} \left[\ln \left| \frac{s+1}{s-1} \right| \right]^2 \right\}. \quad (*)$$

В случае $s^2 \ll 1$ мы получаем отсюда

$$\langle \chi^2 \rangle_1 = \frac{1}{6} s^2 + \dots$$

Заметим, что последнее выражение мы получили бы, считая, что флуктуации фазы малы, и применяя метод возмущений. Если построить теперь согласно (*) зависимость $\langle \chi^2 \rangle$ от $\langle \chi^2 \rangle_1 = \frac{1}{6} s^2$, то мы

получим следующую картину. При $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$ эти величины равны друг другу. При $\langle \chi^2 \rangle_1 = 0,238$ величина $\langle \chi^2 \rangle$ принимает максимальное значение 0,713, а при дальнейшем увеличении $\langle \chi^2 \rangle_1$ стремится сверху к постоянному значению 0,5.

Из рассмотренного примера видно, что теория возмущений применима к логарифму амплитуды лишь до тех пор, пока малы флуктуации разности фаз на зоне Френеля, т. е. пока не появляются «статистические» зоны Френеля. В случае же, когда $\langle \chi^2 \rangle_1 \gg 1$, величина $\langle \chi^2 \rangle$ перестает возрастать при увеличении $\langle \chi^2 \rangle_1$.

Перейдем к более строгому расчету. Из приведенных рассуждений следует, что для получения результатов, справедливых при $\sigma_1^2 \gg 1$, необходимо учесть искажение распространяющейся плоской волны.

Вернемся к исходному уравнению (2.45)

$$\Delta\Phi + (\nabla\Phi)^2 + k^2 + k^2\epsilon_1(r) = 0 \quad (3)$$

и произведем в нем подстановку

$$\Phi = \ln A_0 + ikr + \varphi(r). \quad (4)$$

Тогда $\nabla\Phi = ik + \nabla\varphi$, $\Delta\Phi = \Delta\varphi$ и (3) примет вид

$$\Delta\varphi + 2ik\nabla\varphi + (\nabla\varphi)^2 + k^2\epsilon_1(r) = 0. \quad (5)$$

Произведем подстановку

$$\varphi = iw. \quad (6)$$

Тогда

$$\nabla\varphi = i\nabla w + w\nabla i, \quad \Delta\varphi = i\Delta w + 2\nabla i \nabla w + w\Delta i$$

и уравнение (5) после группировки членов принимает вид

$$i\Delta w + [2\nabla i + 2iku + u^2\nabla w + iw\nabla i] \nabla w + \\ + [\Delta i + 2ik\nabla i + i\nabla i \nabla w + w(\nabla i)^2] w + k^2\epsilon_1(r) = 0. \quad (7)$$

Так как вместо одной искомой функции φ мы ввели две функции u и w , то можно ввести дополнительное уравнение, связывающее эти функции. Потребуем, чтобы коэффициент при ∇w в (7) обратился в нуль:

$$2\nabla i + 2iku + u^2\nabla w + iw\nabla i = 0. \quad (8)$$

Разделив это уравнение на u , получим

$$2\nabla \ln u + 2ik + i\nabla w + w\nabla i = 0,$$

или

$$\nabla [2 \ln u + iw] = -2ik. \quad (9)$$

Интегрируя это уравнение, найдем

$$2 \ln u + iw = -2ikr \quad (10)$$

(постоянная интегрирования выбрана равной нулю). В уравнении (7) выпадает член с ∇w и оно принимает вид

$$u\Delta w + [\Delta u + 2ik\nabla u + u\nabla u\nabla w + w(\nabla u)^2]w + k^2\varepsilon_1(r) = 0. \quad (11)$$

Применим к (8) оператор ∇ . Переносим затем часть членов в правую часть равенства, получим выражение для коэффициента при w в (11):

$$\begin{aligned} F &\equiv \Delta u + 2ik\nabla u + u\nabla u\nabla w + w(\nabla u)^2 = -\Delta u - 2u\nabla u\nabla w - \\ &- u^2\Delta w - iw\Delta u = -\Delta u - u[w\Delta u + 2\nabla w\nabla u + u\Delta w] = \\ &= -\Delta u - u\Delta(uw) = -u[\Delta \ln u + (\nabla \ln u)^2 + \Delta(uw)]. \end{aligned}$$

Применяя к (9) оператор Δ , имеем

$$2\Delta \ln u + \Delta(uw) = 0,$$

откуда

$$F = u[\Delta \ln u - (\nabla \ln u)^2].$$

Подставляя это выражение в (11), окончательно получаем после деления на u :

$$\Delta w + [\Delta \ln u - (\nabla \ln u)^2]w + \frac{k^2\varepsilon_1(r)}{u} = 0. \quad (12)$$

Система уравнений (10), (12) эквивалентна исходному уравнению (5). Первое приближение метода плавных возмущений эквивалентно пренебрежению в уравнении (5) членом $(\nabla\varphi)^2$. На языке функций u, w это эквивалентно пренебрежению членом iw в (10). В этом случае (отмечая первое приближение индексом 1)

$$\begin{aligned} 2 \ln u_1 &= -2ikr, \quad u_1 = e^{-ikr}, \\ \Delta \ln u_1 - (\nabla \ln u_1)^2 &= k^2, \end{aligned} \quad (13)$$

так что

$$\Delta w_1 + k^2 w_1 = -k^2\varepsilon_1(r) e^{ikr}. \quad (14)$$

Это уравнение совпадает с (9.45). Поэтому (15)

$$\varphi_1 = u_1 w_1 = \Phi_1.$$

Чтобы учесть отличие падающей волны, роль которой играет u , от плоской, в уравнении (10) следует сохранить член iw .

Мы произведем учет этого члена методом последовательных итераций. В первом приближении будем считать его равным, согласно (15), Φ_1 . Дальнейшие итерации будут выполнены после анализа первого приближения. Подставляя в (10) $uw \approx \Phi_1$, получаем

$$2 \ln u = -2ikr - \Phi_1(r),$$

откуда

$$u(r) = e^{-ikr - \frac{1}{2} \Phi_1(r)} \quad (16)$$

Подставим (16) в уравнение (12). Для коэффициента при w получим

$$\begin{aligned} \Delta \ln u - (\nabla \ln u)^2 &= k^2 - \frac{1}{2} [\Delta \Phi_1 + 2ik \nabla \Phi_1] - \frac{1}{4} (\nabla \Phi_1)^2 = \\ &= k^2 \left[1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1(r) \right] - \frac{1}{4} (\nabla \Phi_1)^2 \end{aligned}$$

(в последнем равенстве использовано уравнение, которому удовлетворяет Φ_1). Тогда

$$\Delta w + \left[k^2 \left(1 - \frac{1}{2} \varepsilon_1(r) \right) - \frac{1}{4} (\nabla \Phi_1)^2 \right] w = -k^2 e^{ikr + \frac{1}{2} \Phi_1(r)} \varepsilon_1(r). \quad (17)$$

Как следует из этого уравнения, w имеет порядок малости ε_1 , так как правая часть (17) содержит этот множитель. Поэтому в левой части (17) можно отбросить величины более высокого порядка малости $\varepsilon_1 w$ и $(\nabla \Phi_1)^2 w$. Учет этих членов позволяет описать эффект убывания среднего поля за счет рассеяния (см. гл. 5), которым мы будем здесь пренебрегать. Тогда уравнение для w принимает вид

$$\Delta w + k^2 w = -k^2 e^{ikr + \frac{1}{2} \Phi_1(r)} \varepsilon_1(r). \quad (18)$$

В отличие от соответствующего уравнения (14) метода плавных возмущений, рассеиваемая волна в (18) имеет вид

$$\exp \left(ikr + \frac{1}{2} \Phi_1(r) \right).$$

т. е. в ней учитываются (в первом приближении) искажения фазы и амплитуды, описываемые множителем $\exp \left(\frac{1}{2} \Phi_1(r) \right)$.

Множитель

$$\exp \left(\frac{1}{2} \Phi_1 \right) = \exp \left(\frac{1}{2} \chi_1 + \frac{i}{2} S_1 \right)$$

содержит как амплитудные искажения χ_1 , так и фазовые S_1 . Легко видеть, что определяющую роль играет множитель $\exp\left(\frac{i}{2} S_1\right)$, который может, в отличие от $\exp\left(\frac{1}{2} \chi_1\right)$, менять знак. Кроме того, в турбулентной среде $\langle \chi_1^2 \rangle$ имеет конечное значение, в то время как $\langle S_1^2 \rangle$ для модели «закона 2/3» равно бесконечности. Мы поэтому для простоты расчета учтем лишь фазовые искажения рассеиваемой волны. Тогда уравнение (18) примет вид

$$\Delta w + k^2 w = -k^2 e^{ikr + \frac{i}{2} S_1(r)} \varepsilon_1(r). \quad (19)$$

Решение этого уравнения дается формулой

$$w(r) = \frac{k^2}{4\pi} \int \frac{e^{ik|r-r'|}}{|r-r'|} e^{ikr' + \frac{i}{2} S_1(r')} \varepsilon_1(r') d^3 r'. \quad (20)$$

Умножая (20) на выражение (16) для u , в котором также отброшен малосущественный множитель $\exp\left[\frac{1}{2} \chi_1(r)\right]$, получим

$$\varphi(r) = \frac{k^2}{4\pi} \int \frac{e^{ik|r-r'| - ik(r-r')}}{|r-r'|} \varepsilon_1(r') e^{\frac{i}{2} [S_1(r') - S_1(r)]} d^3 r'. \quad (21)$$

Направим ось x по вектору k и разложим, как и в первом приближении метода плавных возмущений, $|r - r'|$ в ряд

$$|r - r'| = |x - x'| + \frac{(y - y')^2 + (z - z')^2}{2(x - x')} + \dots$$

Ограничим область интегрирования слоем $0 < x' < x$, что было обосновано выше. В результате получаем

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x \frac{dx'}{x - x'} \int_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \exp\left(ik \frac{(y - y')^2 + (z - z')^2}{2(x - x')}\right) \times \\ \times \varepsilon_1(r') e^{\frac{i}{2} [S_1(r') - S_1(r)]}. \quad (22) \end{aligned}$$

Эта формула отличается от выражения для Φ_1 добавочным множителем $\exp\left\{\frac{i}{2} [S_1(r') - S_1(r)]\right\}$ под знаком интеграла. Заметим, что она содержит члены ряда теории возмущений для Φ любого порядка, т. е. Φ_1 , Φ_2 , Φ_3 и т. д., в чем легко убедиться, если разложить в ряд $\exp\left[\frac{i}{2} (S_1(r') - S_1(r))\right]$. Поэтому формула (22) приближенно суммирует бесконечную совокупность членов ряда $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2 + \dots$

Действительная и мнимая части (22) дают выражения для логарифма амплитуды и флуктуации фазы:

$$\chi(x, y, z) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x \frac{dx'}{x-x'} \iint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \times \\ \times \cos \left[k \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2(x-x')} + \frac{S_1(r')}{2} - \frac{S_1(r)}{2} \right] \varepsilon_1(r'), \quad (23)$$

$$S'(x, y, z) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x \frac{dx'}{x-x'} \iint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' \times \\ \times \sin \left[k \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2(x-x')} + \frac{S_1(r')}{2} - \frac{S_1(r)}{2} \right] \varepsilon_1(r'). \quad (24)$$

Средние значения выражений (23) и (24) уже не равны нулю, так как величины $S_1(r')$ и $\varepsilon_1(r')$ не являются статистически независимыми. Можно, однако, утверждать, что корреляция между ними очень мала. Действительно, $S_1(r)$ определяется интегралом от ε_1 по большому объему, примыкающему к лучу, входящему в точку r . Поэтому коэффициент корреляции между $\varepsilon_1(r)$ и $S_1(r)$ имеет порядок $L_0/x \ll 1$, где L_0 — радиус корреляции флуктуаций ε_1 . Поэтому в первом приближении можно считать, что величины ε_1 и $S_1(r') - S_1(r)$ статистически независимы, и в этом случае для величины $\langle \chi \rangle$ мы получим нуль. В действительности путем прямого вычисления легко показать, что $\langle \chi \rangle$ — величина второго порядка малости по ε_1 . Мы найдем $\langle \chi \rangle$ после вычисления $\langle \chi^2 \rangle$, а сейчас обратимся к вычислению последней величины. Здесь мы также используем соображение о независимости $S_1(r') - S_1(r)$ и $\varepsilon_1(r')$, а также учтем, что $S_1(r') - S_1(r)$ как величину, определяемую интегралом от ε_1 по большому объему, можно считать распределенной по гауссовскому закону в силу центральной предельной теоремы.

Возведем (23) в квадрат и усредним. Введя обозначения

$$B_\varepsilon(r', r'') = \langle \varepsilon_1(r') \varepsilon_1(r'') \rangle, \\ a_1 = k \frac{(y-y')^2 + (z-z')^2}{2(x-x')}, \quad a_2 = k \frac{(y-y'')^2 + (z-z'')^2}{2(x-x'')}, \\ \alpha_1 = \frac{1}{2} [S_1(r') - S_1(r)], \quad \alpha_2 = \frac{1}{2} [S_1(r'') - S_1(r)],$$

получим, учитывая независимость $\alpha_{1,2}$ и $\varepsilon_1(r')$:

$$\langle \chi^2 \rangle = \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \int_0^x \frac{dx'}{x-x'} \int_0^x \frac{dx''}{x-x''} \iiint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' dy'' dz'' B_\varepsilon(r', r'') \times \\ \times \langle \cos(a_1 + \alpha_1) \cos(a_2 + \alpha_2) \rangle. \quad (25)$$

Преобразуя произведение косинусов, имеем

$$\begin{aligned} \langle \cos(a_1 + \alpha_1) \cos(a_2 + \alpha_2) \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \langle \cos(a_1 + a_2 + \alpha_1 + \alpha_2) \rangle + \frac{1}{2} \langle \cos(a_1 - a_2 + \alpha_1 - \alpha_2) \rangle = \\ &= \frac{1}{2} \cos(a_1 + a_2) \langle \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \rangle - \frac{1}{2} \sin(a_1 + a_2) \langle \sin(\alpha_1 + \alpha_2) \rangle + \\ &+ \frac{1}{2} \cos(a_1 - a_2) \langle \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \rangle - \frac{1}{2} \sin(a_1 - a_2) \langle \sin(\alpha_1 - \alpha_2) \rangle. \end{aligned}$$

Теперь заметим, что для случайной величины γ ($\langle \gamma \rangle = 0$), распределенной по гауссовскому закону, имеет место формула

$$\langle \exp(i\gamma) \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \gamma^2 \rangle\right),$$

откуда

$$\langle \cos \gamma \rangle = \exp\left(-\frac{1}{2} \langle \gamma^2 \rangle\right), \quad \langle \sin \gamma \rangle = 0.$$

Величины $\alpha_1 \pm \alpha_2$ имеют гауссовское распределение вероятностей, и их средние значения равны нулю. Применяя последнюю формулу, получим после небольших вычислений

$$\langle \sin(\alpha_1 \pm \alpha_2) \rangle = 0,$$

$$\langle \cos(\alpha_1 - \alpha_2) \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{8} D_{S_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')\right\},$$

$$\langle \cos(\alpha_1 + \alpha_2) \rangle = \exp\left\{-\frac{1}{8} [2D_{S_1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + 2D_{S_1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') - D_{S_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')]\right\}, \quad (26)$$

где

$$D_{S_1}(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [S_1(\mathbf{r}_1) - S_1(\mathbf{r}_2)]^2 \rangle.$$

Подставляя эти выражения в (25), получим

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle &= \frac{1}{2} \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \int_0^x \frac{dx'}{x-x'} \int_0^x \frac{dx''}{x-x''} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \right) dy' dz' dy'' dz'' \times \\ &\times B_{\epsilon}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'') \left\{ \exp\left[-\frac{1}{8} D_{S_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}'')\right] \cos\left[\frac{k\rho_1^2}{2(x-x')} - \frac{k\rho_2^2}{2(x-x'')}\right] + \right. \\ &+ \exp\left[-\frac{1}{8} (2D_{S_1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}') + 2D_{S_1}(\mathbf{r}, \mathbf{r}'') - D_{S_1}(\mathbf{r}', \mathbf{r}''))\right] \times \\ &\quad \left. \times \cos\left[\frac{k\rho_1^2}{2(x-x')} + \frac{k\rho_2^2}{2(x-x'')}\right] \right\}, \quad (27) \end{aligned}$$

где

$$\rho_1^2 = (y - y')^2 + (z - z')^2, \quad \rho_2^2 = (y - y'')^2 + (z - z'')^2.$$

Это выражение отличается от соответствующей формулы первого приближения метода плавных возмущений наличием дополнительных экспоненциальных множителей. Аналогичная формула для $\langle S'' \rangle$ отличается от (27) знаком перед вторым слагаемым в фигурных скобках.

Произвести расчет по формуле (27) довольно затруднительно. Поэтому мы используем ряд дальнейших упрощений, которые носят характер довольно грубых оценок, но физический смысл которых достаточно ясен.

Используем то обстоятельство, что продольный радиус корреляции флуктуаций фазы, как показывает простой расчет, очень велик и имеет порядок длины всей трассы. Например, в приближении геометрической оптики, которое хорошо описывает флуктуации фазы, $S_1(r')$ определяется интегралом от ε_1 вдоль луча, идущего в точку r' . Если рассмотреть вторую точку r'' на том же луче, то в интеграле, определяющем $S_1(r'')$, большая часть пути интегрирования будет той же самой, что и в интеграле для $S_1(r')$. В структурной функции $D_{S_1}(r', r'')$, входящей в (27), точки r' , r'' имеют различные продольные координаты x' , x'' . Используя сильную корреляцию флуктуаций фазы вдоль оси x , можно приближенно записать

$$D_{S_1}(r', r'') \approx D_{S_1}\left(\frac{x' + x''}{2}, |\rho_1 - \rho_2|\right), \quad (28)$$

где $D_{S_1}(x, \rho)$ — структурная функция фазы в плоскости $x = \text{const}$. Через ρ_1 и ρ_2 обозначены векторы с компонентами $\rho_1 = (0, y - y', z - z')$, $\rho_2 = (0, y - y'', z - z'')$.

Рассмотрим теперь выражение

$$A = 2D_{S_1}(r, r') + 2D_{S_1}(r, r'') - D_{S_1}(r', r'').$$

Используя те же соображения, можно приближенно считать

$$A \approx 2D_{S_1}\left(\frac{x' + x''}{2}, \rho_1\right) + 2D_{S_1}\left(\frac{x' + x''}{2}, \rho_2\right) - D_{S_1}\left(\frac{x' + x''}{2}, \rho_1 - \rho_2\right).$$

Мы упростим это выражение еще больше, заменив его на

$$A \approx D_{S_1}\left(\frac{x' + x''}{2}, \rho_1 + \rho_2\right). \quad (29)$$

Основанием для такой замены является близость структурной функции

$$D_{S_1}(x, \rho) = \text{const } \rho^{1/2}$$

к функции const ρ^2 , для которой последнее соотношение выполняется точно. Кроме того, оно выполняется в точках $\rho_1 = 0$ или $\rho_2 = 0$ в случае $D_{S_1}(x, \rho) \sim \rho^{5/3}$ *).

Используя приближенные соотношения (28), (29), запишем выражение (27) для $\langle \chi^2 \rangle$ в виде

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle \approx & \frac{1}{2} \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \int_0^x \frac{dx'}{x-x'} \int_0^x \frac{dx''}{x-x''} \iiint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' dy'' dz'' \times \\ & \times B_e(r', r'') \left\{ \exp \left[-\frac{1}{8} D_{S_1} \left(\frac{x'+x''}{2}, \rho_1 - \rho_2 \right) \right] \times \right. \\ & \times \cos \left[\frac{k\rho_1^2}{2(x-x')} - \frac{k\rho_2^2}{2(x-x'')} \right] + \\ & \left. + \exp \left[-\frac{1}{8} D_{S_1} \left(\frac{x'+x''}{2}, \rho_1 + \rho_2 \right) \right] \cos \left[\frac{k\rho_1^2}{2(x-x')} + \frac{k\rho_2^2}{2(x-x'')} \right] \right\}. \quad (30) \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое в (30). Существенная для интегрирования по ρ_1, ρ_2 область определяется множителем

$$\cos \left[\frac{k\rho_1^2}{2(x-x')} - \frac{k\rho_2^2}{2(x-x'')} \right].$$

Аргумент косинуса имеет порядок $\frac{k(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2x - x' - x''}$ (взято среднее значение знаменателя). Интеграл по области, где

$$\left| \frac{k(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2x - x' - x''} \right| \gg 1,$$

за счет осцилляций косинуса мал. Поэтому основное значение имеет интегрирование по области

$$\left| \frac{k(\rho_1^2 - \rho_2^2)}{2x - x' - x''} \right| < 1.$$

В этой области аргумент $|\rho_1 - \rho_2|$ функции $D_{S_1} \left(\frac{x'+x''}{2}, |\rho_1 - \rho_2| \right)$ имеет порядок

$$|\rho_1 - \rho_2| = \beta \sqrt{\frac{2x - x' - x''}{k}}, \quad (31)$$

*) Простые оценки показывают, что совершаемая при этом в показателе экспоненты ошибка в существенной для интегрирования области, определяемой формулой (32), не превышает значения 0,25.

где β — некоторая численная постоянная порядка единицы. Такие же рассуждения можно применить и ко второму слагаемому в (30), что приведет к оценке

$$|\rho_1 + \rho_2| = \beta \sqrt{\frac{2x - x' - x''}{k}} \quad (32)$$

для аргумента функции $D_{S_1}\left(\frac{x' + x''}{2}, |\rho_1 + \rho_2|\right)$. Постоянные β в (31) и (32), вообще говоря, могли бы быть различными, однако для упрощения расчетов они взяты одинаковыми.

Используя (31) и (32), получим для $\langle \chi^2 \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \chi^2 \rangle \approx & \left(\frac{k^2}{4\pi}\right)^2 \int_0^x \frac{dx'}{x-x'} \int_0^x \frac{dx''}{x-x''} \iiint_{-\infty}^{\infty} dy' dz' dy'' dz'' B_z(r', r'') \times \\ & \times \exp\left\{-\frac{1}{8} D_{S_1}\left(\frac{x' + x''}{2}, \beta \sqrt{\frac{2}{k}\left(x - \frac{x' + x''}{2}\right)}\right)\right\} \times \\ & \times \cos \frac{k\rho_1^2}{2(x-x')} \cos \frac{k\rho_2^2}{2(x-x'')} \end{aligned} \quad (33)$$

Аналогичная формула для $\langle S'^2 \rangle$ отличается от (33) заменой косинусов в (33) на синусы. Формула (33) сводит рассматриваемую задачу к решенной выше задаче о флуктуациях амплитуды и фазы в среде с плавно меняющимися средними характеристиками турбулентности. Действительно, если рассмотреть «эффективную» корреляционную функцию

$$B_0(r', r'') = B_z(r', r'') \exp\left\{-\frac{1}{8} D_{S_1}\left(\frac{x' + x''}{2}, \beta \sqrt{\frac{2}{k}\left(x - \frac{x' + x''}{2}\right)}\right)\right\}, \quad (34)$$

зависящую от $\frac{x' + x''}{2}$, то мы приходим к этой задаче. Применительно к «закону» 2/3 для флуктуаций ϵ_1 формула (34) дает зависимость «эффективной» структурной характеристики C_0^2 от координаты $\xi = \frac{x' + x''}{2}$:

$$C_0^2(\xi) = C_z^2 \exp\left\{-\frac{1}{8} D_{S_1}\left(\xi, \beta \sqrt{\frac{2(x-\xi)}{k}}\right)\right\} \quad (35)$$

или

$$C_0^2(\xi) = C_z^2 \exp\{-0,16\beta^2 C_z^2 k^{7/4} \xi (x - \xi)^{5/4}\},$$

где мы использовали формулу (2) для $D_{S_1}(x, \rho)$.

Воспользуемся теперь формулой (24.48) для среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды в среде с переменным C_ε^2

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{11}{6} \cdot 0,077 k^{7/6} \int_0^x C_\varepsilon^2(\xi) (x - \xi)^{5/6} d\xi \quad (36)$$

и подставим в нее выражение (35):

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{11}{6} 0,077 C_\varepsilon^2 k^{7/6} \int_0^x (x - \xi)^{5/6} \exp \{-0,16 \beta^{5/3} C_\varepsilon^2 k^{7/6} \xi (x - \xi)^{5/6}\} d\xi. \quad (37)$$

Проведем замену переменной $\xi = xp$. Тогда

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{11}{6} 0,077 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} \int_0^1 (1-p)^{5/6} \exp \{-0,16 \beta^{5/3} C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} p (1-p)^{5/6}\} dp.$$

Подставляя $0,077 C_\varepsilon^2 k^{7/6} x^{11/6} = \sigma_1^2(x)$ — результат расчета $\langle \chi^2 \rangle$ в первом приближении метода плавных возмущений, получим

$$\langle \chi^2 \rangle = \frac{11}{6} \sigma_1^2(x) \int_0^1 (1-p)^{5/6} \exp \{-2,1 \beta^{5/3} \sigma_1^2(x) p (1-p)^{5/6}\} dp. \quad (38)$$

Мы видим, что $\langle \chi^2 \rangle$ является функцией от величины $\sigma_1^2(x)$, найденной в первом приближении. Анализ выражения (38) показывает, что при $\sigma_1^2 \ll 1$ $\langle \chi^2 \rangle \approx \sigma_1^2$, а при $\sigma_1^2 \rightarrow \infty$ величина $\langle \chi^2 \rangle$ стремится к постоянному пределу

$$\frac{11}{6 \cdot 2,1 \beta^{5/3}} = 0,87 \beta^{-5/3}.$$

Обратимся теперь к структурной функции фазы. Воспользуемся формулой (25.48)

$$D_S(x, \rho) = 0,73 k^2 \rho^{5/3} \int_0^x C_\varepsilon^2(\xi) d\xi, \quad (39)$$

подставляя (35) и вводя $\xi = px$, получим

$$\begin{aligned} D_{S_1}(x, \rho) &= 0,73 C_\varepsilon^2 k^2 \rho^{5/3} x \int_0^1 \exp \{-2,1 \beta^{5/3} \sigma_1^2(x) p (1-p)^{5/6}\} dp = \\ &= D_{S_1}(x, \rho) \varphi(2,1 \beta^{5/3} \sigma_1^2(x)), \end{aligned} \quad (40)$$

где

$$\varphi(z) = \int_0^1 e^{-zp(1-p)^{1/2}} dp.$$

Таким образом, $D_{S_1}(x, \rho)$ отличается от $D_{S_1}(x, \rho)$ дополнительным множителем φ . Функция $\varphi(z) \approx 1$ при $z \ll 1$. При $z \rightarrow \infty$ имеет место асимптотическая формула $\varphi(z) \approx \frac{1}{z}$.

Таким образом, при $\sigma_1^2 \gg 1$ функция $D_{S_1}(x, \rho)$ сильно отличается от принятой при расчете функции $D_{S_1}(x, \rho)$. Это означает, что первое приближение для uw , взятое при расчете, оказывается недостаточным. Подставим функцию (40) в (35), а затем полученное исправленное значение C_3^2 — в (39):

$$D_{S_1}(x, \rho) = 0,73C_3^2 k^2 \rho^{1/2} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{1}{8} D_{S_1} \left(\xi, \beta \sqrt{\frac{2(x-\xi)}{k}} \right) \right\} d\xi.$$

В результате получим следующее приближение D_{S_1} . Повторяя эту операцию многократно, и учитывая, что процесс последовательных итераций сходится, получим в пределе соотношение

$$D_S(x, \rho) = 0,73C_3^2 k^2 \rho^{1/2} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{1}{8} D_S \left(\xi, \beta \sqrt{\frac{2(x-\xi)}{k}} \right) \right\} d\xi, \quad (41)$$

представляющее собой интегральное уравнение для определения предельной функции $D_S(x, \rho)$.

Докажем, что процесс последовательных итераций, производимых по формуле

$$D_{S_{i+1}}(x, \rho) = D_{S_i}(x, \rho) \frac{1}{x} \int_0^x \exp \left\{ -\frac{1}{8} D_{S_i} \left(\xi, \beta \sqrt{\frac{2(x-\xi)}{k}} \right) \right\} d\xi,$$

сходится. Рассмотрим

$$D_{S_i} = D_{S_i} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-\frac{1}{8} D_{S_i}} d\xi.$$

Так как $D_{S_i} > 0$, то $D_{S_i} < D_{S_i}$. Кроме того, очевидно, $D_{S_i} > 0$.

Рассмотрим теперь D_{S_i} . Используя неравенство $D_{S_i} < D_{S_i}$, получим

$$D_{S_i} = D_{S_i} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-\frac{1}{8} D_{S_i}} d\xi > D_{S_i} \frac{1}{x} \int_0^x e^{-\frac{1}{8} D_{S_i}} d\xi = D_{S_i},$$

т. е. $D_{S_4} > D_{S_3}$. Но, так как $D_{S_3} > 0$, то, очевидно, $D_{S_3} < D_{S_1}$. Итак, мы показали, что $D_{S_4} > D_{S_3} > D_{S_2}$. Рассмотрим теперь D_{S_4} ; с одной стороны, используя неравенство $D_{S_3} < D_{S_1}$, найдем

$$D_{S_4} = D_{S_1} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x e^{-\frac{1}{8} D_{S_3}} d\xi > D_{S_1} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x e^{-\frac{1}{8} D_{S_1}} d\xi = D_{S_1}.$$

С другой стороны, из неравенства $D_{S_3} > D_{S_2}$ следует

$$D_{S_4} = D_{S_1} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x e^{-\frac{1}{8} D_{S_3}} d\xi < D_{S_1} \cdot \frac{1}{x} \int_0^x e^{-\frac{1}{8} D_{S_2}} d\xi = D_{S_2}.$$

Таким образом, из доказанных выше неравенств $D_{S_1} > D_{S_3} > D_{S_2}$ вытекают неравенства $D_{S_4} > D_{S_3} > D_{S_2}$. Последнее рассуждение можно повторить и дальше, в результате чего получим $D_{S_4} < D_{S_5} < D_{S_1}$, $D_{S_5} > D_{S_3} > D_{S_2}$ и т. д.

Таким образом, результат каждой последующей итерации лежит между результатами двух предыдущих итераций, откуда и вытекает сходимость этого процесса.

Введем масштаб l согласно соотношению

$$2,1\beta^{3/2}\sigma_1^2(l) = 1, \text{ т. е. } 2,1 \cdot 0,077\beta^{3/2}\bar{C}_2^2 k^2 l^{11/2} = 1.$$

Этот масштаб определяет расстояние, на котором средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды становится по порядку величины равным единице. Будем искать функцию $D_S(x, \rho)$ в виде

$$D_S(x, \rho) = 0,73C_2^2 k^2 \rho^{3/2} x \cdot f\left(\frac{x}{l}\right), \quad (42)$$

где $f(t)$ — безразмерная функция безразмерного аргумента. Подставляя (42) в уравнение (41), получим, полагая $p = \frac{\xi}{x}$:

$$f\left(\frac{x}{l}\right) = \int_0^1 \exp\left\{-2,1\beta^{3/2}\sigma_1^2(x) p(1-p)^{3/2} f\left(\frac{px}{l}\right)\right\} dp. \quad (43)$$

Обозначим $t = x/l$. Воспользовавшись определением l , получим

$$2,1\beta^{3/2}\sigma_1^2(x) = \frac{\sigma_1^2(x)}{\sigma_1^2(l)} = \left(\frac{x}{l}\right)^{11/2} = t^{11/2}.$$

Следовательно, уравнение (43) принимает вид

$$f(t) = \int_0^1 \exp\{-t^{11/2} p(1-p)^{3/2} f(pt)\} dp. \quad (43a)$$

Положив здесь $t = 0$, получаем $f(0) = 1$. Дифференцируя (43а) по $\tau = t^{1/2}$ и полагая затем $\tau = 0$, можно найти $[df(\tau)/d\tau]_{\tau=0}$, откуда получаем разложение в ряд Тейлора

$$f(t) = 1 - \frac{6}{11} \cdot \frac{6}{17} t^{3/2} + \dots \quad (t \ll 1). \quad (44)$$

Найдем асимптотику $f(t)$ при $t \gg 1$. В этом случае в (43а) существенными для интегрирования являются две области: $pt^{1/2} < 1$ и $(1-p)^{5/2} t^{3/2} < 1$. В первой из них $pt = \frac{1}{t^{1/2}} \ll 1$ и функцию $f(pt)$ можно считать равной единице, а $(1-p) \approx 1$. Тогда интеграл по области вблизи $p = 0$ даст $\text{const } t^{-1/2}$. В области же $(1-p)^{5/2} t^{3/2} < 1$, примыкающей к $p = 1$, функцию $f(pt)$ можно приближенно заменить на $f(t)$, p — на 1 и

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \int_0^1 \exp\{-t^{1/2} f(t) (1-p)^{5/2}\} dp = \int_0^1 \exp\{-t^{1/2} f(t) p^{5/2}\} dp \approx \\ &\approx \int_0^\infty \exp\{-t^{1/2} f(t) p^{5/2}\} dp = \frac{\Gamma\left(\frac{11}{5}\right)}{t^{1/2} [f(t)]^{5/2}}. \end{aligned}$$

Разрешая это уравнение относительно $f(t)$, получим

$$f(t) = \frac{\left[\Gamma\left(\frac{11}{5}\right)\right]^{2/11}}{t} = \frac{1,045}{t} \quad (t \gg 1). \quad (45)$$

Так как (45) убывает при $t \rightarrow \infty$ как t^{-1} , а интеграл по области $p \ll 1$ дает вклад $\text{const } t^{-1/2}$, то существенной оказывается только область $p \approx 1$ и асимптотика $f(t)$ имеет вид (45).

При промежуточных значениях t функция $f(t)$ может быть определена при помощи численных расчетов методом итераций уравнения (43а). График функции $f(t)$ приведен на рис. 46.

Решение уравнения (41) эквивалентно проведению бесконечного числа итераций по члену iw в исходном уравнении (10) (следует, конечно, иметь в виду, что при этом остаются все погрешности расчета, не связанные с приближенной аппроксимацией этого члена).

После того как определена функция $D_S(x, \rho)$, мы снова можем воспользоваться формулами (35) и (36) для определения $\langle \chi^2 \rangle$. Однако теперь мы будем подставлять в (35) найденную путем решения уравнения (41) функцию $D_S(x, \rho)$ вместо фигурировавшей ранее функции $D_{S_1}(x, \rho)$. Легко видеть, что это приведет к появлению в экспоненте формулы (37) дополнительного множителя $f(\xi/l)$.

После перехода к переменной интегрирования $p = \xi/x$ получим

$$\langle \chi^2(x) \rangle = \frac{11}{6} \sigma_1^2(x) \int_0^1 (1-p)^{1/6} \exp \left\{ -2,1 \beta^{1/3} \sigma_1^2(x) p (1-p)^{1/6} \left(p \frac{x}{l} \right) \right\} dp. \quad (46)$$

Снова вводя $t = x/l$, $2,1 \beta^{1/3} \sigma_1^2(x) = t^{1/6}$, получим

$$\langle \chi^2(x) \rangle = \frac{11}{6} \frac{t^{1/6}}{2,1 \beta^{1/3}} \int_0^1 (1-p)^{1/6} \exp \left\{ -t^{1/6} p (1-p)^{1/6} (pt) \right\} dp. \quad (46a)$$

Исследуем полученное выражение. При $\sigma_1^2(x) \ll 1$ из (46) следует, что $\langle \chi^2(x) \rangle \approx \sigma_1^2$. Рассмотрим теперь случай $\sigma_1^2(x) \gg 1$, или $t \gg 1$. В интеграле (46a) при этом становятся существенными

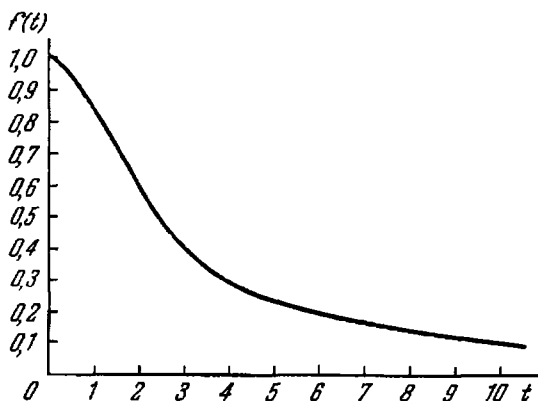


Рис. 46. Функция $f(t)$, представляющая собой решение уравнения (43a).

два участка интегрирования: $pt^{1/6} < 1$ и $(1-p)^{1/6} t^{1/6} < 1$. В первом из них $pt < \frac{1}{t^{5/6}} \ll 1$ и можно считать $f(pt) \approx 1$, $(1-p) \approx \approx 1$. Тогда интеграл по участку вблизи $p = 0$ приближенно равен

$$I_1 = \int_0^1 e^{-t^{1/6} p} dp \approx \int_0^{\infty} e^{-t^{1/6} p} dp = \frac{1}{t^{1/6}}.$$

Рассмотрим теперь второй участок интегрирования вблизи $p = 1$. Здесь можно считать $f(pt) \approx f(t)$, $p \approx 1$, так что

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^1 (1-p)^{5/2} \exp\{-t^{11/2} f(t) (1-p)^{5/2}\} dp = \\ &= \int_0^1 p^{5/2} \exp\{-t^{11/2} f(t) p^{5/2}\} dp \approx \\ &\approx \int_0^{\infty} p^{5/2} \exp\{-t^{11/2} f(t) p^{5/2}\} dp = \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{11}{5}\right) \\ &= \frac{6}{5} \Gamma\left(\frac{11}{5}\right) [t^{11/2} f(t)]^{-5/2}. \end{aligned}$$

Подставляя сюда асимптотическое выражение (45) для $f(t)$, получим

$$I_2 \approx \frac{6}{5} t^{-11/2}.$$

Таким образом, оба участка интегрирования вносят сравнимый вклад в интеграл (46) при $t \gg 1$. Подставляя вместо интегралов (46) $I_1 + I_2 \approx \frac{11}{5} t^{-11/2}$, получим асимптотику $\langle \chi^2(x) \rangle$ при $\sigma_1^2(x) \gg 1$:

$$\langle \chi^2(x) \rangle \approx \frac{121}{30 \cdot 2,1} \frac{1}{\beta^{5/2}} = \frac{1,92}{\beta^{5/2}} \equiv a^2. \quad (47)$$

Таким образом, при $\sigma_1^2 \rightarrow \infty$ величина $\langle \chi^2(x) \rangle$ стремится к постоянному пределу a^2 , зависящему лишь от β . Используя (47), исключим из (46) величину β . Тогда (46) можно записать так

$$\frac{\langle \chi^2(x) \rangle}{a^2} = \frac{5}{11} t^{11/2} \int_0^1 (1-p)^{5/2} \exp\{-t^{11/2} p (1-p)^{5/2} f(pt)\} dp, \quad (48)$$

причем t связано с $\langle \chi^2(x) \rangle / a^2$ соотношением

$$t^{11/2} = \frac{121}{30} \frac{\sigma_1^2(x)}{a^2}. \quad (49)$$

Из формул (48), (49) следует, что отношение $\langle \chi^2(x) \rangle / a^2$ является функцией величины $\sigma_1^2(x) / a^2$. На рис. 47 приведен график функции $\sqrt{\langle \chi^2(x) \rangle} / a$, полученный путем численного интегрирования выражения (48).

Исследуем также выражение (42) для структурной функции фазы. В области $x \ll l$, где $f(x/l) \approx 1$, имеем

$$D_S(x, \rho) \approx D_{S_1}(x, \rho) = 0,73 C_s^2 k^2 x \rho^{5/2} \quad (x \ll l). \quad (50)$$

В области же $x \gg l$, где можно использовать асимптотическую формулу (45), мы получаем

$$D_S(x, \rho) = 0,76C_\varepsilon^2 k^2 l \rho^{1/2} \quad (x \gg l), \quad (51)$$

т. е. структурная функция фазы, так же как и средний квадрат логарифма амплитуды, перестает возрастать с расстоянием. Однако

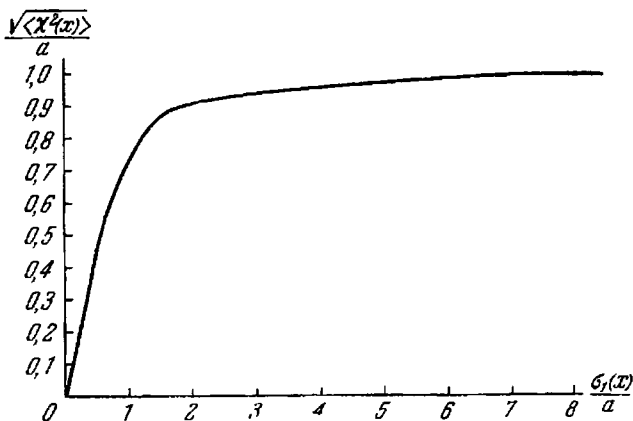


Рис. 47. Зависимость среднего квадрата логарифма амплитуды от среднеквадратичного значения флуктуаций логарифма амплитуды, вычисленного в первом приближении метода плавных возмущений.

в отличие от $\langle \chi^2(x) \rangle$ уровень насыщения не является универсальным, а зависит от C_ε^2 , так как l зависит только от этой величины как $l \sim (C_\varepsilon^2)^{-1/11}$.

Средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды выражается через величины $\langle \chi^2 \rangle$ и $\langle \chi \rangle$ согласно формуле

$$\sigma^2 \equiv \langle [\ln A - \langle \ln A \rangle]^2 \rangle = \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2.$$

Первая из этих величин была определена выше. Перейдем к нахождению $\langle \chi \rangle$. Это можно сделать несколькими способами. Можно усреднить выражение (23) и учесть корреляцию между ε_1 и $S(r)$. Более удобный путь — воспользоваться уравнением (5). Усредняя это уравнение и учитывая, что для плоской падающей волны все усредненные величины могут зависеть только от x , можно получить уравнение, связывающее $\langle \chi \rangle$ с величиной $\langle \nabla \chi \nabla S \rangle$, которую можно рассчитать аналогично $\langle \chi^2 \rangle$. При этом опять можно воспользоваться предположениями о независимости ε_1 и $S(r)$, а также о гауссовском распределении $S(r)$.

Однако наиболее простой путь нахождения величины $\langle \chi \rangle$ — использование закона сохранения энергии. Плотность потока энергии выражается через χ при помощи формулы

$$P = \text{const } A^2 n = \text{const } e^{2\chi(r)} n(r),$$

где n — единичный вектор, указывающий направление распространения волны. Очевидно, что для плоской падающей волны средняя плотность потока энергии не зависит от x . Это приводит к соотношению

$$\langle e^{2\chi(r)} n(r) \rangle = \text{const.}$$

Если, как это обычно имеет место в реальной турбулентной атмосфере, флуктуации направления распространения малы, в последнем соотношении можно заменить вектор n его невозмущенным значением n_0 . В этом случае должно выполняться равенство

$$\langle e^{2\chi(r)} \rangle = \text{const.} \quad (52)$$

Для того чтобы в явном виде выполнить усреднение в этой формуле, необходимо знать закон распределения вероятностей для величины $\chi(r)$. Обратимся к выражению (21) для φ . Это выражение получено как первое приближение по члену iw уравнения (10). После выполнения итераций (что свелось в нашем случае к решению интегрального уравнения (41)) в выражении (21) следует заменить первое приближение для фазы на S :

$$\varphi(r) = \frac{k^2}{4\pi} \int \frac{e^{ik|r-r'| - ik(r-r')}}{|r-r'|} \varepsilon_1(r') e^{\frac{i}{2}[S(r') - S(r)]} d^3r'. \quad (53)$$

Из этой формулы следует, что величина $\varphi(r)$ является линейным функционалом от случайной величины

$$\varepsilon_1(r') \exp \left\{ \frac{i}{2} [S(r') - S(r)] \right\}. \quad (54)$$

Хотя функция $S(r)$ и является сильно коррелированной в продольном направлении (направлении распространения волны), она значительно слабее коррелирована в поперечном направлении. Что касается функции $\varepsilon_1(r)$, то она имеет конечный радиус корреляции L_0 . Поэтому произведение (54) также имеет характерный масштаб корреляции порядка L_0 . Если выполняется соотношение $x \gg L_0$, то интеграл (53) можно разбить на сумму большого числа некоррелированных слагаемых — интегралов по областям с размерами порядка L_0 . Отсюда следует, что величина φ , а значит, и величины χ и S имеют гауссовское распределение ве-

роятностей. Ранее такой же вывод был получен для флуктуаций логарифма амплитуды и фазы в первом приближении метода плавных возмущений. Тот факт, что аналогичный вывод получен для нелинейного уравнения (5), решение которого уже не является линейным функционалом от ε_1 (поскольку S в (54) зависит от ε_1), трудно было предполагать заранее. Он связан с тем, что решение нелинейного уравнения (5) оказалось возможным приближенно представить в виде линейного функционала от случайной величины (54). Экспериментальные данные, приведенные в гл. 4 по распределениям вероятностей флуктуаций логарифма амплитуды в области сильных флуктуаций, хорошо подтверждают вывод о гауссовском распределении для логарифма амплитуды.

Произведем усреднение выражения (52). Подставляя $\chi = \langle \chi \rangle + \chi'$, получим

$$\langle e^{2\chi} \rangle = e^{2\langle \chi \rangle} \langle e^{2\chi'} \rangle = e^{2\langle \chi \rangle + 2\langle \chi'^2 \rangle},$$

где мы воспользовались формулой $\langle e^{\xi} \rangle = e^{\langle \xi^2 \rangle / 2}$, справедливой для гауссовской случайной величины со средним значением, равным нулю. Подставляя сюда $\langle \chi'^2 \rangle = \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2$ на основании (52), получаем

$$e^{2[\langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2 + \langle \chi \rangle]} = \text{const.}$$

Но при $x=0$ $\text{const} = 1$, так как $\langle \chi^2 \rangle = \langle \chi \rangle = 0$ при $x=0$. Отсюда следует, что при всех x выполняется соотношение

$$\langle \chi^2(x) \rangle - \langle \chi(x) \rangle^2 + \langle \chi(x) \rangle = 0. \quad (55)$$

Разрешая это уравнение относительно $\langle \chi \rangle$, получим

$$\langle \chi \rangle = \frac{1}{2} [1 - \sqrt{4\langle \chi^2 \rangle + 1}] \quad (56)$$

и для величины $\sigma^2 = \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2$ на основании (55) и (56) будем иметь

$$\sigma^2(x) = -\langle \chi \rangle = \frac{1}{2} [\sqrt{4\langle \chi^2(x) \rangle + 1} - 1]. \quad (57)$$

Функция $\sigma^2(x)$ может быть определена отсюда лишь с точностью до неизвестного параметра a^2 , который не может быть определен при использованном выше грубом методе расчета. При $\sigma_1^2 \rightarrow \infty$ величина σ^2 стремится к постоянному пределу

$$\sigma_\infty^2 = \sqrt{a^2 + \frac{1}{4}} - \frac{1}{2}.$$

Это предельное значение может быть оценено из экспериментальных данных (см. гл. 4) приблизительно как $\sigma_\infty = 0,8$. Соответ-

вующее значение параметра a приблизительно равно единице, а значение параметра β , необходимое для объяснения наблюдаемого уровня насыщения, оказывается равным 1,4, что представляется вполне разумным. Ниже, в гл. 4, производится сопоставление функции (57) с экспериментальными данными.

Использованный в настоящем параграфе метод вычисления $\langle \chi^2 \rangle$, как легко можно было заметить, является довольно грубым и, по-видимому, может претендовать скорее на качественное, чем на количественное объяснение сильных флуктуаций. Возможно, что более точное вычисление интеграла (27) могло бы дать лучшие результаты.

Отметим также, что в разделе Б гл. 5 расчет сильных флуктуаций амплитуды производится на основании уравнений геометрической оптики.

ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ О РАСПРОСТРАНЕНИИ СВЕТА, РАДИОВОЛН И ЗВУКА В ТУРБУЛЕНТНОЙ АТМОСФЕРЕ И ИХ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ

В настоящей главе будут рассмотрены некоторые приложения развитой в предыдущей главе теории к конкретным задачам, возникающим при распространении света, радиоволн и звука в турбулентной атмосфере (раздел А), и проведено сопоставление теоретических расчетов с экспериментальными данными (раздел Б).

А. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ К ЗАДАЧАМ АТМОСФЕРНОЙ ОПТИКИ, АКУСТИКИ И РАДИОМЕТЕОРОЛОГИИ

При экспериментальном изучении влияния атмосферной турбулентности на распространение электромагнитных и звуковых волн значительно проще поддаются измерению не пространственные, а временные характеристики принятого сигнала. В связи с этим мы рассмотрим задачу о частотном спектре флуктуаций амплитуды и фазы принятого сигнала. Далее будет рассмотрено влияние усредняющего действия апертуры приемного устройства на флуктуации амплитуды и фазы. Так как это влияние в ряде случаев оказывается весьма существенным, без его учета невозможно интерпретировать экспериментальные данные.

§ 52. Частотные спектры флуктуаций амплитуды и фазы волны

В разделе Б гл. 3 были получены выражения для пространственных корреляционных и структурных функций амплитуды и фазы волны. Исходя из этих выражений, можно построить и временные корреляционные функции.

В первом приближении для перехода от пространственного к временному описанию можно воспользоваться предположением о переносе как целого всей совокупности неоднородностей без учета флуктуаций скорости переноса и эволюции неоднородностей в процессе их движения (гипотеза замороженности). Затем можно учесть флуктуации скорости переноса и оценить влияние эволюции.

Прежде всего, необходимо отметить, что основную роль играет движение неоднородностей поперек направления распространения волны. Действительно, амплитуда волны в точке наблюдения определяется интегралом по вытянутой вдоль луча параболической области с поперечным размером порядка $\sqrt{\lambda L}$ и с продольным размером $L \gg \sqrt{\lambda L}$. Разложим скорость перемещения неоднородностей v на две компоненты v_{\parallel} и v_{\perp} вдоль и поперек направления распространения волны.

За время τ продольное и поперечное смещения неоднородностей составят соответственно $v_{\parallel}\tau$ и $v_{\perp}\tau$. При этом, если $v_{\perp}\tau \sim \sqrt{\lambda L}$, то амплитуда в точке наблюдения существенно изменится, так как произойдет смена всех неоднородностей, влияющих на амплитуду поля. В то же время продольное смещение будет иметь порядок

$$v_{\parallel} \frac{\sqrt{\lambda L}}{v_{\perp}} \ll L$$

и за его счет произойдет лишь незначительное изменение неоднородностей на концах трассы, несущественное в силу того, что общий эффект носит интегральный характер. Поэтому при выполнении условия

$$\frac{v_{\parallel}}{v_{\perp}} \ll \sqrt{\frac{L}{\lambda}}$$

можно учитывать лишь поперечное движение неоднородностей. Более существенное ограничение на отношение v_{\parallel}/v_{\perp} накладывают флуктуации направления скорости v .

Направление вектора v обычно испытывает флуктуации порядка 0,1. Поэтому, если $v_{\perp} \sim 0,1v_{\parallel}$, то в поперечном движении неоднородностей появляется случайная компонента, сравнимая со средним значением v_{\perp} . В этом случае необходимо учесть и флуктуационную составляющую v_{\perp} .

Рассмотрим сначала случай, когда неоднородности движутся с постоянной скоростью v_{\perp} поперек трассы. В этом случае значения $\chi(r, t)$ и $\chi(r, t + \tau)$ связаны очевидным соотношением

$$\chi(r, t + \tau) = \chi(r - v_{\perp}\tau, t). \quad (1)$$

Введем временную корреляционную функцию

$$R_x(\tau) = \langle \chi(r, t + \tau) \chi(r, t) \rangle. \quad (2)$$

Подставляя (1), получим соотношение

$$R_x(\tau) = B_x(v_{\perp}\tau), \quad (3)$$

где $B_x(\rho)$ — пространственная корреляционная функция, найденная в предыдущей главе.

Перейдем теперь к частотному спектру флуктуаций $w_x(f)$. Функции $w_x(f)$ и $R_x(\tau)$ связаны соотношением

$$R_x(\tau) = \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) w_x(f) df \quad (4)$$

(мы пользуемся разложением по положительным частотам $f = \frac{\omega}{2\pi}$ для облегчения непосредственного сравнения результатов расчета с экспериментами). Учитывая четность функций $R_x(\tau)$ и $w_x(f)$, запишем обращение преобразования (4):

$$w_x(f) = 4 \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) R_x(\tau) d\tau = 4 \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) B_x(v_{\perp}\tau) d\tau. \quad (5)$$

Для вычисления $w_x(f)$ удобнее выразить $B_x(v_{\perp}\tau)$ через спектральное разложение

$$R_x(\tau) = B_x(v_{\perp}\tau) = 2\pi \int_0^{\infty} F_x(\kappa, L) J_0(\kappa v_{\perp}\tau) \kappa d\kappa. \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5), меняя порядок интегрирования и учитывая, что

$$\int_0^{\infty} J_0(\kappa v_{\perp}\tau) \cos 2\pi f\tau d\tau = \begin{cases} (\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2)^{-1/2} & \text{при } \kappa^2 v_{\perp}^2 > 4\pi^2 f^2 \\ 0 & \text{при } \kappa^2 v_{\perp}^2 < 4\pi^2 f^2, \end{cases}$$

получим формулу

$$\begin{aligned} w_x(f) &= 8\pi \int_{\frac{2\pi f}{v_{\perp}}}^{\infty} F_x(\kappa, L) \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2}} = \\ &= \frac{8\pi}{v_{\perp}} \int_0^{\infty} F_x\left(\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}, L\right) d\kappa. \end{aligned} \quad (7)$$

(Последняя формула получена путем замены переменной $\sqrt{\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2} = \kappa' v_{\perp}$). Формула (7) связывает частотный спектр флуктуаций χ с его двумерным пространственным спектром F_x . Воспользуемся теперь формулой (36а, 46)

$$F_x(\kappa, L) = \frac{\pi k^2 L}{4} \left[1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right] \Phi_{\epsilon}(\kappa), \quad (8)$$

в которую подставим

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = AC_m^2 \kappa^{-11/3} \exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right), \quad A = 0,033.$$

В результате получаем

$$w_x(f) = \frac{2\pi^3 Ak^2 LC_m^2}{v_\perp} \int_0^\infty \left[1 - \frac{\sin \frac{L}{k} \left(\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_\perp^2} \right)}{\frac{L}{k} \left(\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_\perp^2} \right)} \right] \times \\ \times \left(\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_\perp^2} \right)^{-11/6} \exp\left(-\frac{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_\perp^2}}{\kappa_m^2}\right) d\kappa. \quad (9)$$

Введем величину f_0 согласно равенству

$$f_0^2 = \frac{kv_\perp^2}{4\pi^2 L} = \frac{v_\perp^2}{2\pi\lambda L}, \quad f_0 = \frac{v_\perp}{\sqrt{2\pi\lambda L}},$$

а также новую переменную интегрирования $z = \frac{\kappa^2 L}{k}$. Безразмерную величину

$$\sqrt{\frac{4\pi^2 L f^2}{kv_\perp^2}} = \frac{f}{f_0}$$

обозначим через Ω . В результате (9) примет вид

$$w_x(f) = \frac{\pi}{2} AC_m^2 k^{7/6} L^{11/6} \frac{1}{f_0} \int_0^\infty \left[1 - \frac{\sin(z + \Omega^2)}{z + \Omega^2} \right] \times \\ \times (z + \Omega^2)^{-11/6} \exp\left(-\frac{z + \Omega^2}{D}\right) z^{-1/2} dz, \quad (10)$$

где $D = \frac{\kappa_m^2 L}{k}$ — волновой параметр. Коэффициент $AC_m^2 k^{7/6} L^{11/6}$ в (10) пропорционален среднему квадрату флуктуаций $\langle \chi^2(L) \rangle$. Рассмотрим случай больших $D \gg 1$. Тогда в (10) можно опустить множитель $\exp\left(-\frac{z + \Omega^2}{D}\right)$, и после подстановки $z = \Omega^2 x$ мы получим

$$w_x(f) = \frac{\pi}{2} AC_m^2 k^{7/6} L^{11/6} \frac{\Omega^{-8/3}}{f_0} \times \\ \times \int_0^\infty \left[1 - \frac{\sin \Omega^2(x+1)}{\Omega^2(x+1)} \right] (x+1)^{-11/6} x^{-1/2} dx. \quad (11)$$

Замечая, что согласно определению В-функции Эйлера

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{1/2-1}}{(1+x)^{1/2+4/3}} dx = B\left(\frac{1}{2}, \frac{4}{3}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} = N = 1,69,$$

получим

$$w_x(f) = \frac{\pi}{2} AC_s^2 k^{7/6} L^{11/6} \frac{\Omega^{-3/3}}{f_0} \times \left[N - \frac{1}{\Omega^2} \int_0^{\infty} \sin[\Omega^2(x+1)] (x+1)^{-17/6} x^{-1/2} dx \right]. \quad (12)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} f(\Omega) &= \int_0^{\infty} \sin[\Omega^2(x+1)] (x+1)^{-17/6} x^{-1/2} dx = \\ &= \text{Im} \int_0^{\infty} e^{i\Omega^2(x+1)} (x+1)^{-17/6} x^{-1/2} dx. \end{aligned} \quad (13)$$

Имеет место формула (см., например, [117])

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-zx} x^{\alpha-1} (1+x)^{\gamma-\alpha-1} dx &= \Gamma(\alpha) \left[\frac{\Gamma(1-\gamma) {}_1F_1(\alpha, \gamma, z)}{\Gamma(\alpha-\gamma+1)} + \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma(\gamma-1)}{\Gamma(\alpha)} z^{1-\gamma} {}_1F_1(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma, z) \right], \quad (\text{Re } \alpha > 0). \end{aligned} \quad (14)$$

Полагая $z = -i\Omega^2$, $\alpha = \frac{1}{2}$, $\gamma = -\frac{4}{3}$, получим

$$\begin{aligned} f(\Omega) &= \text{Im} e^{i\Omega^2} \sqrt{\pi} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -i\Omega^2\right) + \right. \\ &\left. + \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} (-i\Omega^2)^{7/3} {}_1F_1\left(\frac{17}{6}, \frac{10}{3}, -i\Omega^2\right) \right]. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} w_x(f) &= \frac{\pi}{2} AC_s^2 k^{7/6} L^{11/6} \frac{\Omega^{-3/3}}{f_0} \left\{ N - \text{Im} \cdot \frac{\sqrt{\pi} e^{i\Omega^2}}{\Omega^2} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} \times \right. \right. \\ &\left. \left. \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -i\Omega^2\right) + (-i\Omega^2)^{7/3} \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{17}{6}, \frac{10}{3}, -i\Omega^2\right) \right] \right\}. \end{aligned} \quad (15)$$

В области малых частот $\Omega \ll 1$, воспользовавшись первыми четырьмя членами разложения ${}_1F_1(1/2, -4/3, -i\Omega^2)$ и первым членом разложения ${}_1F_1(17/6, 10/3, -i\Omega^2) \approx 1$, получим формулу

$$w_x(f) = \frac{\pi}{2} A C_e^2 k^{7/6} L^{11/6} \frac{\Omega^{-8/3}}{f_0} \left[\frac{5}{48} N \Omega^4 - \frac{1}{2} \Gamma\left(-\frac{7}{3}\right) \Omega^{2/3} + \dots \right] = \\ = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{2} \frac{27}{56} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) A C_e^2 k^{7/6} L^{11/6} \frac{1}{f_0} \left[1 + \frac{5 \cdot 56}{24 \cdot 27 \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)} \Omega^{4/3} + \dots \right]. \quad (16)$$

Подставляя численные коэффициенты и заменяя

$$0,077 C_e^2 k^{7/6} L^{11/6} = \langle \chi^2 \rangle,$$

получим

$$w_x(f) \approx 0,15 \langle \chi^2 \rangle \frac{1}{f_0} [1 + 0,48 \Omega^{4/3} + \dots], \quad (\Omega \ll 1). \quad (16a)$$

В области $\Omega \gg 1$ воспользуемся уже неоднократно применявшимся асимптотическим разложением функции.

$${}_1F_1(\alpha, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma - \alpha)} (-z)^{-\alpha} G(\alpha, \alpha - \gamma + 1, -z) + \\ + \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\alpha)} e^{z\alpha} z^{-\alpha} G(\gamma - \alpha, 1 - \alpha, z), \quad (17)$$

где

$$G(\alpha, \beta, z) = 1 + \frac{\alpha \cdot \beta}{1! z} + \frac{\alpha(\alpha + 1) \beta(\beta + 1)}{2! z^2} + \dots$$

В нашем случае для обеих гипергеометрических функций в (15) основную роль играет второе слагаемое асимптотической формулы, однако эти главные члены асимптотических разложений, пропорциональные $\Omega^{u/6}$, после подстановки в (15) взаимно уничтожаются. Поэтому для вычисления асимптотики (15) при $\Omega \gg 1$ следует взять первые слагаемые в асимптотической формуле (17) и квадратная скобка в (15) оказывается пропорциональной Ω^{-1} . Поэтому $w_x(f)$ при $\Omega \gg 1$ имеет следующий вид:

$$w_x(f) = \frac{\pi}{2} N A C_e^2 k^{7/6} L^{11/6} \frac{\Omega^{-8/3}}{f_0} = 1,14 \langle \chi^2 \rangle \frac{\Omega^{-8/3}}{f_0}. \quad (18)$$

Таким образом, функция $w_x(f)$, равная $w_x(0) = 0,15 \frac{\langle \chi^2 \rangle}{f_0}$ при $f = 0$, слабо возрастает с ростом f , имеет максимум вблизи $f \sim f_0$, а затем убывает как $f^{-3/2}$. Безразмерная величина

$F(\Omega) = \frac{f_0 w_x(f)}{\langle \chi^2 \rangle}$ зависит от безразмерного параметра $\Omega = \frac{f}{f_0}$. Функция $F(\Omega)$, построенная по формуле (15), изображена на рис. 48.

Расчитанная таким образом функция $w_x(f)$ соответствует движению неоднородностей с постоянной скоростью. В действительности, как уже указывалось выше, скорость v_{\perp} испытывает флуктуации, причем различные на разных участках трассы. Это приводит к тому, что картина распределения амплитуды в плоскости $x = L$ движется не как единое целое и не с постоянной скоростью. При наблюдении же в фиксированной точке этот эффект проявляется в виде флуктуаций скорости движения (взятой в данной точке) дифракционной картины. Так как скорость движения дифракционной картины обусловлена суммарным действием всех неоднородностей вдоль трассы, можно считать, что флуктуации скорости переноса распределены по закону Гаусса.

Оценим величину этих флуктуаций. Средний квадрат флуктуаций v_{\perp} , который мы обозначим через σ_{\perp}^2 , в случае равенства средних квадратов флуктуаций всех трех компонент скорости ветра равен $\sigma_{\perp}^2 = \frac{2}{3} \sigma^2$, где σ^2 — средний квадрат флуктуаций модуля скорости ветра. С другой стороны, среднее значение v_{\perp} равно $\langle v \rangle \sin \alpha$, где α — угол между скоростью ветра и направлением распространения волны. Поэтому отношение

$$\frac{\sigma_{\perp}}{\langle v_{\perp} \rangle} = \frac{0,8\sigma}{\langle v \rangle \sin \alpha}$$

в значительной степени зависит от угла α . Обычно $\frac{\sigma}{\langle v \rangle} \sim 0,1$,

поэтому для $\alpha = \frac{\pi}{2}$ отношение $\frac{\sigma_{\perp}}{\langle v_{\perp} \rangle} \sim 8-10\%$, но это отношение может сильно возрастать при уменьшении угла α .

Выражение для частотного спектра $w_x(f)$, усредненное по флуктуациям v_{\perp} , можно получить из (15), умножая это выражение на плотность вероятностей для v_{\perp} и интегрируя. При произвольном соотношении между $\langle v_{\perp} \rangle$ и σ этот расчет в аналитической форме выполнить трудно. Однако можно получить сравнительно

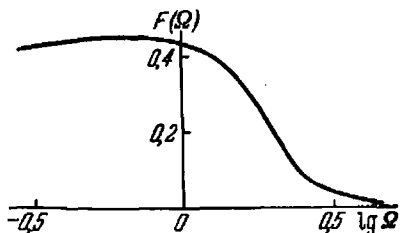


Рис. 48. Частотный спектр флуктуаций логарифма амплитуды при постоянной скорости движения неоднородностей.

простые выражения для случая, когда $\langle v_{\perp} \rangle = 0$, т. е. для случая $\alpha = 0$. Здесь удобно исходить из формулы (6). Умножим ее на

$\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma}}$ и проинтегрируем по v_{\perp} . Учитывая формулу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{v_{\perp}^2}{2\sigma}} J_0(\kappa v_{\perp}) dv_{\perp} = e^{-\frac{\sigma^2 \kappa^2}{4}} I_0\left(\frac{\sigma^2 \kappa^2}{4}\right),$$

где I_0 — функция Бесселя от мнимого аргумента, получим

$$\langle R_{\chi}(\tau) \rangle = 2\pi \int_0^{\infty} F_{\chi}(\kappa, L) e^{-\frac{\sigma^2 \tau^2 \kappa^2}{4}} I_0\left(\frac{\sigma^2 \tau^2 \kappa^2}{4}\right) \kappa d\kappa. \quad (19)$$

Подставляя (19) в (5), получим

$$\langle w_{\chi}(f) \rangle = 8\pi \int_0^{\infty} F_{\chi}(\kappa, L) \kappa d\kappa \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) e^{-\frac{\sigma^2 \tau^2 \kappa^2}{4}} I_0\left(\frac{\kappa^2 \sigma^2 \tau^2}{4}\right) d\tau. \quad (20)$$

Учитывая, что

$$\int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) e^{-\frac{\sigma^2 \tau^2 \kappa^2}{4}} I_0\left(\frac{\sigma^2 \kappa^2 \tau^2}{4}\right) d\tau = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma\kappa}} e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\sigma^2 \kappa^2}} K_0\left(\frac{\pi^2 f^2}{\sigma^2 \kappa^2}\right)$$

(см., например, [117]), где K_0 — функция Макдональда, получим

$$\langle w_{\chi}(f) \rangle = \frac{8\pi}{\sqrt{2\pi\sigma}} \int_0^{\infty} F_{\chi}(\kappa, L) e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\sigma^2 \kappa^2}} K_0\left(\frac{\pi^2 f^2}{\sigma^2 \kappa^2}\right) d\kappa. \quad (21)$$

Подставим в (21) выражение (8) для $F_{\chi}(\kappa, L)$, причем, как и выше, пренебрежем множителем $\exp(-\kappa^2/\chi_m^2)$ (что законно при $\frac{\kappa_m^2 L}{k} \gg 1$). В результате получим

$$\langle w_{\chi}(f) \rangle = \frac{\pi \sqrt{2\pi} A C_{\chi}^2 k^2 L}{\sigma} \times \\ \times \int_0^{\infty} \exp\left(-\frac{\pi^2 f^2}{\sigma^2 \kappa^2}\right) K_0\left(\frac{\pi^2 f^2}{\sigma^2 \kappa^2}\right) \kappa^{-11/3} \left[1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k}\right] d\kappa. \quad (22)$$

Введем характерную частоту

$$f_1 = \frac{\sigma}{\pi} \left(\frac{k}{L} \right)^{1/2},$$

пропорциональную отношению характерной скорости к радиусу зоны Френеля, и безразмерное отношение

$$\Omega_1 = \frac{\pi f}{\sigma} \sqrt{\frac{L}{k}} = \frac{f}{f_1}.$$

Тогда, совершая в интеграле (22) подстановку $\frac{\pi f}{\sigma k} = x$, получим формулу

$$\begin{aligned} \langle w_x(f) \rangle &= \\ &= \frac{\pi \sqrt{2\pi} A k^3 L C_\epsilon^2}{\sigma} \left(\frac{\pi f}{\sigma} \right)^{-8/3} \int_0^\infty \left[1 - \frac{x^2}{\Omega_1^2} \sin \frac{\Omega_1^2}{x^2} \right] e^{-x^2} K_0(x^2) x^{5/3} dx. \end{aligned} \quad (23)$$

В случае $\Omega_1 \gg 1$, т. е. в области $f \gg f_1$, вторым слагаемым в квадратных скобках под знаком интеграла можно пренебречь. Остающийся интеграл вычисляется [117], и мы получаем формулу

$$\begin{aligned} \langle w_x(f) \rangle &= \\ &= \frac{\pi \sqrt{2\pi} A k^3 L C_\epsilon^2}{\sigma} \left(\frac{\pi f}{\sigma} \right)^{-8/3} \frac{\sqrt{\pi}}{2^{1/3}} \frac{\left[\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \right]^2}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)} = 0,32 \frac{\langle \chi^2 \rangle}{f_1} (\Omega_1)^{-3/3}. \end{aligned} \quad (24)$$

Таким образом, и в этом случае высокочастотная часть спектра зависит от частоты как f^{-1} . Сравнивая эту формулу с (18), мы убеждаемся, что в случае отсутствия систематической скорости численный коэффициент в (24) меньше, чем в (18). Поскольку в обоих случаях

$$\int_0^\infty \langle w_x(f) \rangle df = \int_0^\infty w_x(f) df = \langle \chi^2 \rangle,$$

то уменьшение функции $\langle w_x(f) \rangle$ при $f \gg f_1$ должно компенсироваться ее увеличением в области $f \ll f_1$ по сравнению с (16). Действительно, из формулы (22) следует, что $\langle w_x(f) \rangle \sim \ln(f_1/f)$ при $f \ll f_1$ (так как $K_0(z) \approx \ln 1/z$ при $|z| \ll 1$). Таким образом, в этом случае $w_x(0) = \infty$. Этот факт соответствует тому, что при отсутствии систематической скорости движения наибольшую вероятность имеют нулевые скорости. В общем случае, когда отношение $\langle v_\perp \rangle / \sigma$ произвольно, расчет $\langle w_x(f) \rangle$ становится слишком

громоздким. Однако качественная картина ясна и в этом случае. При $\sigma \ll \langle v_{\perp} \rangle$ происходит лишь незначительное «размазывание» спектра, даваемого формулой (15). При $\sigma \sim \langle v_{\perp} \rangle$ максимум спектра начинает смещаться к нулю, и при $\sigma \gg \langle v_{\perp} \rangle$ этот максимум начинает сильно возрастать.

Оценим теперь, в каких случаях можно пренебречь неравномерностью движения дифракционной картины. Амплитудные флуктуации вызваны в основном неоднородностями среды с масштабами порядка $l = \sqrt{\lambda L}$, перемещающимися со скоростью $\langle v_{\perp} \rangle$. Наряду с перемещениями, вызываемыми средним ветром, имеются также собственные хаотические скорости движения этих неоднородностей, имеющие порядок $v_l \sim (\varepsilon l)^{1/2}$, где ε — скорость диссипации энергии турбулентности. Время, в течение которого эти скорости постоянны (время их «жизни»), зависит лишь от ε и l и имеет порядок $\tau \sim \varepsilon^{-1/2} l^{1/2}$. [13]. Время же, в течение которого неоднородность, двигаясь со скоростью $\langle v_{\perp} \rangle$, проходит расстояние $l = \sqrt{\lambda L}$, имеет порядок $T \sim l / \langle v_{\perp} \rangle$. Ясно, что изменениями скорости переноса за счет эволюции можно пренебречь в том случае, если $\tau \gg T$, т. е. $\varepsilon^{-1/2} l^{1/2} \gg l / \langle v_{\perp} \rangle$.

Это приводит к соотношению $\langle v_{\perp} \rangle \gg (\varepsilon l)^{1/2}$, т. е. малости разности скоростей на расстоянии l по сравнению со средней скоростью переноса. В случае же, если $\langle v_{\perp} \rangle = 0$, вместо $\langle v_{\perp} \rangle$ в последнее условие следует подставить величину σ_{\perp} — характерную скорость, с которой неоднородности размеров l переносятся крупными вихрями с размерами порядка внешнего масштаба турбулентности L_0 . Величина σ_{\perp} имеет порядок $\sigma_{\perp} \sim (\varepsilon L_0)^{1/2}$.

Таким образом, изменениями скорости переноса во времени можно пренебречь при условии

$$L_0 \gg \sqrt{\lambda L}. \quad (25)$$

Перейдем теперь к вычислению спектров флуктуаций фазы. Вначале проведем расчет на основании гипотезы «замороженной турбулентности», когда имеет место соотношение, аналогичное (1):

$$S_1(\mathbf{r}, t + \tau) = S_{\perp}(\mathbf{r} - \mathbf{v}_{\perp} \tau, t). \quad (26)$$

Рассмотрим временную структурную функцию фазы:

$$\begin{aligned} H_S(\tau) &= \langle [S_1(\mathbf{r}, t + \tau) - S_1(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle = \\ &= \langle [S_1(\mathbf{r} - \mathbf{v}_{\perp} \tau, t) - S_1(\mathbf{r}, t)]^2 \rangle = D_S(\mathbf{v}_{\perp} \tau). \end{aligned} \quad (27)$$

Представим $H_S(\tau)$ в виде интеграла Фурье

$$H_S(\tau) = 2 \int_0^{\infty} [1 - \cos 2\pi f \tau] w_S(f) df, \quad (28)$$

а функцию $D_S(v_{\perp}\tau) = D_S(v_{\perp}\tau)$ — в виде

$$D_S(v_{\perp}\tau) = 4\pi \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa v_{\perp}\tau)] F_S(\kappa, L) \kappa d\kappa.$$

Подставим эти разложения в (27) и продифференцируем получающееся равенство по τ :

$$4\pi \int_0^{\infty} \sin(2\pi f'\tau) f' w_S(f') df' = 4\pi v_{\perp} \int_0^{\infty} J_1(\kappa v_{\perp}\tau) F_S(\kappa, L) \kappa^2 d\kappa. \quad (29)$$

Умножим (29) на $e^{2\pi i f \tau}$, где $f > 0$, и проинтегрируем по τ в пределах $(-\infty, +\infty)$. Учитывая, что

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi f'\tau) e^{2\pi i f \tau} d\tau &= \frac{\pi}{i} [\delta(2\pi f + 2\pi f') - \delta(2\pi f - 2\pi f')] = \\ &= \frac{1}{2i} [\delta(f + f') - \delta(f - f')], \end{aligned}$$

получим слева

$$\frac{2\pi}{i} \int_0^{\infty} [\delta(f + f') - \delta(f - f')] f' w_S(f') df' = -\frac{2\pi}{i} f w_S(f), \quad (30)$$

где мы учли, что $\delta(f + f') = 0$ при $f > 0$ и $0 < f' < \infty$.

Для правой части равенства (29) получим

$$4\pi v_{\perp} \int_0^{\infty} F_S(\kappa, L) \kappa^2 d\kappa \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f \tau} J_1(\kappa v_{\perp}\tau) d\tau. \quad (31)$$

Рассмотрим

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} e^{2\pi i f \tau} J_1(\kappa v_{\perp}\tau) d\tau &= i \int_{-\infty}^{\infty} \sin(2\pi f\tau) J_1(\kappa v_{\perp}\tau) d\tau = \\ &= 2i \int_0^{\infty} \sin(2\pi f\tau) J_1(\kappa v_{\perp}\tau) d\tau = \begin{cases} 2i \frac{2\pi f}{\kappa v_{\perp} \sqrt{\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2}} & (2\pi f < \kappa v_{\perp}), \\ 0 & (2\pi f > \kappa v_{\perp}) \end{cases} \end{aligned}$$

(см., например, [117]). Следовательно, (31) принимает вид

$$16\pi^2 i f \int_{\frac{2\pi f}{v_{\perp}}}^{\infty} \frac{F_S(\kappa, L) \kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2}}. \quad (32)$$

Приравнявая выражения (30) и (32), получим

$$w_S(f) = 8\pi \int_{\frac{2\pi f}{v_{\perp}}}^{\infty} \frac{F_S(\kappa, L) \kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2}} = \frac{8\pi}{v_{\perp}} \int_0^{\infty} F_S\left(\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}, L\right) d\kappa. \quad (33)$$

Формула (33) по своему виду совпадает с формулой (7) для спектральной плотности амплитудных флуктуаций. Подставляя в (33)

$$F_S(\kappa, L) = \frac{\pi k^2 L}{4} \left(1 + \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k}\right) \Phi_e(\kappa),$$

мы убеждаемся в том, что формула для $w_S(f)$ будет отличаться от формулы (15) для $w_{\chi}(f)$ лишь знаком перед вторым членом в фигурных скобках:

$$w_S(f) = \frac{\pi}{2} A C_e^2 k^{7/6} L^{11/6} \frac{\Omega^{-8/3}}{f_0} \left\{ N + \operatorname{Im} \frac{\sqrt{\pi} e^{i\Omega^2}}{\Omega^2} \left[\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} \times \right. \right. \\ \left. \left. \times {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -i\Omega^2\right) + (-i\Omega^2)^{7/3} \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} {}_1F_1\left(\frac{17}{6}, \frac{10}{3}, -i\Omega^2\right) \right] \right\}. \quad (34)$$

Найдем асимптотику $w_S(f)$ при малых и больших Ω . В области малых $\Omega \ll 1$, как мы убедились при анализе формулы для $w_{\chi}(f)$, второй член в фигурных скобках равен $N + O(\Omega^{7/2})$ (поэтому в формуле для $w_{\chi}(f)$, отличающейся от (34) знаком, величина N при $\Omega \ll 1$ сокращается). Поэтому при $\Omega \ll 1$

$$w_S(f) = N \pi A C_e^2 k^{7/6} L^{11/6} \frac{\Omega^{-8/3}}{f_0} = 8,2 \cdot 10^{-3} C_e^2 k^2 L v_{\perp}^{5/3} f^{-8/3}. \quad (35)$$

В области $\Omega \gg 1$ вторым членом в фигурных скобках в (34) можно пренебречь и в этом случае

$$w_S(f) = 4,1 \cdot 10^{-3} C_e^2 k^2 L v_{\perp}^{5/3} f^{-8/3}. \quad (36)$$

Мы видим, что эти асимптотические разложения отличаются друг от друга лишь множителем $1/2$ (как уже отмечалось выше, круп-

номаштабная компонента флуктуаций фазы описывается приближением геометрической оптики, в котором формула для фазовых флуктуаций отличается множителем 2 от соответствующей формулы случая $D = \frac{\kappa^2 L}{k} \gg 1$. Следует также отметить, что функции $w_S(f)$ и $w_\chi(f)$ совпадают в области $\Omega \gg 1$ (см. (18)).

Таким образом, за исключением сравнительно узкой переходной области $f \sim f_0$ спектр фазовых флуктуаций пропорционален f^{-2} . Естественно, что этот вывод не распространяется на область очень низких частот порядка v_\perp/L_0 (L_0 — внешний масштаб турбулентности), где нарушается «закон $2/3$ » для флуктуаций показателя преломления.

Рассмотрим также частотный спектр пространственной разности фаз $\delta_\rho S$ в двух точках плоскости $x = L$, находящихся на расстоянии ρ друг от друга:

$$\begin{aligned} \delta_\rho S(t) &= S_1(\mathbf{r}, t) - S_1(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t), \\ \delta_\rho S(t + \tau) &= S_1(\mathbf{r} - \mathbf{v}_\perp \tau, t) - S_1(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_\perp \tau, t), \\ R_{\delta S}(\tau) &= \langle [S_1(\mathbf{r}, t) - S_1(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho}, t)] \times \\ &\quad \times [S_1(\mathbf{r} - \mathbf{v}_\perp \tau, t) - S_1(\mathbf{r} + \boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_\perp \tau, t)] \rangle. \end{aligned} \quad (37)$$

Применяя тождество $(a-b)(c-d) = \frac{1}{2} [(a-d)^2 + (b-c)^2 - (a-c)^2 - (b-d)^2]$, получим

$$R_{\delta S}(\tau) = \frac{1}{2} \{D_S(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_\perp \tau) + D_S(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_\perp \tau) - 2D_S(\mathbf{v}_\perp \tau)\}. \quad (38)$$

Формула (38) справедлива при произвольной взаимной ориентации векторов $\boldsymbol{\rho}$ и \mathbf{v}_\perp . Рассмотрим более подробно частный случай, когда $\boldsymbol{\rho}$ параллельно \mathbf{v}_\perp . Тогда $\boldsymbol{\rho} = \frac{\rho}{v_\perp} \mathbf{v}_\perp$ и

$$D_S(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_\perp \tau) = D_S\left(\mathbf{v}_\perp \left(\frac{\rho}{v_\perp} - \tau\right)\right).$$

Применяя формулу (27), получим

$$D_S(\boldsymbol{\rho} - \mathbf{v}_\perp \tau) = H\left(\frac{\rho}{v_\perp} - \tau\right) = 2 \int_0^\infty \left\{ 1 - \cos \left[2\pi f \left(\frac{\rho}{v_\perp} - \tau \right) \right] \right\} w_S(f) df.$$

Точно так же

$$D_S(\boldsymbol{\rho} + \mathbf{v}_\perp \tau) =$$

$$= H\left(\frac{\rho}{v_\perp} + \tau\right) = 2 \int_0^\infty \left\{ 1 - \cos \left[2\pi f \left(\frac{\rho}{v_\perp} + \tau \right) \right] \right\} w_S(f) df.$$

Подставляя эти выражения и (28) в формулу (38), получим после простых преобразований

$$R_{\delta S}(\tau) = \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) 2 \left[1 - \cos \frac{2\pi \rho f}{v_{\perp}} \right] w_S(f) df. \quad (39)$$

Из этой формулы следует, что при $\rho \ll v_{\perp}$ частотный спектр пространственной разности фаз $w_{\delta S}(f)$ связан с $w_S(f)$ формулой

$$w_{\delta S}(f) = 2 \left[1 - \cos \frac{2\pi f \rho}{v_{\perp}} \right] w_S(f) = 4 \sin^2 \left(\frac{\pi \rho f}{v_{\perp}} \right) w_S(f). \quad (40)$$

В области низких частот при $f \ll \frac{v_{\perp}}{\rho}$ в формуле (40) можно заменить синус его аргументом и $w_{\delta S}(f) \sim f^2 w_S(f)$. Если величина ρ не превышает внешнего масштаба турбулентности L_0 , то в этой области $w_S \sim f^{-5/3}$, так что $w_{\delta S} \sim f^{-1/3}$. Несмотря на то, что в этом случае $w_{\delta S}(0) = \infty$, эта особенность интегрируема, так что

$$\int_0^1 w_{\delta S}(f') df' \sim f^{2/3},$$

т. е.

$$\lim_{f \rightarrow 0} \int_0^f w_{\delta S}(f') df' = 0.$$

Это обозначает, что в области вблизи $f = 0$ сосредоточена лишь небольшая доля «энергии» флуктуаций.

В области высоких по сравнению с $\frac{v_{\perp}}{\rho}$ частот спектр $w_{\delta S}(f)$ обращается в нуль на частотах $f_n = \frac{nv_{\perp}}{\rho}$. Этот факт находит наглядное объяснение. Поле $S_1(x, y, z)$ в плоскости $x = L$ можно представить себе в виде суперпозиции синусоид с различными «длинами волн» Λ , движущимися в этой плоскости со скоростью v_{\perp} . Синусоида с периодом Λ вызывает флуктуации фазы с частотой $f = \frac{v_{\perp}}{\Lambda}$. Пусть две точки наблюдения находятся на расстоянии ρ друг от друга. Тогда, если между ними укладывается целое число длин волн с некоторым периодом Λ_n , т. е. $\rho = n\Lambda_n$, то вызываемая этой синусоидой разность фаз будет равна нулю, так как в обеих точках наблюдения значения синусоиды

одинаковы. Поэтому соответствующая частота

$$f_n = \frac{v_{\perp}}{\Lambda_n} = \frac{nv_{\perp}}{\rho}$$

будет отсутствовать в спектре флуктуаций разности фаз.

Практически величина v_{\perp} не является строго постоянной, а флуктуирует. Это, как видно из формулы (40), приводит к перемещениям положения нулей спектра, т. е., в конечном счете, к их «заплыванию». В области $f \gg \frac{v_{\perp}}{\rho}$ даже небольшие флуктуации v_{\perp} приводят к исчезновению нулей. Действительно, пусть $v_{\perp} = v_0 + \delta v$, где $v_0 = \langle v_{\perp} \rangle$, $v_{\perp}^{-1} \approx v_0^{-1} - \frac{\delta v}{v_0^2}$.

Тогда

$$\frac{\pi \rho f}{v_{\perp}} = \frac{\pi \rho f}{v_0} - \frac{\pi \rho \delta v}{v_0^2}.$$

Если величина $\frac{\pi \rho \delta v}{v_0^2}$ сравнима с $\frac{\pi}{2}$, то минимум синуса сместится на его максимум, т. е. в этом случае осцилляции в спектре исчезнут. Необходимое значение δv имеет порядок

$$\delta v \sim \frac{v_0^2}{2\rho f},$$

или, заменяя δv на среднеквадратичное значение σ_v ,

$$\frac{\sigma_v}{v_0} \sim \frac{v_0}{2\rho f}.$$

Таким образом, частота f_m , выше которой осцилляции в спектре должны смазываться, имеет порядок

$$f_m \sim \frac{1}{2} \frac{v_0}{\rho} \frac{v_0}{\sigma_v}. \quad (41)$$

Чем выше отношение v_0/σ_v , тем более четко и тем в большем диапазоне должны проявляться провалы в спектре $w_{\delta S}$. В области же частот $f > f_m$ величину $\sin^2 \frac{\pi \rho f}{v_{\perp}}$ следует заменить на ее среднее значение, равное $1/2$. В этом случае

$$w_{\delta S}(f) = 2w_S(f) \quad (f > f_m). \quad (42)$$

Таким образом, $w_{\delta S} \sim (f)^{-2}$ при $f > f_m$. Заметим, что ввиду быстрого убывания функции $w_S(f)$ в области больших f большие

частоты не вносят существенного вклада в интеграл $\int_0^{\infty} w_{\delta S}(f) df$.

Выше мы уже убедились в том, что и область очень малых частот дает несущественный вклад в этот интеграл. Таким образом, значение этого интеграла в основном определяется частотами порядка v_{\perp}/ρ .

Если $\frac{v_{\perp}}{\rho} \ll \frac{v_{\perp}}{\sqrt{\lambda L}}$, т. е. $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$, то в формулу (40) можно подставить вместо $w_S(f)$ ее асимптотику, соответствующую $f \ll \frac{v_{\perp}}{\sqrt{\lambda L}}$, т. е. $\Omega \ll 1$. В этом случае

$$w_{\delta S}(f) = 0,033 C_e^2 k^2 L v_{\perp}^{3/2} \sin^2 \left(\frac{\pi \rho f}{v_{\perp}} \right) f^{-3/2} \quad (\rho \gg \sqrt{\lambda L}). \quad (43)$$

В противоположном случае $\rho \ll \sqrt{\lambda L}$ можно использовать асимптотическую формулу (36). В этом случае

$$w_{\delta S}(f) = 0,016 C_e^2 k^2 L v_{\perp}^{3/2} \sin^2 \left(\frac{\pi \rho f}{v_{\perp}} \right) f^{-3/2} \quad (\rho \ll \sqrt{\lambda L}). \quad (44)$$

В случае $\rho \gg \sqrt{\lambda L}$ $\langle \delta S^2 \rangle = D_S(\rho) = 0,73 C_e^2 k^2 L \rho^{5/2}$. Подставляя это выражение в (43), запишем $w_{\delta S}(f)$ в виде

$$w_{\delta S}(f) = 0,045 \frac{\langle \delta S^2 \rangle}{f_S} \sin^2 \left(\pi \frac{f}{f_S} \right) \cdot \left(\frac{f}{f_S} \right)^{-3/2}, \quad (45)$$

где $f_S = \frac{v_{\perp}}{\rho}$ — характерная частота для флуктуаций разности фаз. В случае $\rho \ll \sqrt{\lambda L}$ $D_S(\rho) = \langle \delta S^2 \rangle$, так же как и (44), имеет дополнительный множитель $1/2$, поэтому формула (45) справедлива и в случае $\rho \ll \sqrt{\lambda L}$. Эта формула нарушается лишь в области $\rho \approx \sqrt{\lambda L}$.

§ 53. Влияние усредняющего действия апертуры приемного устройства на величину амплитудных флуктуаций

Выше были рассчитаны корреляционные функции флуктуаций амплитуды в плоскости, перпендикулярной направлению распространения, и было установлено, что при $\frac{\kappa_m^2 L}{k} \gg 1$ радиус корреляции флуктуаций имеет порядок $\sqrt{\lambda L}$. Пусть излучение принимается приемным устройством с конечной апертурой. Для

определенности мы будем говорить об объективе телескопа, хотя все рассуждения переносятся и на случай зеркала антенны или акустического преобразователя. В случае, если диаметр объектива телескопа значительно превосходит радиус корреляции флуктуаций $\sqrt{\lambda L}$, в его пределах будут находиться участки фронта волны с противоположными знаками флуктуаций, в результате чего полный световой поток через объектив будет флуктуировать относительно слабее, чем для маленького (по сравнению с $\sqrt{\lambda L}$) объектива.

Пусть $I(y, z)$ — интенсивность света. Тогда полный световой поток через объектив P равен

$$P = \iint_{\Sigma} I(y, z) dy dz, \quad (1)$$

где Σ — площадь объектива. Флуктуации P , определяемые как $P' = P - \langle P \rangle$, выразятся при помощи формулы

$$P' = \iint_{\Sigma} I'(y, z) dy dz, \quad (2)$$

где $I' = I - \langle I \rangle$. Для среднего квадрата флуктуаций имеем

$$\langle P'^2 \rangle = \iiint_{\Sigma} \iiint_{\Sigma} \langle I'(y_1, z_1) I'(y_2, z_2) \rangle dy_1 dz_1 dy_2 dz_2. \quad (3)$$

Функция $B_I = \langle I'(y_1, z_1) I'(y_2, z_2) \rangle$ зависит лишь от расстояния между точками 1 и 2, т. е.

$$B_I = B_I(y_1 - y_2, z_1 - z_2) = B_I(\rho).$$

Введем функцию $F(y, z)$, равную нулю вне поверхности объектива и единице на его поверхности. Тогда (3) можно записать в виде

$$\langle P'^2 \rangle = \iiint_{-\infty}^{\infty} \iiint_{-\infty}^{\infty} B_I(y_1 - y_2, z_1 - z_2) F(y_1, z_1) F(y_2, z_2) dy_1 dz_1 dy_2 dz_2. \quad (4)$$

Введем новые переменные интегрирования $y = y_1 - y_2$, $z = z_1 - z_2$. Тогда (4) принимает вид

$$\langle P'^2 \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} B_I(y, z) dy dz \iint_{-\infty}^{\infty} F(y_1, z_1) F(y_1 - y, z_1 - z) dy_1 dz_1. \quad (5)$$

Введем обозначение

$$K(y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(y_1, z_1) F(y_1 - y, z_1 - z) dy_1 dz_1. \quad (6)$$

Функция K зависит только от формы освещаемой поверхности объектива. Практически наиболее интересным является случай, когда приемная поверхность представляет собой круг радиуса R . Подсчитаем функцию K для этого случая. $F(y_1, z_1) = 1$ при $y_1^2 + z_1^2 \leq R^2$; $F(y - y_1, z - z_1) = 1$ при $(y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \leq R^2$.

Первая область — круг радиуса R с центром в начале координат, вторая — такой же круг с центром в точке (y, z) . $K(y, z)$ представляет собой площадь области, образуемой пересечением этих кругов. Очевидно, что $K(y, z) = K(\sqrt{y^2 + z^2})$. Элементарный подсчет этой площади приводит к формуле

$$K(y, z) = K(\rho) = \begin{cases} 2R^2 \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right], & \rho < 2R, \\ 0, & \rho > 2R. \end{cases} \quad (7)$$

Таким образом, для круглой диафрагмы телескопа (5) принимает вид

$$\begin{aligned} \langle P'^2 \rangle &= 2R^2 \iint_{\rho < 2R} B_I(\rho) \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho d\varphi = \\ &= 4\pi R^2 \int_0^{2R} B_I(\rho) \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho. \end{aligned} \quad (8)$$

Функция, стоящая в квадратных скобках в (8), равна $\pi/2$ при $\rho = 0$ и спадает до нуля при $\rho = 2R$. В случае, если $\sqrt{\lambda L} \gg R$, функция $B_I(\rho)$ при $0 \leq \rho \leq 2R$ приблизительно равна $B_I(0)$ и ее можно вынести из-под знака интеграла. В этом случае, учитывая, что

$$\int_0^1 (\arccos x - x \sqrt{1 - x^2}) x dx = \frac{\pi}{16},$$

получаем

$$\langle P'^2 \rangle = (\pi R^2)^2 B_I(0).$$

Это означает, что в случае $R \ll \sqrt{\lambda L}$ полный световой поток флуктуирует так же, как и интенсивность света.

Вместо $\langle P'^2 \rangle$ удобнее рассматривать относительную величину

$$Q(R) = \frac{\langle P'^2 \rangle}{\langle P \rangle^2} = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{2R} \frac{B_I(\rho)}{\langle I \rangle^2} \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho. \quad (9)$$

Для точечного объектива она равна

$$Q(0) = \frac{B_I(0)}{\langle I \rangle^2}.$$

Усредняющее действие объектива удобно характеризовать отношением $G(R) = \frac{Q(R)}{Q(0)}$, показывающим, во сколько раз относительные флуктуации полного светового потока через объектив радиуса R меньше, чем для точечного объектива:

$$G(R) = \frac{4}{\pi R^2} \int_0^{2R} b_I(\rho) \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right] \rho d\rho, \quad (10)$$

где $b_I(\rho) = \frac{B_I(\rho)}{B_I(0)}$ — нормированный коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности. Функция $G(R)$ равна единице при $R = 0$ и монотонно убывает с ростом R .

Для окончательного нахождения $G(R)$ необходимо найти функцию $b_I(\rho)$. Интенсивность I пропорциональна квадрату амплитуды:

$$I = \alpha A^2 = \alpha A_0^2 e^{2\chi}.$$

Величина χ , как уже отмечалось, распределена по нормальному закону. Отсюда следует, что

$$\langle I \rangle = \alpha A_0^2 \langle e^{2\chi} \rangle = \alpha A_0^2 e^{2\langle \chi^2 \rangle}.$$

Рассмотрим теперь

$$\begin{aligned} \langle I(\mathbf{r}_1) I(\mathbf{r}_2) \rangle &= \alpha^2 A_0^4 \langle e^{2\chi(\mathbf{r}_1) + 2\chi(\mathbf{r}_2)} \rangle = \\ &= \alpha^2 A_0^4 \exp \{4 [\langle \chi^2 \rangle + B_\chi(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)]\}. \end{aligned}$$

По определению

$$b_I(r_1 - r_2) = \frac{\langle I(r_1) I(r_2) \rangle - \langle I \rangle^2}{\langle I^2 \rangle - \langle I \rangle^2}.$$

Подставляя найденные выше выражения, получим

$$b_I(\rho) = \frac{e^{4B_x(\rho)} - 1}{e^{4\langle \chi^2 \rangle} - 1}. \quad (11)$$

В случае $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$ из (11) следует

$$b_I(\rho) = \frac{B_x(\rho)}{\langle \chi^2 \rangle} = b_x(\rho),$$

т. е. в этом случае радиус корреляции для I также имеет порядок $\sqrt{\lambda L}$.

На рис. 49 приведена кривая $G(R) = \frac{Q(R)}{Q(0)}$ для малых значений $\langle \chi^2 \rangle$. Функция G фактически зависит лишь от отношения

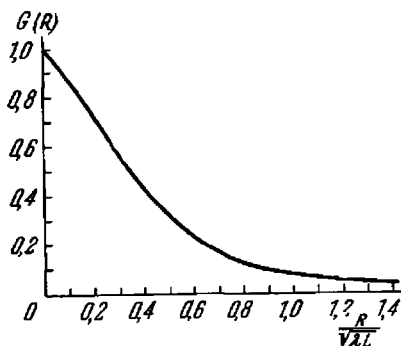


Рис. 49. Относительное уменьшение величины флуктуаций полного светового потока через объектив радиуса R в зависимости от R (при условии $l_0 \ll \sqrt{\lambda L} \ll L_0$).

$R/\sqrt{\lambda L}$, которое и отложено по оси абсцисс. При $R \gg \sqrt{\lambda L}$ $G(R) \sim \left(\frac{R}{\sqrt{\lambda L}}\right)^{-2/3}$. На пер-

вый взгляд может показаться, что $G(R)$ при $R \rightarrow \infty$ должна убывать обратно пропорционально числу независимых неоднородностей, укладываемых в пределах диафрагмы телескопа, что не согласуется с указанной асимптотикой. Однако в действительности это не так, ибо при больших R , когда в (10) можно заменить функцию

$$\left[\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right]$$

на ее значение в нуле, равное

$\pi/2$, остающийся после этого интеграл стремится к нулю, а не к постоянной величине в силу отмечавшегося выше условия

$$\int_0^{\infty} b_x(\rho) \rho d\rho = 0.$$

Это и объясняет более быстрое спадание функции $G(R)$.

Рассмотрим теперь частотные спектры флуктуаций светового потока P . В этом случае аналогично (1.52) мы можем записать

$$P'(t) = \iint_{\Sigma} I'(y, z) dy dz, \quad (12)$$

$$P'(t + \tau) = \iint_{\Sigma} I'(y' - v_y \tau, z' - v_z \tau) dy' dz'.$$

Перемножая эти выражения, усредняя и вводя функции $F(y, z)$, $F(y', z')$, получим

$$\begin{aligned} R_P(\tau) &\equiv \langle P'(t) P'(t + \tau) \rangle = \\ &= \iiint_{-\infty}^{\infty} F(y, z) F(y', z') B_I(y - y' + v_y \tau, z - z' + v_z \tau) dy dz dy' dz'. \end{aligned} \quad (13)$$

Представим $B_I(y, z)$ в виде двумерного пространственного спектрального разложения

$$B_I(y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa_2, \kappa_3, L) e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), получим

$$\begin{aligned} R_P(\tau) &= \iint_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa_2, \kappa_3, L) e^{i(\kappa_2 v_y + \kappa_3 v_z) \tau} d\kappa_2 d\kappa_3 \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} F(y, z) e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} dy dz \iint_{-\infty}^{\infty} F(y', z') e^{-i(\kappa_2 y' + \kappa_3 z')} dy' dz'. \end{aligned} \quad (15)$$

Функция

$$V_{\Sigma}(\kappa_2, \kappa_3) = \iint_{-\infty}^{\infty} F(y, z) e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} dy dz = \iint_{\Sigma} e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} dy dz \quad (16)$$

описывает фраунгоферову дифракцию на отверстии Σ . Используя (16), имеем

$$R_P(\tau) = \iint_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa_2, \kappa_3, L) |V_{\Sigma}(\kappa_2, \kappa_3)|^2 e^{i(\kappa_2 v_y + \kappa_3 v_z) \tau} d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (16a)$$

Перейдем теперь к частотному спектру $w_P(f)$

$$\begin{aligned}
 w_P(f) &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \cos(2\pi f\tau) R_P(\tau) d\tau = 2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i f\tau} R_P(\tau) d\tau = \\
 &= 2 \iint_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa_2, \kappa_3, L) |V_{\Sigma}(\kappa_2, \kappa_3)|^2 d\kappa_2 d\kappa_3 \int_{-\infty}^{\infty} e^{i[\kappa_2 v_y + \kappa_3 v_z - 2\pi f]\tau} d\tau = \\
 &= 4\pi \iint_{-\infty}^{\infty} F_I(\kappa_2, \kappa_3, L) |V_{\Sigma}(\kappa_2, \kappa_3)|^2 \delta(\kappa_2 v_y + \kappa_3 v_z - 2\pi f) d\kappa_2 d\kappa_3.
 \end{aligned} \tag{17}$$

Рассмотрим снова круглую диафрагму. В этом случае

$$V_{\Sigma}(\kappa_2, \kappa_3) = \int_0^R \rho d\rho \int_0^{2\pi} d\varphi e^{i\kappa\rho \cos\varphi} = \pi R^2 \frac{2J_1(\kappa R)}{\kappa R}. \tag{18}$$

Функция $F_I(\kappa_2, \kappa_3, L)$ в случае локально изотропных флуктуаций также зависит лишь от $\kappa = \sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}$. Введем в (17) полярные координаты. Тогда $\kappa_2 v_y + \kappa_3 v_z = \kappa v_{\perp} \cos\varphi$ и

$$w_P(f) = 4\pi \int_0^{\infty} F_I(\kappa, L) \left(\pi R^2 \frac{2J_1(\kappa R)}{\kappa R} \right)^2 \kappa d\kappa \int_0^{2\pi} \delta(\kappa v_{\perp} \cos\varphi - 2\pi f) d\varphi. \tag{19}$$

Интеграл от δ -функции легко вычисляется:

$$\int_0^{2\pi} \delta(\kappa v_{\perp} \cos\varphi - 2\pi f) d\varphi = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2}} & \text{при } 4\pi^2 f^2 < \kappa^2 v_{\perp}^2, \\ 0 & \text{при } 4\pi^2 f^2 > \kappa^2 v_{\perp}^2. \end{cases}$$

Подставляя его в (19), получим

$$\begin{aligned}
 w_P(f) &= 8\pi (\pi R^2)^2 \int_{2\pi f/v_{\perp}}^{\infty} F_I(\kappa, L) \left[\frac{2J_1(\kappa R)}{\kappa R} \right]^2 \frac{\kappa d\kappa}{\sqrt{\kappa^2 v_{\perp}^2 - 4\pi^2 f^2}} = \\
 &= \frac{8\pi (\pi R^2)^2}{v_{\perp}} \int_0^{\infty} F_I \left(\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}, L \right) \left[\frac{2J_1 \left(R \sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}} \right)}{R \sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}} \right]^2 d\kappa.
 \end{aligned} \tag{20}$$

Если вместо спектра величины P' рассматривать спектр относительных флуктуаций $w_{P\langle P \rangle}(f)$, то его можно получить из (20) делением на $\langle P \rangle^2 = (\pi R^2 \langle I \rangle)^2$:

$$w_{\frac{P}{\langle P \rangle}} = \frac{8\pi}{v_{\perp}} \int_0^{\infty} \frac{F_I \left(\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}, L \right)}{\langle I \rangle^2} \left[\frac{2J_1 \left(R \sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}} \right)}{R \sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}} \right]^2 d\kappa. \quad (21)$$

Формула (21) отличается от соответствующей формулы (7.52) наличием дополнительного множителя

$$\left[\frac{2J_1 \left(R \sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}} \right)}{R \sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}} \right]^2 \quad (22)$$

под знаком интеграла. При $R = 0$ этот множитель обращается в единицу и мы получаем прежнюю формулу. При $R \neq 0$ этот множитель меньше единицы, что соответствует уменьшению относительных флуктуаций за счет усреднения по объективу. В случае, если $\frac{2\pi f R}{v_{\perp}} \gg 1$, т. е. $f \gg \frac{v_{\perp}}{2\pi R}$, множитель (22) мал при всех κ . Это означает, что в области высоких частот усредняющее действие объектива ослабляет действие неоднородностей всех масштабов. В случае же, когда $f \ll \frac{v_{\perp}}{2\pi R}$, при $\kappa \ll \frac{1}{R}$ множитель (22) близок к единице и становится малым при $\kappa \gg \frac{1}{R}$.

Таким образом, вклад крупномасштабных неоднородностей в низкочастотную часть спектра практически не ослабляется, но масштабы, малые по сравнению с радиусом диафрагмы, подавляются.

В случае слабых флуктуаций

$$\frac{F_I(\kappa, L)}{\langle I \rangle^2} = F_{\kappa}(\kappa, L) = \frac{\pi k^2 L}{4} \left[1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right] A C_2^2 \kappa^{-11/2}, \quad (23)$$

где $A = 0,033$. Подставляя (23) в (21), вводя обозначения

$$f_0^2 = \frac{k v_{\perp}}{4\pi^2 L}, \quad \Omega^2 = \left(\frac{f}{f_0} \right)^2, \quad \rho^2 = \frac{k R^2}{L} = \frac{2\pi R^2}{\lambda L}$$

и заменяя переменную интегрирования x на $z = \frac{Lx^2}{k}$, получим

$$w_{P/\langle P \rangle}(f) = 0,67 \frac{\langle \chi^2 \rangle}{f_0} \int_0^{\infty} \left[\frac{2J_1(\rho \sqrt{z + \Omega^2})}{\rho \sqrt{z + \Omega^2}} \right]^2 \left[1 - \frac{\sin(z + \Omega^2)}{z + \Omega^2} \right] \times \\ \times (z + \Omega^2)^{-3/2} z^{-1/2} dz. \quad (24)$$

Итак, безразмерная величина $F(\Omega, \rho) = f_0 w_{P/\langle P \rangle}(f) / \langle \chi^2 \rangle$ зависит от двух безразмерных параметров: ρ — отношения

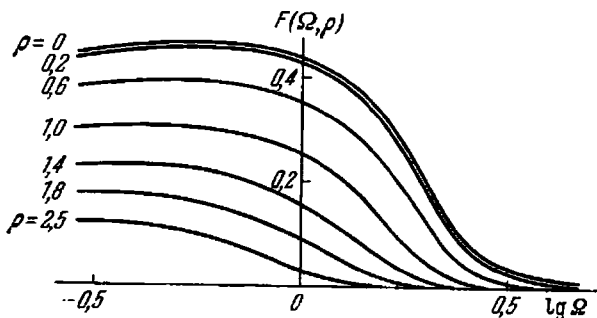


Рис. 50. Зависимость частотного спектра флуктуаций светового потока через объектив от диаметра объектива.

радиуса объектива к радиусу первой зоны Френеля и Ω — отношения частоты к характерной частоте пульсаций

$$f_0 \sim \frac{v_{\perp}}{\sqrt{\lambda L}}.$$

Функция $F(\Omega, \rho)$ при различных ρ изображена на рис. 50. При $\rho = 0$ она совпадает с $F(\Omega)$ (рис. 48).

§ 54. Мерцание источников с конечными угловыми размерами

Из астрономических наблюдений хорошо известно, что планеты мерцают слабее звезд, находящихся на том же зенитном расстоянии. Этот эффект во многом схож с ослаблением мерцания за счет усредняющего действия объектива. Обозначим через γ угловой размер планеты. Тогда в точку наблюдения приходит пучок плоских волн от различных точек диска с угловым размером γ . На границе преломляющей атмосферы расстояние между

лучами, направленными к крайним точкам диска, равно γL , где L — толщина атмосферы в направлении на планету. Если $\gamma L > \sqrt{\lambda L}$, то флуктуации в различных лучах происходят некоррелированно и должно наблюдаться ослабление мерцания. Из этого рассуждения следует, что при $\gamma \gg \gamma_0 = \sqrt{\lambda/L}$ мерцание должно существенно ослабляться, при $\gamma \ll \gamma_0$ этот эффект мал. Угол γ_0 можно назвать углом корреляции.

Перейдем теперь к количественному расчету [118]. Пусть $i(\theta, \varphi)$ — интенсивность света, излучаемого планетой и приходящего в точку наблюдения под углами θ и φ (полярная ось системы координат направлена к центру диска планеты). Различные точки диска планеты являются некогерентными источниками света и поэтому суммарная интенсивность равна интегралу от i по диску:

$$I = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\gamma} \sin \theta d\theta i(\theta, \varphi). \quad (1)$$

Аналогичная формула имеет место и для флуктуаций:

$$I' = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\gamma} \sin \theta d\theta i'(\theta, \varphi). \quad (2)$$

Мы будем рассматривать в дальнейшем относительные флуктуации $Y' = \frac{I'}{\langle I \rangle}$. Из (1) следует

$$\langle I \rangle = 4\pi \sin^2 \frac{\gamma}{2} \langle i \rangle,$$

так что

$$Y' = \frac{1}{4\pi \sin^2 \frac{\gamma}{2}} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\gamma} \sin \theta d\theta \frac{i(\theta, \varphi)}{\langle i \rangle} \approx \frac{1}{\pi \gamma^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\gamma} \sin \theta d\theta \frac{i(\theta, \varphi)}{\langle i \rangle}. \quad (3)$$

Для среднего квадрата относительных флуктуаций имеем (в случае $\gamma \ll 1$ можно считать $\sin \theta \approx \theta$)

$$\langle Y'^2 \rangle = \sigma_Y^2 = \frac{1}{(\pi \gamma^2)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi_1 \int_0^{2\pi} d\varphi_2 \int_0^{\gamma} \theta_1 d\theta_1 \int_0^{\gamma} \theta_2 d\theta_2 \frac{\langle i'(\theta_1, \varphi_1) i'(\theta_2, \varphi_2) \rangle}{\langle i \rangle^2}. \quad (4)$$

Свяжем величину $\langle i'(\theta_1, \varphi_1) i'(\theta_2, \varphi_2) \rangle$ с корреляционной функцией логарифма амплитуд двух плоских волн, распространяющихся под некоторым углом ψ друг к другу. Используя

равенство $i = A_0^2 \exp(2\chi(\theta, \varphi))$ и факт нормального распределения χ , легко получить формулу, аналогичную (11.53):

$$\frac{\langle i'(\theta_1, \varphi_1) i'(\theta_2, \varphi_2) \rangle}{\langle i \rangle^2} = \frac{\langle i(\theta_1, \varphi_1) i(\theta_2, \varphi_2) \rangle - \langle i \rangle^2}{\langle i \rangle^2} = e^{4B_{\chi}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)} - 1, \quad (5)$$

где $B_{\chi}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2) = \langle \chi(\theta_1, \varphi_1) \chi(\theta_2, \varphi_2) \rangle$.

Таким образом, для вычисления σ_{χ}^2 необходимо сначала найти $B_{\chi}(\theta_1, \varphi_1, \theta_2, \varphi_2)$. Перейдем к расчету этой функции. Для $\chi(x, y, z)$, исходя из (30.45), легко получить выражение

$$\chi(x, y, z) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^x d\xi \iint_{-\infty}^{\infty} d\eta d\zeta \varepsilon_1(\xi, \eta, \zeta) \frac{\cos \left\{ k \frac{(y-\eta)^2 + (z-\zeta)^2}{2(x-\xi)} \right\}}{x-\xi}. \quad (6)$$

Это выражение записано в специальной системе координат, в которой ось x направлена вдоль вектора k . Перепишем это выражение в ковариантном виде. Пусть $k = kn$, где n — единичный вектор вдоль направления распространения. Очевидно, что

$$x - \xi = n(r - \rho),$$

где $r = (x, y, z)$, $\rho = (\xi, \eta, \zeta)$,

$$(y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2 = (r - \rho)^2 - (n(r - \rho))^2.$$

Интегрирование ведется по бесконечному слою, в котором $\xi > 0$, т. е. $n\rho > 0$, и $(x - \xi) > 0$, т. е. $n(r - \rho) > 0$. Если

$$\theta(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } x > 0, \\ 0 & \text{при } x < 0, \end{cases}$$

то неравенства $n\rho > 0$, $n(r - \rho) > 0$ можно удовлетворить введением в подынтегральное выражение множителя $\theta(n\rho)\theta(n(r - \rho))$. Тогда (6) можно переписать в виде

$$\chi(r) = \frac{k^2}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \theta(n\rho)\theta(n(r - \rho)) \varepsilon_1(\rho) \frac{\cos \left\{ k \frac{(r - \rho)^2 - (n(r - \rho))^2}{2n(r - \rho)} \right\}}{n(r - \rho)} d^3\rho. \quad (7)$$

В этой форме (7) можно применить для произвольного направления вектора n . Следует заметить, что в формуле (7) при $n \neq \{1, 0, 0\}$ интегрирование производится по области, границы которой не перпендикулярны оси x . Если граница неоднородного слоя в действительности перпендикулярна оси x , то при этом

совершается незначительная ошибка, практически несущественная.

Пусть $n = \{\cos \psi, 0, \sin \psi\}$, $r = (L, 0, 0)$. Тогда

$$n(r - \rho) = \cos \psi \cdot (L - \xi) - \sin \psi \cdot \zeta,$$

$$(r - \rho)^2 - (n(r - \rho))^2 = [(L - \xi) \sin \psi + \zeta \cos \psi]^2 + \eta^2,$$

$$\chi(r) = \frac{k^2}{4\pi} \iiint_{-\infty}^{\infty} \theta(\xi \cos \psi + \zeta \sin \psi) \theta((L - \xi) \cos \psi - \zeta \sin \psi) \times \\ \times e_1(\xi, \eta, \zeta) \cos \left\{ k \frac{[(L - \xi) \sin \psi + \zeta \cos \psi]^2 + \eta^2}{2[(L - \xi) \cos \psi - \zeta \sin \psi]} \right\} \frac{d\xi d\eta d\zeta}{(L - \xi) \cos \psi - \zeta \sin \psi} \quad (7a)$$

Пусть угол ψ мал, так что

$$(L - \xi) \cos \psi - \zeta \sin \psi \approx (L - \xi) - \zeta \psi.$$

Величина

$$[(L - \xi) \psi + \zeta]^2 + \eta^2 = \rho_{\perp}^2$$

под знаком косинуса представляет собой квадрат расстояния точки ρ от оси пучка, проходящей через точку наблюдения. В существенной для интегрирования области она по порядку величины не превосходит $\rho_{\perp} \sim \frac{\lambda L}{\lambda_0}$ (здесь λ_0 — внутренний масштаб турбулентности, λ/λ_0 — угол дифракции). Представим аргумент косинуса в виде ряда

$$\frac{k\rho_{\perp}^2}{2[(L - \xi) \cos \psi - \zeta \sin \psi]} \approx \frac{k\rho_{\perp}^2}{2(L - \xi - \zeta\psi)} = \frac{k\rho_{\perp}^2}{2(L - \xi)} \left[1 + \frac{\zeta\psi}{L - \xi} + \dots \right]$$

и выясним условия, при которых в нем можно оставить лишь первый член. Величина ζ имеет порядок $L\psi$. Поэтому необходимое условие принимает вид

$$\frac{k\rho_{\perp}^2}{2(L - \xi)} \frac{\zeta\psi}{L - \xi} \sim \frac{1}{\lambda L} \left(\frac{\lambda L}{\lambda_0} \right)^2 \frac{L\psi^2}{L} = \frac{\lambda L}{\lambda_0^2} \psi^2 \ll 1,$$

$$\psi^2 \ll \frac{\lambda_0^2}{\lambda L} = \psi_0^2. \quad (8)$$

Условие (8) не является жестким ограничением, так как угол корреляции $\gamma_0 \approx \sqrt{\frac{\lambda}{L}}$ и $\frac{\gamma_0}{\psi_0} \sim \frac{\lambda}{\lambda_0} \ll 1$. Следовательно, ψ может принимать значения, существенно превосходящие γ_0 , что вполне достаточно для наших целей. Учитывая ограничение (8)-

можно выражение для косинуса в (7) представить в виде

$$\cos \left[k \frac{[(L - \xi)\psi + \zeta]^2 + \eta^2}{2(L - \xi)} \right].$$

Кроме того, величину $(L - \xi) \cos \psi - \zeta \sin \psi$ в знаменателе (7а) можно заменить на $L - \xi$. Поскольку $\psi \ll 1$, пределы интегрирования по ξ в (7) можно заменить на 0 и L . В результате получаем для логарифма амплитуды волны, распространяющейся под углом ψ к оси x (эту величину обозначим через $\chi(\psi)$), следующее выражение:

$$\chi(\psi) = \frac{k^2}{4\pi} \int_0^L \frac{d\xi}{L - \xi} \iint_{-\infty}^{\infty} d\eta d\zeta \varepsilon_1(\xi, \eta, \zeta) \cos \left[k \frac{[(L - \xi)\psi + \zeta]^2 + \eta^2}{2(L - \xi)} \right]. \quad (9)$$

Для волны, распространяющейся в точку наблюдения вдоль оси x (ее логарифм амплитуды обозначим через $\chi(0)$), мы имеем формулу (6), в которой надо положить $x = L$, $y = z = 0$. Перемножая эти выражения и усредняя, получим формулу

$$B_x(\psi) = \left(\frac{k^2}{4\pi} \right)^2 \int_0^L \frac{d\xi}{L - \xi} \int_0^L \frac{d\xi'}{L - \xi'} \iiint_{-\infty}^{\infty} B_\varepsilon(\xi - \xi', \eta - \eta', \zeta - \zeta') \times \\ \times \cos \left[k \frac{\eta'^2 + \zeta'^2}{2(L - \xi')} \right] \cos \left[k \frac{[(L - \xi)\psi + \zeta]^2 + \eta^2}{2(L - \xi)} \right] d\eta d\zeta d\eta' d\zeta'. \quad (10)$$

Дальнейшие вычисления удобно производить, подставив

$$B_\varepsilon(\xi - \xi', \eta - \eta', \zeta - \zeta') = \\ = \iint_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\kappa_2, \kappa_3, \xi - \xi') e^{i[\kappa_2(\eta - \eta') + \kappa_3(\zeta - \zeta')]} d\kappa_2 d\kappa_3.$$

После этой подстановки интегралы по переменным η , η' , ζ , ζ' легко вычисляются сведением к интегралу Пуассона, интеграл по переменной $(\xi + \xi')/2$ также вычисляется точно, а интеграл по переменной $(\xi - \xi')$ вычисляется приближенно с использованием того свойства функции $F_\varepsilon(\kappa, \xi)$, что она быстро убывает при $\xi \ll \frac{2\pi}{\kappa}$ (аналогичные вычисления неоднократно проводились выше и поэтому мы их опускаем). В результате для $B_x(\psi)$

получаем формулу

$$B_x(\psi) = \frac{\pi k^2}{8} \iint_{-\infty}^{\infty} \Phi_\varepsilon(\rho, \kappa_2, \kappa_3) \left\{ \frac{\exp \left[-i \left(\frac{\kappa^2 L}{k} - \kappa_2 L \psi \right) \right] - 1}{i \left(\frac{\kappa^2}{k} - \psi \kappa_2 \right)} + \right. \\ \left. + \frac{2i(1 - e^{i\kappa_2 L \psi})}{\kappa_2 \psi} - \frac{\exp \left[i \left(\frac{\kappa^2 L}{k} + \kappa_2 L \psi \right) \right] - 1}{i \left(\frac{\kappa^2}{k} + \psi \kappa_2 \right)} \right\} d\kappa_2 d\kappa_3. \quad (11)$$

Перейдем к полярным координатам $\kappa_2 = \kappa \cos \varphi$, $\kappa_3 = \kappa \sin \varphi$ и используем формулу

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\kappa L \psi \cos \varphi} - 1}{i\kappa L \psi \cos \varphi} d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 e^{itL\kappa\psi \cos \varphi} dt,$$

а также аналогичные формулы для остальных слагаемых в (11). После этого интегрирование по φ выполняется и приводит к беселевой функции. Для $B_x(\psi)$ получаем, подставляя

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = AC_\varepsilon^2 \kappa^{-1/2} \quad (A = 0,033),$$

следующее выражение:

$$B_x(\psi) = \frac{\pi^2 A}{4} C_\varepsilon^2 k^2 L \int_0^1 dt \int_0^\infty \left[1 - \cos \frac{\kappa^2 L t}{k} \right] J_0(\kappa t L \psi) \kappa^{-1/2} d\kappa. \quad (12)$$

Интеграл в (12) можно вычислить, разложив функцию J_0 в ряд. В результате для $b_x(\psi) = B_x(\psi)/B_x(0)$ получаем выражение

$$b_x(\psi) = \frac{11}{6\Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \cos \frac{5\pi}{12}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\Gamma\left(k - \frac{5}{6}\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}\left(k + \frac{5}{6}\right)\right)}{(k!)^2 \left(k + \frac{11}{6}\right)} \left(\frac{\psi}{\gamma_0}\right)^{2k} - \\ - \frac{11}{16\Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \cos \frac{5\pi}{12}} \left(\frac{\psi}{\gamma_0}\right)^{5/2}, \quad (13)$$

где

$$\gamma_0 = \frac{2}{\sqrt{kL}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{\pi L}}$$

(это определение γ_0 отличается от употреблявшегося ранее в качественных рассуждениях численным множителем). Как и следовало ожидать, функция $b_x(\psi)$ зависит лишь от отношения ψ/γ_0 .

Функция $b_x(\psi)$, вычисленная по формуле (13) с использованием пяти первых членов ряда, представлена на рис. 51.

Вернемся теперь к вычислению σ_γ^2 по формуле (4). Выражение (4) удобно несколько преобразовать. При $\gamma \ll 1$ можно рассматривать (θ_1, φ_1) и (θ_2, φ_2) как цилиндрические координаты точек круга радиуса γ , причем $\sin \theta d\theta d\varphi \approx \theta d\theta d\varphi = d\Sigma$ — элемент площади этого круга, $\pi\gamma^2 = \Sigma$ — его площадь. Обозначим $\rho_1 = (\theta_1, \varphi_1)$ и $\rho_2 = (\theta_2, \varphi_2)$ — радиусы-векторы соответствующих точек. Согласно формулам (5) и (13) подынтегральное выражение в (4) зависит лишь от $\psi = |\rho_1 - \rho_2|$. Поэтому (4) можно записать в виде

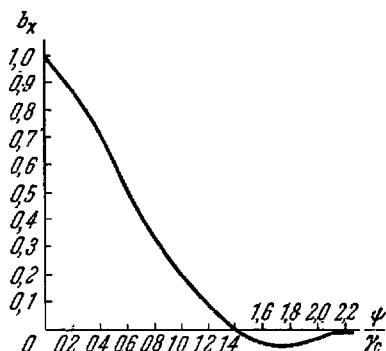


Рис. 51. Корреляционная функция флуктуаций амплитуды двух плоских волн, распространяющихся под углом ψ друг к другу.

$$\sigma_\gamma^2 = \frac{1}{\Sigma^2} \iint_{\Sigma} \iint_{\Sigma} [e^{4\langle x^2 \rangle b_x(|\rho_1 - \rho_2|)} - 1] d\Sigma_1 d\Sigma_2. \quad (14)$$

Введем снова функцию $F_\gamma(\rho)$, равную нулю вне круга радиуса γ и равную единице внутри этого круга. Тогда

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^2 &= \frac{1}{\Sigma^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \iint_{-\infty}^{\infty} F(\rho_1) F(\rho_2) [e^{4\langle x^2 \rangle b_x(|\rho_1 - \rho_2|)} - 1] d\Sigma_1 d\Sigma_2 = \\ &= \frac{1}{\Sigma^2} \iint_{-\infty}^{\infty} [e^{4\langle x^2 \rangle b_x(\rho)} - 1] d\Sigma_\rho \iint_{-\infty}^{\infty} F(\rho_1) F(\rho_1 - \rho) d\Sigma_1. \quad (15) \end{aligned}$$

Учитывая определение функции $K(\rho)$ (см. (6.53)), а также ее конкретный вид (7.53) для круга, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_\gamma^2(\gamma) &= \frac{1}{\Sigma^2} \iint_{-\infty}^{\infty} [e^{4\langle x^2 \rangle b_x(\rho)} - 1] K(\rho) d\Sigma_\rho = \\ &= \frac{1}{(\pi\gamma^2)^2} \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{2\gamma} \rho d\rho [e^{4\langle x^2 \rangle b_x(\rho)} - 1] 2\gamma^2 \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2\gamma}\right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{\rho}{2\gamma} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4\gamma^2}} \right] = \frac{16}{\pi} \int_0^1 [e^{4\langle x^2 \rangle b_x(2\gamma x)} - 1] \times \\ &\quad \times [\arccos x - x \sqrt{1 - x^2}] x dx. \quad (16) \end{aligned}$$

В случае $\gamma = 0$ формула (16) дает

$$\sigma_{\gamma}^2(0) = [e^{4\langle \chi^2 \rangle} - 1] \frac{16}{\pi} \int_0^1 [\arccos x - x \sqrt{1-x^2}] x dx = e^{4\langle \chi^2 \rangle} - 1.$$

Введем функцию

$$\frac{\sigma_{\gamma}^2(\gamma)}{\sigma_{\gamma}^2(0)} = \frac{16 \int_0^1 [e^{4\langle \chi^2 \rangle b_{\chi}(2\gamma x)} - 1] [\arccos x - x \sqrt{1-x^2}] x dx}{\pi [e^{4\langle \chi^2 \rangle} - 1]}, \quad (17)$$

равную отношению среднего квадрата флуктуаций интенсивности протяженного ($\gamma \neq 0$) и точечного ($\gamma = 0$) источников.

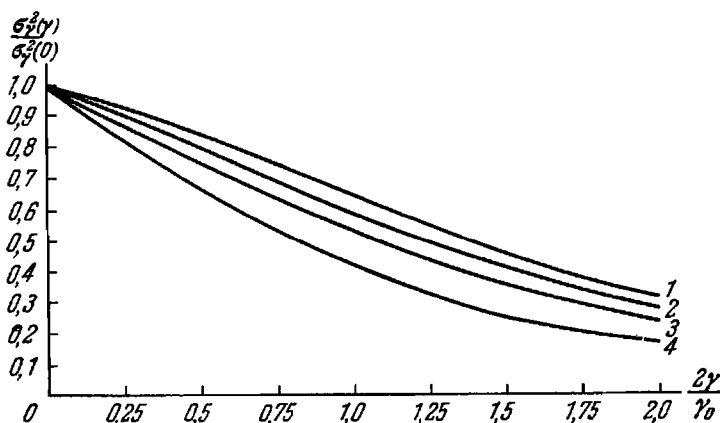


Рис. 52. Зависимость относительного уменьшения величины флуктуаций интенсивности для источника света с угловым диаметром γ от γ при различных значениях параметра $4\langle \chi^2 \rangle$:

1 — $4\langle \chi^2 \rangle = 0$; 2 — $4\langle \chi^2 \rangle = 0,5$; 3 — $4\langle \chi^2 \rangle = 1$; 4 — $4\langle \chi^2 \rangle = 2,5$.

Так как функция $b_{\chi}(\psi)$ зависит от отношения ψ/γ_0 , то $\sigma_{\gamma}^2(\gamma)/\sigma_{\gamma}^2(0)$ зависит от отношения $2\gamma/\gamma_0$ и, кроме того, от параметра $4\langle \chi^2 \rangle$. На рис. 52 представлены функции $\sigma_{\gamma}^2(\gamma)/\sigma_{\gamma}^2(0)$, полученные в результате численного интегрирования, при некоторых значениях параметра $4\langle \chi^2 \rangle$.

§ 55. «Дрожание» изображений в фокальной плоскости телескопа

Флуктуации фазы вызывают хорошо известный в наблюдательной астрономии эффект «дрожания» изображения. В первом приближении его можно описать следующим образом. Пусть имеется интерферометр (или фазометр) с базой b , на который

падает волна, прошедшая через турбулентную атмосферу, причем среднее положение фронта волны параллельно базе. Тогда случайный поворот фронта волны на угол α вызывает разность фаз $\Delta S = kb \sin \alpha \approx kba$, т. е. α можно определить через ΔS как $\alpha = \frac{\Delta S}{kb}$. Средний квадрат флуктуаций α равен

$$\langle \alpha^2 \rangle = \sigma_\alpha^2 = \frac{\langle \Delta S^2 \rangle}{k^2 b^2} = \frac{D_S(b)}{k^2 b^2}.$$

В случае, если мы имеем объектив радиуса R , эта формула может быть применена приближенно, если подставить в нее $b = 2R$. Однако ясно, что в случае объектива дело обстоит несколько сложнее. Неоднородности поля S более мелкие, чем R , не должны вызывать смещения изображения, а должны приводить к его размытию, т. е. к ухудшению качества изображения. В то же время крупномасштабные неоднородности должны вызывать смещение изображения. Рассмотрим этот вопрос подробнее. Пусть мы имеем линзу с фокусным расстоянием F , на которую падает возмущенная волна. В фокальной плоскости линзы образуется некоторое распределение интенсивности. Эффективное значение угла прихода можно определить по «центру тяжести» этого распределения интенсивности, координаты которого будут случайными величинами. Определив средний квадрат флуктуаций координат центра тяжести, мы сможем пересчитать его на средний квадрат флуктуаций эффективного угла прихода.

Эта же задача может быть сформулирована еще проще. Пусть мы имеем диафрагму объектива (без линзы); падающая на нее волна испытывает дифракцию, в результате чего вдали от диафрагмы (в зоне дифракции Фраунгофера) образуется угловое распределение интенсивности дифрагированного поля. Известно, что если картину распределения интенсивности в фокальной плоскости линзы перевести в угловые единицы, то полученное угловое распределение будет совпадать с упомянутым выше угловым распределением дифрагированного на диафрагме поля в зоне Фраунгофера. Так как мы, в конечном счете, интересуемся флуктуациями угла прихода, воспринимаемого телескопом, то будет удобнее рассматривать непосредственно угловое распределение дифрагированного поля в зоне Фраунгофера.

Итак, пусть на диафрагму Σ падает волна Ψ , значение которой при $x = 0$ (в плоскости Σ) есть

$$\Psi_0(y, z) = A_0 \exp(\chi(y, z) + iS(y, z)). \quad (1)$$

Поле за диафрагмой может быть определено из волнового уравнения

$$\Delta\Psi + k^2\Psi = 0$$

с граничным условием (1) при $x = 0$ и условием излучения при $x = \infty$. Эта задача, как известно, имеет следующее решение:

$$\Psi(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} \Psi_0(\eta, \zeta) w(x, y - \eta, z - \zeta) d\eta d\zeta, \quad (2)$$

где

$$w(x, y - \eta, z - \zeta) = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{e^{ikr}}{r} \right) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikr}}{r} \frac{x}{r} \left(1 - \frac{1}{ikr} \right), \quad (3)$$

$r^2 = x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2$. Обозначим также $R_0^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

В нашем случае интегрирование в (2) распространяется лишь на пределы диафрагмы Σ . Разложим величину

$$r = \sqrt{x^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2} = \sqrt{R_0^2 - 2y\eta - 2z\zeta + \eta^2 + \zeta^2}$$

в ряд по η, ζ :

$$r = R_0 \sqrt{1 - \frac{2(y\eta + z\zeta)}{R_0^2} + \frac{\eta^2 + \zeta^2}{R_0^2}} = R_0 - \frac{y\eta + z\zeta}{R_0} + \frac{O(\eta^2, \zeta^2)}{R_0}. \quad (4)$$

Поместим начало координат в центре диафрагмы. Тогда последний член разложения (4) имеет порядок R^2/R_0 , где R — размер диафрагмы. В экспоненте, входящей в (3), можно отбросить этот член разложения, если $\frac{kR^2}{R_0} \ll 1$, т. е.

$$R^2 \ll \lambda R_0.$$

Но это и есть условие того, что точка наблюдения находится в области дифракции Фраунгофера. Обозначим

$$\frac{y}{R_0} = \sin \alpha, \quad \frac{z}{R_0} = \sin \beta. \quad (5)$$

α и β представляют собой углы между нормалью к диафрагме и направлением на точку наблюдения x, y, z , которые отсчитываются в плоскостях (x, y) и (x, z) соответственно. Очевидно, что

$$\frac{x}{R_0} = \sqrt{1 - \sin^2 \alpha - \sin^2 \beta}.$$

Заменяя в экспоненте (3) r на $R_0 - (\eta \sin \alpha + \zeta \sin \beta)$, а в знаменателе — просто на R_0 , пренебрегая величиной $1/ikR_0$ и

считая углы α и β малыми (это справедливо в случае $\lambda \ll \lambda_0$), получим

$$\Psi(x, y, z) = \frac{k}{2\pi i} \frac{e^{ikR_0}}{R_0} \iint_{\Sigma} \Psi_0(\eta, \zeta) e^{-ik(\alpha\eta + \beta\zeta)} d\eta d\zeta. \quad (6)$$

Распределение интенсивности по углам определяется величиной $\Psi\Psi^*$:

$$I(\alpha, \beta) = \Psi\Psi^* = \frac{k^2}{4\pi^2 R_0^2} \iiint_{\Sigma} \Psi_0(\eta, \zeta) \Psi_0^*(\eta', \zeta') e^{-ik[\alpha(\eta - \eta') + \beta(\zeta - \zeta')]} d\eta d\zeta d\eta' d\zeta'. \quad (7)$$

Найдем теперь угловые координаты центра тяжести этого распределения. Обозначая их α_0 , β_0 , имеем по определению

$$\alpha_0 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) \alpha d\alpha d\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}, \quad \beta_0 = \frac{\iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) \beta d\alpha d\beta}{\iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta}. \quad (8)$$

Вычислим сначала интеграл в знаменателе:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta &= \frac{k^2}{4\pi^2 R_0^2} \iiint_{\Sigma} \Psi_0(\eta, \zeta) \Psi_0^*(\eta', \zeta') d\eta d\zeta d\eta' d\zeta' \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-ik[\alpha(\eta - \eta') + \beta(\zeta - \zeta')]} d\alpha d\beta = \frac{k^2}{4\pi^2 R_0^2} 4\pi^2 \iiint_{\Sigma} \Psi_0(\eta, \zeta) \Psi_0^*(\eta', \zeta') \times \\ &\times \delta(k(\eta - \eta')) \delta(k(\zeta - \zeta')) d\eta d\zeta d\eta' d\zeta'. \end{aligned}$$

Учитывая, что

$$\delta(k(\eta - \eta')) = \frac{1}{k} \delta(\eta - \eta'),$$

получаем

$$\iint_{-\infty}^{\infty} I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta = \frac{1}{R_0^2} \iint_{\Sigma} |\Psi_0(\eta, \zeta)|^2 d\eta d\zeta. \quad (9)$$

Перейдем к вычислению величины

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \alpha I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta &= \frac{k^2}{4\pi^2 R_0^2} \iiint_{\Sigma} \Psi_0(\eta, \zeta) \Psi_0^*(\eta', \zeta') d\eta d\zeta d\eta' d\zeta' \times \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(\zeta - \zeta')\beta} d\beta \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik(\eta - \eta')\alpha} \alpha d\alpha. \quad (10) \end{aligned}$$

Последний интеграл в (10) вычисляется следующим образом: рассмотрим

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iua} da = 2\pi\delta(u).$$

Дифференцируя это равенство по u , получаем

$$\int_{-\infty}^{\infty} a e^{-iua} da = 2\pi\delta'(u)i.$$

Дифференцируя по u функцию $\delta(ku) = \frac{1}{k} \delta(u)$, имеем $\delta'(ku)k = = \frac{1}{k} \delta'(u)$, откуда

$$\delta'(ku) = \frac{1}{k^2} \delta'(u).$$

Используя эти равенства, получаем

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \alpha I(\alpha, \beta) d\alpha d\beta &= \frac{k^2}{R_0^2} \iiint_{\Sigma} \Psi_0(\eta, \zeta) \Psi_0^*(\eta', \zeta') \times \\ &\times \delta(k(\zeta - \zeta')) i\delta'(k(\eta - \eta')) d\eta d\eta' d\zeta d\zeta' = \\ &= -\frac{i}{kR_0^2} \iint_{\Sigma} \Psi_0(\eta, \zeta) \frac{\partial \Psi_0^*(\eta, \zeta)}{\partial \eta} d\eta d\zeta. \quad (11) \end{aligned}$$

В последнем равенстве использована формула

$$\int f(x)\delta'(x - x_0) dx = -f'(x_0).$$

Разделив (11) на (9), получаем

$$\alpha_0 = \frac{1}{ik} \frac{\iint_{\Sigma} \Psi_0(\eta, \zeta) \frac{\partial \Psi_0^*(\eta, \zeta)}{\partial \eta} d\eta d\zeta}{\iint_{\Sigma} |\Psi_0(\eta, \zeta)|^2 d\eta d\zeta}. \quad (12)$$

Аналогичную формулу можно написать и для β_0 . Формуле (12) удобнее придать несколько другой вид. Интегрируя по частям и учитывая, что $\Psi_0 = 0$ на границе Σ , получим

$$\alpha_0 = -\frac{1}{ik} \frac{\iint_{\Sigma} \frac{\partial \Psi_0(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \Psi_0^*(\eta, \zeta) d\eta d\zeta}{\iint_{\Sigma} |\Psi_0(\eta, \zeta)|^2 d\eta d\zeta}. \quad (12a)$$

Взяв полусумму этих выражений, имеем

$$\alpha_0 = \frac{1}{k} \frac{\iint_{\Sigma} \frac{1}{2i} \left[\Psi_0(\eta, \zeta) \frac{\partial \Psi_0^*(\eta, \zeta)}{\partial \eta} - \Psi_0^*(\eta, \zeta) \frac{\partial \Psi_0(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \right] d\eta d\zeta}{\iint_{\Sigma} |\Psi_0(\eta, \zeta)|^2 d\eta d\zeta} = \frac{1}{k} \frac{\iint_{\Sigma} \operatorname{Im} \left[\Psi_0(\eta, \zeta) \frac{\partial \Psi_0^*(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \right] d\eta d\zeta}{\iint_{\Sigma} |\Psi_0(\eta, \zeta)|^2 d\eta d\zeta}. \quad (13)$$

Подставим теперь выражение $\Psi_0 = A_0 e^{2\lambda + iS_1}$:

$$\alpha_0 = \frac{1}{k} \frac{\iint_{\Sigma} e^{2\lambda(\eta, \zeta)} \frac{\partial S_1(\eta, \zeta)}{\partial \eta} d\eta d\zeta}{\iint_{\Sigma} e^{2\lambda(\eta, \zeta)} d\eta d\zeta}. \quad (14)$$

Из этого выражения следует, что основную роль в (14) играют флуктуации фазы: в случае $S_1 = \text{const}$ $\alpha_0 = 0$; амплитудные же флуктуации играют роль поправки второго порядка. Поэтому в первом приближении ими можно пренебречь, т. е. положить $\lambda = 0$. В этом случае

$$\alpha_0 = -\frac{1}{k} \frac{1}{\Sigma} \iint_{\Sigma} \frac{\partial S_1(\eta, \zeta)}{\partial \eta} d\eta d\zeta. \quad (15)$$

Найдем теперь средний квадрат α_0^2 флуктуаций α_0 :

$$\alpha_0^2 = \frac{1}{k^2 \Sigma^2} \iiint_{\Sigma} \left\langle \frac{\partial S_1(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial S_1(\eta', \zeta')}{\partial \eta'} \right\rangle d\eta d\zeta d\eta' d\zeta'. \quad (16)$$

Преобразуем выражение под знаком интеграла:

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial S_1(\eta, \zeta)}{\partial \eta} \frac{\partial S_1(\eta', \zeta')}{\partial \eta'} \right\rangle &= \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \eta'} \langle S_1(\eta, \zeta) S_1(\eta', \zeta') \rangle = \\ &= \frac{\partial^2}{\partial \eta \partial \eta'} B_S(\eta - \eta', \zeta - \zeta') = -\frac{\partial}{\partial \eta^2} B_S(\eta - \eta', \zeta - \zeta') = \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} D_S(\eta - \eta', \zeta - \zeta'). \end{aligned}$$

Снова вводя функцию

$$F(\eta, \zeta) = \begin{cases} 1 & \text{внутри } \Sigma, \\ 0 & \text{вне } \Sigma, \end{cases}$$

получим

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^2 &= \frac{1}{2k^2\Sigma^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} F(\eta, \zeta) F(\eta', \zeta') \frac{\partial^2 D_S(\eta - \eta', \zeta - \zeta')}{\partial \eta^2} d\eta d\zeta d\eta' d\zeta' = \\ &= \frac{1}{2k^2\Sigma^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^2 D_S(\eta, \zeta)}{\partial \eta^2} \cdot K(\eta, \zeta) d\eta d\zeta, \end{aligned} \quad (17)$$

где снова проведено преобразование, аналогичное переходу от (4.53) к (5.53).

Учтем теперь изотропность флуктуаций. В этом случае

$$\begin{aligned} D_S(\eta, \zeta) &= D_S(\sqrt{\eta^2 + \zeta^2}) = D_S(\rho), \\ \frac{\partial^2 D_S(\rho)}{\partial \eta^2} &= \frac{\eta^2}{\rho^2} D_S''(\rho) + \frac{\zeta^2}{\rho^2} \frac{D_S'(\rho)}{\rho} \end{aligned} \quad (18)$$

и рассмотрим случай круглой диафрагмы радиуса R . Введем в (17) полярные координаты $\eta = \rho \cos \varphi$, $\zeta = \rho \sin \varphi$ и подставим выражение (7.53) для K :

$$\begin{aligned} \sigma_{\alpha}^2 &= \frac{1}{2k^2\pi^2 R^4} \int_0^{2R} \rho d\rho \int_0^{2\pi} \rho d\varphi \left[\cos^2 \varphi D_S''(\rho) + \sin^2 \varphi \frac{D_S'(\rho)}{\rho} \right] \times \\ &\quad \times 2R^2 \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right]^{-2} \\ &= \frac{1}{\pi k^2 R^2} \int_0^{2R} \left[D_S''(\rho) + \frac{D_S'(\rho)}{\rho} \right] \left[\arccos\left(\frac{\rho}{2R}\right) - \frac{\rho}{2R} \sqrt{1 - \frac{\rho^2}{4R^2}} \right]^{-2} \rho^3 d\rho. \end{aligned} \quad (19)$$

Подставим в это выражение конкретный вид структурной функции $D_S(\rho)$. При этом следует различать два случая. Если $2R \ll \ll \sqrt{\lambda L}$, то

$$D_S(\rho) = \frac{1}{2} \cdot 0,73 C_e^2 L \rho^5, \quad (\rho \ll \sqrt{\lambda L}) \quad (20)$$

(небольшим квадратичным участком функции $D_S(\rho)$ при $\rho \ll \lambda_0$ можно пренебречь, так как интеграл (19) при $D_S(\rho)$, даваемой формулой (20), сходится в нуле). В случае же, если $2R \gg \sqrt{\lambda L}$, в большей части области интегрирования

$$D_S(\rho) = 0,73 C_e^2 k^2 L \rho^{5/2} \quad (\rho \gg \sqrt{\lambda L}), \quad (21)$$

и следует пользоваться этим выражением. Проведем расчет, подставив (20) в (19). (Для случая $\sqrt{\lambda L} \ll 2R$ в окончательном

результате достаточно будет удвоить численный коэффициент.)

Вводя новую переменную $x = \frac{\rho}{2R}$, получим

$$\sigma_x^2 = \frac{0,73}{2} C_e^2 L (2R)^{-1/2} \frac{100}{9\pi} \int_0^1 x^{3/2} [\arccos x - x \sqrt{1-x^2}] dx. \quad (22)$$

Интеграл I в правой части (22) легко вычисляется. Второе его слагаемое подстановкой $x^2 = t$ приводится к B -функции Эйлера, первое слагаемое приводится к ней же после интегрирования по частям.

В результате

$$I = \frac{9\sqrt{\pi}}{55} \frac{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{11}{6}\right)}$$

и выражение для σ_x^2 принимает вид

$$\sigma_x^2 = 0,97 \frac{0,73}{2} C_e^2 L (2R)^{-1/2} \quad (\lambda_0 \ll 2R \ll \sqrt{\lambda L}). \quad (23)$$

Оно отличается от значения, даваемого формулой (1) при $b = 2R$ лишь численным коэффициентом 0,97. В случае $2R \gg \sqrt{\lambda L}$ имеем формулу

$$\sigma_x^2 = 0,71 C_e^2 L (2R)^{-1/2} \quad (2R \gg \sqrt{\lambda L}). \quad (23a)$$

Кратко остановимся и на второй стороне этого вопроса — о качестве изображения. Формулы (23) дают средний квадрат флуктуаций центра тяжести изображения. В то же время внутренняя структура движущегося изображения также флуктуирует. Соответствующий расчет можно произвести, если рассмотреть среднее значение интенсивности в системе координат, движущейся вместе с центром тяжести (формула (15)). Мы не будем приводить этот расчет ввиду его чрезвычайной громоздкости и укажем лишь, что после перехода в движущуюся систему координат исключается влияние крупномасштабных неоднородностей и внутренняя структура движущегося изображения определяется мелкомасштабными флуктуациями. Угловой размер движущегося пятна определяется средним квадратом флуктуаций угла прихода

$$\left. \frac{D_S(\rho)}{k^2 \rho^2} \right|_{\rho=0}$$

(эта величина была вычислена в предыдущей главе). Отметим, что расчеты структуры поля за линзой содержатся также в работах [113, 119—123].

Б. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫЕ ДАННЫЕ ПО РАСПРОСТРАНЕНИЮ СВЕТА, ЗВУКА И РАДИОВОЛН В ТРОПОСФЕРЕ

§ 56. Распространение света в приземном слое атмосферы

Эксперименты в приземном слое атмосферы весьма привлекательны тем, что в них, помимо измерений величины мерцания источника света, можно одновременно производить измерения флуктуаций показателя преломления (т. е. определить величину C_e) и проводить измерения при различных и точно известных значениях L . Таким образом, наземные опыты могут дать экспериментальный материал, который удобно сравнивать с теорией явления [124—127, 170].

Работы [124—126, 170] проводились на Цимлянской научной станции Института физики атмосферы АН СССР, расположенной на ровном участке степи. Рельеф местности обеспечивал однородность турбулентности вдоль всего пути распространения луча (свет распространялся в горизонтальном направлении на приблизительно одинаковой высоте над подстилающей поверхностью). Расстояние между источником и приемником света выбиралось равным 250, 500, 1000, 2000 м. На меньших, чем 250 м, расстояниях эффект мерцания становился сравнимым с собственными шумами аппаратуры и поэтому измерения здесь не проводились. Использовать большие, чем 2000 м, расстояния было затруднительно из-за неровностей рельефа. Средняя высота луча над поверхностью земли составляла приблизительно 2 м.

В работах [124—126] измерения производились ночью, когда флуктуации показателя преломления сравнительно невелики. В работе [170] измерения производились в дневное время в жаркие летние дни с очень интенсивными флуктуациями показателя преломления.

Остановимся сначала на результатах, полученных в [124—126].

Здесь источником света служила 30-ваттная лампа накаливания. Свет от нее при помощи светосильного объектива фокусировался на диафрагму диаметром 0,5 мм. За диафрагмой помещался диск obtюратора, имевший 150 щелей и вращавшийся со скоростью 100 об/сек. Диафрагма находилась в фокусе выходного объектива (фокусное расстояние 25 см, диаметр 10 см), из которого выходил слаборасходящийся пучок модулированного с частотой 15 000 гц света. Модуляция света с последующим резонансным усилением сигнала на несущей частоте позволяла избавиться от посторонних немодулированных источников света, а

также упростила приемную аппаратуру (исчезла необходимость применять усилители постоянного тока).

Приемник света (рис. 53) состоял из двух фотоумножителей ФЭУ-19, свет на которые попадал через две диафрагмы (g_1 и g_2),

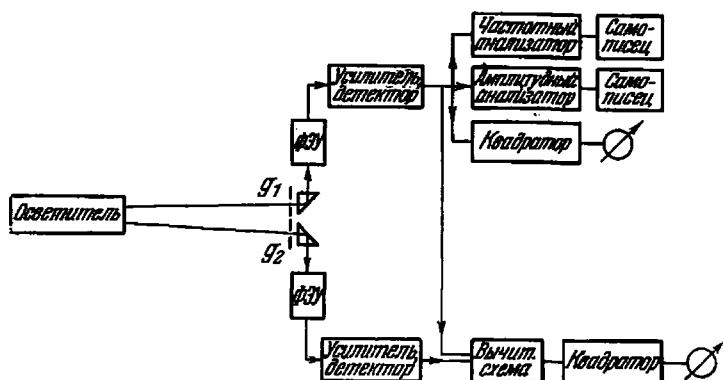


Рис. 53. Схема эксперимента по исследованию мерцания наземного источника света.

расположенные в плоскости, перпендикулярной лучу, и системы призм. Расстояние ρ между диафрагмами могло меняться в пределах от 0,5 до 50 см. Диаметр приемных диафрагм был равен 2 мм, что полностью устраняло эффект «усреднения объектива».

Переменные составляющие напряжения на выходах ФЭУ, амплитуды которых пропорциональны $I(M_1)$ и $I(M_2)$ ($I(M)$ — мгновенное значение светового потока через диафрагму, помещенную в точке M), усиливаются резонансными усилителями с полосой пропускания порядка 2000 гц, а затем детектируются. На выходе детекторов образуются напряжения V_1 и V_2 , пропорциональные $I(M_1)$ и $I(M_2)$. В усилителях имеется специальная следящая система, обеспечивающая выполнение соотношения $\bar{V}_1 = \bar{V}_2$ (усреднение с постоянной времени 100 сек). После отделения постоянных составляющих образуются напряжения $V'_1 = V_1 - \bar{V}_1$ и $V'_2 = V_2 - \bar{V}_2$, пропорциональные флуктуациям светового потока $I'(M_1) = I(M_1) - \bar{I}(M_1)$ и $I'(M_2) = I(M_2) - \bar{I}(M_2)$. Напряжения V'_1 и V'_2 подвергались автоматическому статистическому анализу при помощи специального комплекса аппаратуры (см. [128]).

Измерялись (в одинаковых единицах): распределение вероятностей флуктуаций $I'(M_1)$; средний квадрат флуктуаций

$\langle I'^2(M_1) \rangle$; среднее значение $\langle I(M_2) \rangle$; корреляционная функция $\langle I'(M_1) \cdot I'(M_2) \rangle = B_I(M_1, M_2)$; частотный спектр флуктуаций $I'(M_1)$ в диапазоне частот от 0,05 до 1000 гц.

Одновременно с изменениями мерцания наземного источника света на трассе производились метеорологические измерения, позволявшие рассчитывать величину C_ϵ^2 . Измерялись профили температуры в слое от 0,5 до 12 м, профили скорости ветра в тех же пределах, а также направление ветра.

На основе этих измерений можно было определить параметры турбулентности ϵ , K , T_ϵ .

Поскольку эксперимент производился над очень ровным участком степи и турбулентный режим над различными участками трассы был одинаков, метеорологические измерения были организованы лишь в одном пункте.

Приведем основные результаты измерений.

а. Функция распределения вероятностей флуктуаций интенсивности света. Из теории явления следует, что логарифм амплитуды световой волны выражается через флуктуации показателя преломления на пути распространения при помощи интеграла типа

$$\ln \frac{A}{A_0} = \iiint F(\mathbf{r}') n'(\mathbf{r}') d^3r'.$$

Всю область интегрирования D в этом интеграле можно разбить на большое число областей D_i , с линейными размерами порядка внешнего масштаба турбулентности L_0 , который в условиях эксперимента определялся высотой луча над землей.

Флуктуации $n'(\mathbf{r})$ в таких областях не коррелированы между собой. Поэтому в силу центральной предельной теоремы величина $\ln(A/A_0)$ должна быть распределена по нормальному закону. Так как $\ln(I/I_0) = 2 \ln(A/A_0)$, то и величина $\ln(I/I_0)$ должна быть распределена нормально, а величина I — логарифмически нормально. Эксперимент хорошо подтверждает этот вывод. На рис. 54 приведены эмпирические законы распределения вероятностей флуктуаций I . По оси ординат отложена величина $P(I < I_0)$ в вероятностном масштабе (т. е. в линейном масштабе откладывается величина $\Phi^{-1}(P(I < I_0))$, где $\Phi^{-1}(x)$ — функция, обратная интегралу вероятности

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt.$$

По оси абсцисс отложено I_0 в логарифмическом масштабе. В этих координатах логарифмически нормальный закон распре-

ления имеет вид прямой линии. Всего было обработано около ста эмпирических функций распределения $F(I)$. Все они хорошо согласуются с гипотезой о нормальном распределении величины $\ln I$.

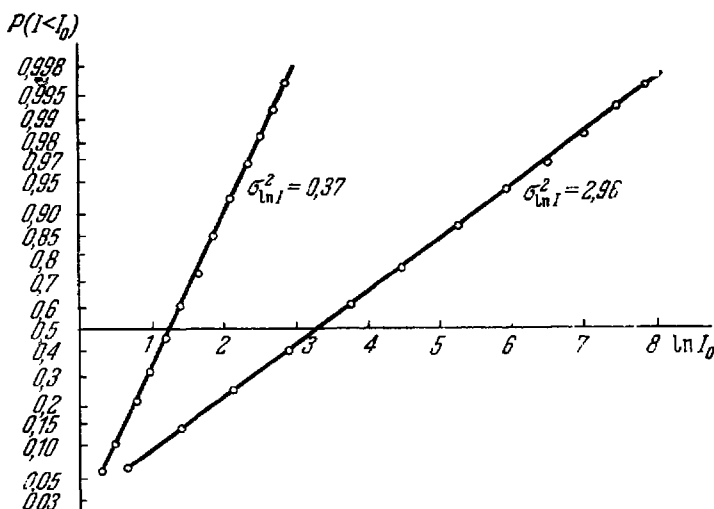


Рис. 54. Примеры эмпирических законов распределения вероятностей логарифма интенсивности света, распространяющегося в приземном слое атмосферы.

Закон распределения, которому соответствует $\sigma_{\ln I}^2 = 2,96$, взят из измерений, проведенных в дневное время [170].

Используя логарифмически нормальный закон распределения для I , можно связать измеряемые в эксперименте величины $\langle I \rangle$ и $\sigma_I^2 = \langle [I - \langle I \rangle]^2 \rangle$ и входящую в теорию величину

$$\sigma^2 = \langle [\ln I - \langle \ln I \rangle]^2 \rangle = 4\sigma_x^2 = \ln \left[1 + \frac{\sigma_I^2}{\langle I \rangle^2} \right].$$

Эта формула использовалась при дальнейшей обработке экспериментальных данных.

б. *Корреляционная функция флуктуаций интенсивности света в плоскости, перпендикулярной лучу.* Как уже отмечалось, при выполнении условия $\sqrt{\lambda L} \gg \lambda_0$ (для света это условие в приземном слое атмосферы, где λ_0 имеет порядок одного-двух миллиметров, выполняется уже при L порядка нескольких десятков

метров) радиус корреляции флуктуаций интенсивности света имеет порядок $\sqrt{\lambda L}$, а корреляционная функция флуктуаций интенсивности зависит от аргумента $\rho/\sqrt{\lambda L}$.

В приводившихся экспериментах непосредственно проверялась эта гипотеза подобия. Измерения коэффициента корреляции R делались при различных значениях $\sqrt{\lambda L}$, соответствовавших $L = 2000, 1000$ и 500 м. Однако расстояния ρ между диафрагмами устанавливались таким образом, что величина $\rho/\sqrt{\lambda L}$ всегда принимала одинаковые значения 0,25; 0,5; 2; 4 и 8.

Измеренные R имели довольно большой разброс, обусловленный недостаточной точностью измерений. Однако многочисленность измерений R значительно уменьшила ошибку, так что средние значения R , полученные при одинаковом $\rho/\sqrt{\lambda L}$ и при различных $\sqrt{\lambda L}$, очень хорошо согласуются друг с другом. В табл. 2

Т а б л и ц а 2

$\frac{\rho}{\sqrt{\lambda L}}$	$L = 2000$ м $\sqrt{\lambda L} = 3,2$ см		$L = 1000$ м $\sqrt{\lambda L} = 2,2$ см		$L = 500$ м $\sqrt{\lambda L} = 1,6$ см		Средние для всех		
	R	n	R	n	R	n	R	n	5%-ные доверит. пределы
0,25	0,58	8	0,46	15	—	—	0,50	23	0,05
0,5	0,27	9	0,31	19	0,27	12	0,29	40	0,05
1,0	0,09	11	0,10	18	0,16	15	0,12	43	0,06
2	-0,05	7	-0,05	15	-0,07	14	-0,055	36	0,08
4	-0,08	6	-0,09	13	-0,03	14	-0,062	33	0,08
8	-0,08	7	-0,03	14	-0,13	9	-0,072	30	0,06

приведены величины R , полученные при различных значениях L , а также средние для всех L данные, n — количество измерений.

Данные табл. 2 графически представлены на рис. 55. Различными знаками отмечены значения R , полученные при разных L . Как видно из графика, различие в значениях R , полученных при разных $\sqrt{\lambda L}$, укладывается в пределы точности измерений (вертикальными линиями на графике изображены 5%-ные доверительные пределы).

Полученные результаты достаточно убедительно подтверждают теоретический вывод о том, что корреляционная функция зависит от $\rho/\sqrt{\lambda L}$ и что радиус корреляции флуктуаций интенсивности имеет порядок $\sqrt{\lambda L}$.

Таким образом, все попытки определения «среднего размера неоднородностей» по радиусу корреляции флуктуаций интенсивности света обречены на неудачу, поскольку из этих наблюдений можно извлечь лишь величину $\sqrt{\lambda L}$.

в. Частотный спектр флуктуаций интенсивности. Частотный спектр флуктуаций светового потока измерялся при помощи

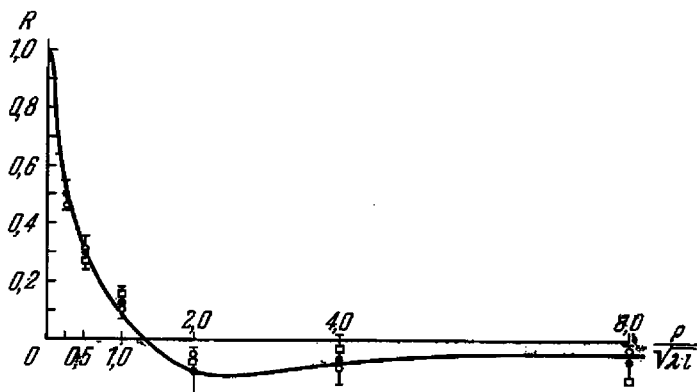


Рис. 55. Эмпирическая корреляционная функция флуктуаций интенсивности света.

частотного анализатора, имевшего 30 фильтров, с полосой пропускания в 0,5 октавы каждый (отношение верхней границы полосы пропускания фильтра к нижней равно $\sqrt{2}$), расставленных через 0,5 октавы от 0,05 до 1160 гц.

Было обработано 80 спектров мерцания, полученных на расстояниях $L = 1000$ и 2000 м. На основании синхронных метеорологических измерений вычислялась перпендикулярная лучу компонента средней скорости ветра v_{\perp} . Измерения на каждом из расстояний были разбиты на три группы в зависимости от величины v_{\perp} : $1 < v_{\perp} < 2$ м/сек; $2 < v_{\perp} < 3$ м/сек; $3 < v_{\perp} < 4$ м/сек.

Для каждой группы были получены средние спектральные плотности флуктуаций $w(f)$ (усреднение производилось в логарифмическом масштабе).

Затем вычислялись «нормированные» спектральные плотности

$$\frac{w(f)}{\int_0^{\infty} w(f) df}.$$

На рис. 56 в логарифмическом масштабе приведены величины

$$u(f) = \frac{fw(f)}{\int_0^{\infty} w(f) df},$$

соответствующие различным скоростям ветра v_{\perp} , которые являются средними для данной группы измерений.

Из графика видно, что с увеличением средней скорости ветра кривые $u(f)$ сдвигаются в сторону высоких частот. Можно найти частоты f_m , соответствующие максимуму кривой $u(f)$ (f_m определялось как полусумма значений частот, при которых $u(f) = \frac{1}{2} [u(f)]_{\max}$). В табл. 3 приведены значения средней скорости ветра v_{\perp} для групп величины f_m , а также $f_m \sqrt{\lambda L} / v_{\perp}$.

Таблица 3

	$L = 1000 \text{ м}$			$L = 2000 \text{ м}$		
	$v_{\perp}, \text{ м/сек}$	1,46	2,18	3,46	1,61	2,59
$f_m, \text{ гц}$	20	25,6	45,7	18,1	25,6	39,8
$\frac{f_m \sqrt{\lambda L}}{v_{\perp}}$	0,31	0,26	0,30	0,35	0,31	0,36

Величина $f_m \sqrt{\lambda L} / v_{\perp}$ приблизительно постоянна, ее среднее значение равно 0,32. Таким образом, частоты f_m связаны с v_{\perp} и $\sqrt{\lambda L}$ соотношением

$$f_m = 0,32 \frac{v_{\perp}}{\sqrt{\lambda L}}. \quad (1)$$

Отметим, что расчет, основывающийся на гипотезе «замороженной» турбулентности, приводит к соотношению $f_m = 0,55 \frac{v_{\perp}}{\sqrt{\lambda L}}$, отличающемуся от (1) численным коэффициентом.

Однако теоретическое соотношение между пространственным масштабом корреляции R_0 ($B_A(R_0) = 0$) и f_m , которое имеет вид

$$R_0 = 0,44 \frac{v_{\perp}}{f_m},$$

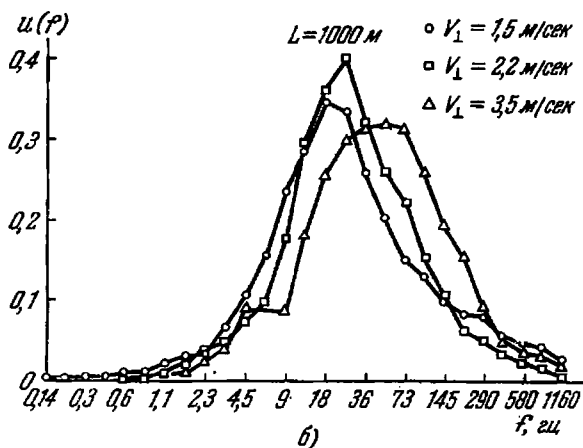
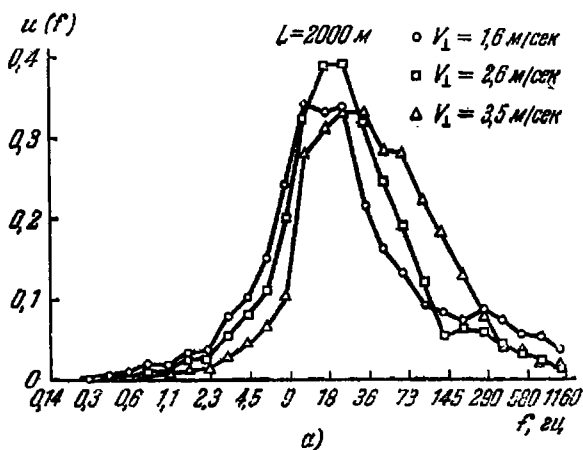


Рис. 56. Эмпирический нормированный частотный спектр флуктуаций интенсивности света при различных скоростях ветра.

По оси ординат отложена величина $u = fw(f)/\langle X^2 \rangle$. По оси абсцисс — частота f в логарифмическом масштабе. В этих координатах площадь под каждой из кривых равна единице.

хорошо выполняется, так как, согласно экспериментальным данным, $R_0 = 1,5 \sqrt{\lambda L}$, что приводит к формуле $R_0 = 0,48 \frac{v_{\perp}}{f_m}$.

Все частотные спектры, изображенные на рис. 56, изображены на рис. 57 в виде функций от аргумента $f \sqrt{\lambda L}/v_{\perp}$. Как видно из графика, преобразованные таким образом спектры весьма

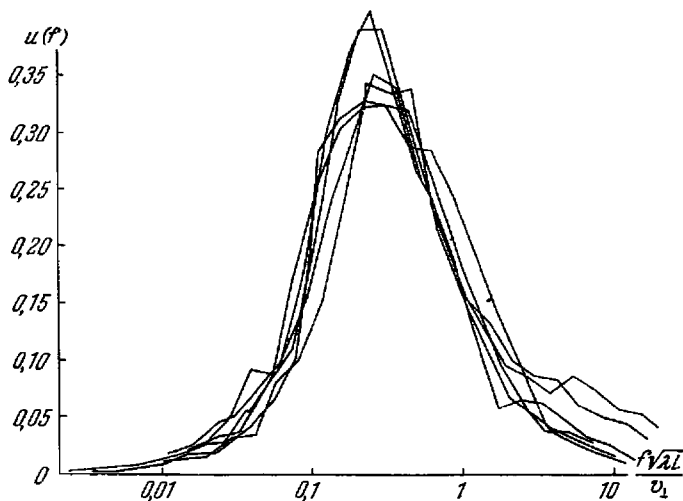


Рис. 57. Эмпирические частотные спектры флуктуаций интенсивности света, построенные в зависимости от безразмерной частоты $\frac{f \sqrt{\lambda L}}{v_{\perp}}$.

По оси ординат отложена величина $u(f) = \langle w(f) \rangle^{1/2}$.

незначительно отличаются друг от друга; это подтверждает вывод о том, что функция $u(f)$ зависит лишь от аргумента $f \sqrt{\lambda L}/v_{\perp}$

$$\frac{\langle w(f) \rangle}{\int_0^{\infty} \langle w(f) \rangle df} = u \left(\frac{f \sqrt{\lambda L}}{v_{\perp}} \right).$$

Функция, стоящая в правой части этого равенства, выше (стр. 359) была рассчитана теоретически на основании гипотезы «замороженной» турбулентности.

На рис. 58 приведено сопоставление теоретической кривой с экспериментальными данными, полученными усреднением графиков рис. 57. Как видно из рисунка, теоретическая кривая «уже»

экспериментальной; это, по-видимому, связано с тем, что при расчете предполагалось постоянство скорости ветра по всей трассе.

Остановимся теперь на важных результатах, полученных в работе М. Е. Грачевой и А. С. Гурвича [170]. В этой работе проверялась полученная выше формула $\langle \chi^2 \rangle = 0,077 C_k^2 k^{7/6} L'' \equiv \sigma_1^2(L)$ для среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды.

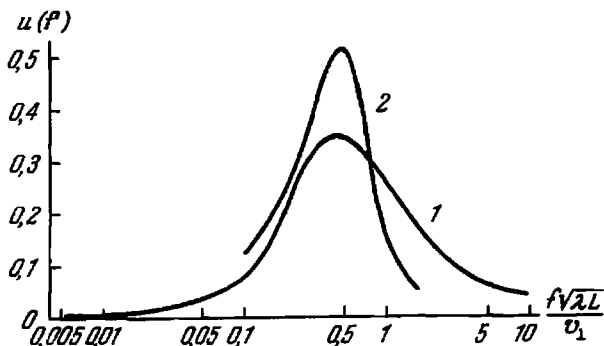


Рис. 58. Сопоставление эмпирического (кривая 1) и теоретического (кривая 2) частотных спектров флуктуаций интенсивности света $u(f) = fw(f) / \langle \chi^2 \rangle$.

При сопоставлении результатов теории и эксперимента необходимо учитывать, что источник света фактически излучает не плоскую волну, а слаборасходящийся пучок плоских волн. Действительно, каждая точка светящегося тела в фокальной плоскости объектива осветителя дает плоскую волну, распространяющуюся под некоторым углом к оптической оси. Различные точки светящегося тела являются некогерентными источниками света, так что на выходе объектива мы имеем набор некогерентных плоских волн, распространяющихся внутри некоторого телесного угла. Поэтому на приемник света одновременно приходят некогерентные волны с несколько различных направлений, подобно свету от планеты с конечными угловыми размерами. Выше было рассчитано ослабление мерцания, вызванное конечностью углового размера источника света. Этот расчет экспериментально проверялся в работе [171], причем было обнаружено хорошее согласие результатов измерений с теорией. В работе [170] при сопоставлении результатов эксперимента с теорией учитывалось усредняющее действие источника света и вносились соответствующие поправки — результаты измерений пересчитывались на источник света с бесконечно малыми угловыми размерами.

Измерения производились в дневных условиях при сильной конвективной неустойчивости атмосферы, когда флуктуации показателя преломления особенно велики. Источником света служила 250-ваттная ртутная лампа сверхвысокого давления, питаемая мощным генератором с частотой 2500 *гц*. Так как лампа удваивает частоту, то из объектива осветителя, в фокусе которого была расположена лампа, выходил пучок света, модулированный с частотой 5000 *гц*. Источник света располагался на фоне зачерненного экрана для ослабления рассеянного света, попадающего в приемник от посторонних источников.

Расстояние между источником и приемником света менялось в пределах от 125 до 1750 *м*. При изменениях расстояния осветитель диафрагмировался так, чтобы величина γ/γ_0 , где $\gamma_0 = \sqrt{2\lambda/\pi L}$ — характерный угол, определяющий ослабление мерцания из-за усреднения по источнику, оставалась постоянной. Угловой размер источника γ в рассматриваемом эксперименте был равен его видимому угловому размеру D/L , так как ширина испускаемого пучка света пачного превосходила эту величину. Поэтому при изменениях расстояния сохранялось постоянным отношение диаметра диафрагмы D осветителя к радиусу первой зоны Френеля $\sqrt{\lambda L}$.

Приемник света представлял собой фотоумножитель ФЭУ-19, перед которым располагалась зачерненная внутри труба длиной около метра с помещенными внутри нее диафрагмами для уменьшения постороннего света. Диаметр диафрагм равнялся 2 *мм*, что было вполне достаточно для устранения эффекта усреднения по приемному отверстию. Сигнал с фотоумножителя усиливался усилителем с полосой пропускаемых частот от 4500 до 5500 *гц*, детектировался линейным детектором, а затем поступал в специальные блоки, измерявшие величины $\langle I \rangle$, $\langle |I - \langle I \rangle| \rangle$. Производились также записи сигнала с детектора на шлейфовый осциллограф, которые затем обрабатывались для получения законов распределения вероятностей флуктуаций интенсивности (пример такой записи приведен на рис. 59).

Одновременно с измерениями флуктуаций интенсивности света производились измерения вертикальных профилей скорости ветра и температуры, по которым затем рассчитывалась величина C^2 . Эти расчеты производились по формулам, приведенным в гл. 1 с учетом зависимости параметров турбулентных пульсаций от числа Ричардсона.

Так как в эксперименте измерялись величины $\langle |I - \langle I \rangle| \rangle$, $\langle I \rangle$, а для сравнения результатов теории и экспериментальных данных необходимо знать величину $\sigma^2 = \langle (\ln I - \langle \ln I \rangle)^2 \rangle$, то необходимо найти связь между ними. Для ее установления

достаточно знать закон распределения вероятностей величины I . Поэтому было предпринято специальное исследование закона распределения флуктуаций амплитуды. В области применимости первого приближения метода плавных возмущений этот закон распределения должен быть логарифмически нормальным, что

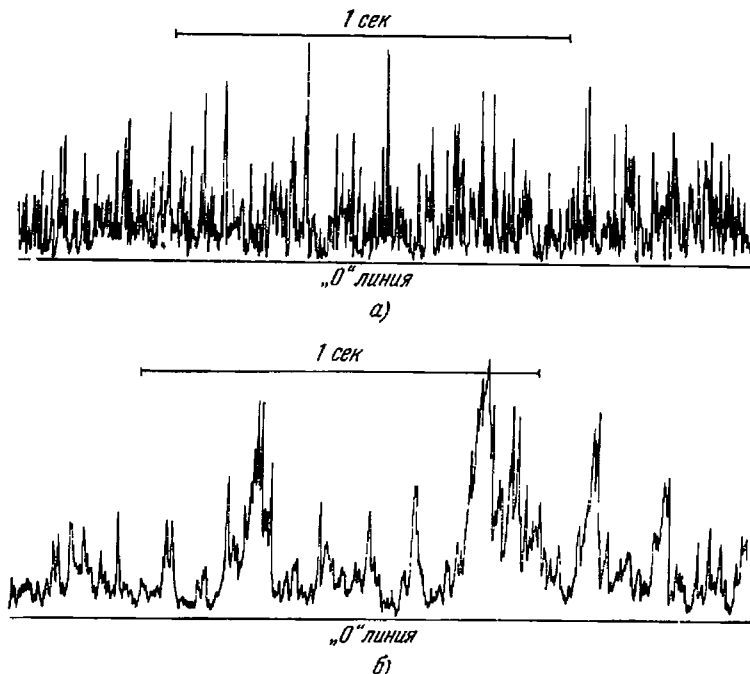


Рис. 59. Примеры осциллограмм сильных флуктуаций интенсивности света:
а — $\sigma_1 \approx 1$; б — $\sigma_1 \approx 5$.

Скорости ветра, во время которых получены записи, приблизительно совпадают [182].

и было подтверждено предыдущими измерениями. В описываемых экспериментах зачастую осуществлялись такие условия, при которых величина $\sigma_1^2 = 0,077k^{1/2}C_2^2L^{11/2}$ намного превышала единицу (ее максимальные значения доходили до 25). Оказалось, что и в этой области закон распределения очень близок к логарифмически нормальному*). Пример эмпирического закона распределения, относящийся к области сильных флуктуаций, приведен на рис. 54. Значение параметра σ_1^2 равно для этого примера 9.

*) Небольшие отступления от логарифмически нормального закона распределения иногда наблюдаются в областях маловероятных значений I (т.е. при очень больших и очень малых значениях I).

Основываясь на логарифмически нормальном законе распределения, можно по измеренным значениям $\langle I \rangle$, $\langle |I - \langle I \rangle| \rangle$ вычислить величину $\beta^2 = \langle [I - \langle I \rangle]^2 \rangle / \langle I \rangle^2$ (мы не приводим соответствующую формулу ввиду ее громоздкости). После нахождения величины β^2 , относящейся к мерцанию источника света с конечным угловым размером, по кривой, изображенной на рис. 52, производилось приведение результатов измерений к источнику с бесконечно малыми угловыми размерами. После этого по формуле $\sigma_I^2 = \exp(\beta^2) - 1$ рассчитывалась величина флуктуаций логарифма интенсивности

$$\sigma_I^2 = \langle [\ln I - \langle \ln I \rangle]^2 \rangle = 4 \langle [\ln A - \langle \ln A \rangle]^2 \rangle.$$

Полученная таким образом зависимость экспериментально измеренной величины $\sigma_I = 2\sigma_x$ от параметра $2\sigma_1$, соответствующего расчету по первому приближению метода плавных возмущений, приведена на рис. 60. Такая же зависимость была получена впоследствии теми же авторами при помощи прибора, измерявшего не величины $\langle I \rangle$, $\langle |I - \langle I \rangle| \rangle$, а непосредственно средний квадрат флуктуаций интенсивности света $\langle [I - \langle I \rangle]^2 \rangle$ и $\langle I \rangle$.

На рис. 60 можно четко разделить две области: область слабых флуктуаций, соответствующую значениям $\sigma_1 = 0,28 C_2 k^{1/4} L^{1/2} < 0,8$, и область сильных флуктуаций, соответствующую значениям этого параметра, превышающим 0,8. В первой из этих областей наблюдается хорошее согласие теоретических значений, полученных при помощи первого приближения метода плавных возмущений, с экспериментальными результатами. В области же сильных флуктуаций наблюдается «насыщение» экспериментальных значений среднего квадрата флуктуаций логарифма интенсивности. Таким образом, на основании результатов описываемой работы можно сделать вывод, что первое приближение метода плавных возмущений справедливо для амплитудных флуктуаций до значений $\sigma_1^2 = 0,077 C_2^2 k^{1/2} L^{1/2} < 0,64$.

Что касается области сильных флуктуаций, то она рассматривалась выше, в § 51. Произведенный там расчет не позволил найти численное значение уровня «насыщения», но объяснил полученные в экспериментах М. Е. Грачевой и А. С. Гурвича результаты. Если принять для входящего в теорию численного параметра σ_∞^2 экспериментальное значение 0,64 и нанести теоретическую кривую на график рис. 60 (сплошная кривая на этом рисунке), то мы получаем хорошее совпадение результатов теории и эксперимента при всех исследованных значениях параметра $\sigma_1^2 < 25$.

Ниже (см. гл. 5, § 66) приведен еще один вариант теории сильных флуктуаций, дающий объяснение экспериментально наблюдаемой зависимости $\sigma_x = f(\sigma_1)$. Полученная в § 66 зависимость

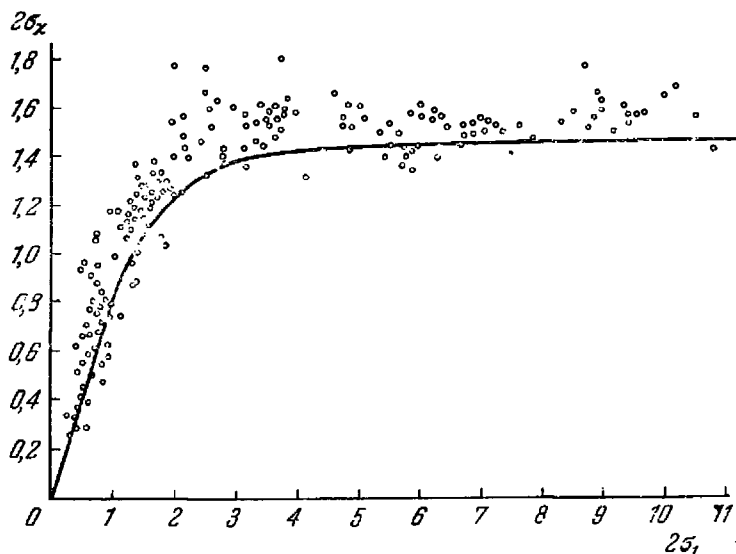


Рис. 60. Сопоставление экспериментально полученных значений среднего квадрата флуктуаций логарифма интенсивности света ($2\sigma_x$) с соответствующей величиной, рассчитанной в первом приближении метода плавных возмущений ($2\sigma_1$).

Сплошная кривая проведена на основании расчета, произведенного в § 51 (см. также рис. 96 на стр. 516).

$\sigma_x = f(\sigma_1)$ может быть с большой точностью аппроксимирована формулой

$$\sigma_x^2 = 1 - \frac{1}{[1 + 6\sigma_1^2]^{1/2}}$$

и хорошо согласуется с приведенными на рис. 60 экспериментальными данными (см. рис. 96 на стр. 516).

Заметим также, что из теории, развитой как в § 51, так и в § 66, следует, что закон распределения для флуктуаций интенсивности в области сильных флуктуаций должен быть близок к логарифмически нормальному.

г. Измерения флуктуаций угла прихода света. В работе [129] производились измерения флуктуаций угла прихода световой волны («дрожания» изображения).

Для определения статистических характеристик «дрожания» — дисперсии и частотного спектра — была разработана схема измерений, изображенная на рис. 61. Источник света с диафрагмой, подбираемой так, чтобы его угловые размеры составляли всегда около $2''$, помещался на расстоянии L от телескопа. Объектив телескопа имел фокусное расстояние 80 см и диаметр 8 см. Между объективом телескопа и его фокусом на расстоянии 1 см от фокуса находилось зеркальце шлейфового гальванометра. Отраженный от зеркальца пучок света фокусировался при помощи второго объектива на вертикальной щели шириной в 30 мкм, что примерно в 2 раза меньше увеличенного вторым объективом изображения источника. За щелью помещался фотоумножитель. Фокусировка системы при изменении расстояния до источника света осуществлялась перемещением объектива телескопа.

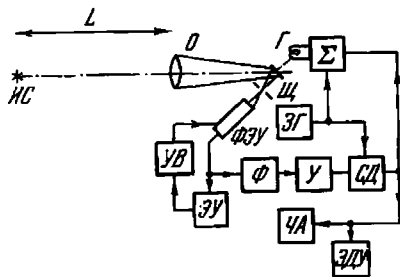


Рис. 61. Блок-схема экспериментальной установки для измерения флуктуаций угла прихода света.

ИС — источник света, О — объектив, Г — шлейфовый гальванометр, Щ — щель, ФЭУ — фотоумножитель, Ф — фильтр на частоту 5 кГц, У — усилитель, СД — синхронный детектор, Σ — суммирующий мост, ЭУ — электрометрический усилитель, УВ — управляемый высоковольтный выпрямитель, ЗГ — звуковой генератор, ЧА — частотный анализатор, ЭДУ — электродинамический умножитель.

Для измерения «дрожания» применялась следящая система, работающая на несущей частоте $f = 5$ кГц, которая позволяла исключить влияние «мерцания» (изменения интенсивности принимаемого света) на результаты измерения. Работа следящей системы происходит следующим образом. Напряжение несущей частоты со звукового генератора через суммирующее устройство (уравновешенный мост) подается на шлейф. Амплитуда колебаний изображения на щели была порядка 35—40 мкм. Колебания совершаются в горизонтальной плоскости перпендикулярно щели. Напряжение с нагрузки фотоумножителя подается на усилитель с полосой пропускания от 4800 до 5200 гц. Если среднее (за период $1/f$) положение изображения источника света находится на середине щели, то в сигнале на выходе фотоумножителя имеются составляющие с частотами $2f$, $4f$ и т. д. и отсутствует составляющая с частотой f . Амплитуда этой составляющей пропорциональна смещению среднего положения изображения от середины щели, а фаза совпадает с фазой колебания шлейфа или сдвинута на 180° в зависимости от того, в какую сторону от середины щели сдвинута изображение. Усилитель пропускает

только частоты, близкие к f . На выходе усилителя находится синхронный детектор, ток с которого через суммирующее устройство подается на шлейф. Фаза управляющего напряжения, подаваемого на синхронный детектор, подбирается так, чтобы в описанной следящей системе осуществлялась отрицательная обратная

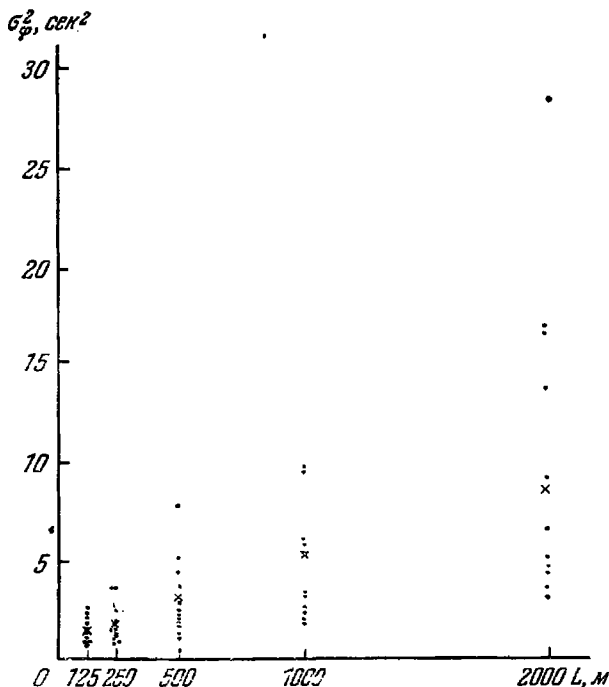


Рис. 62. Зависимость среднего квадрата флуктуаций угла прихода от расстояния.

Большой разброс экспериментальных значений вызван значительными вариациями метеорологических условий. Крестиками обозначены средние значения σ_{φ}^2 для каждого из расстояний.

связь и изменение угла прихода φ_0 волн компенсировалось бы поворотом зеркала шлейфа на соответствующий угол.

Таким образом, ток на выходе синхронного детектора пропорционален усредненному за период нескольких колебаний шлейфа значению угла прихода световой волны.

Одновременно с измерениями характеристик «дрожания» проводились измерения вертикальных профилей средней скорости ветра и средней температуры. Всего было проведено около 60

измерений дисперсий и частотных спектров на расстояниях 125, 250, 500, 1000 и 2000 м. При каждом измерении в качестве величины дисперсий и спектральных плотностей брались их средние значения за 10 мин.

На графике рис. 62 приведены значения σ_{Φ}^2 , измеренные при различных расстояниях L и различных метеоусловиях. Этот рисунок дает представление о величинах σ_{Φ}^2 ; из него видно, что в среднем имеет место линейная зависимость σ_{Φ}^2 от L . Из этого же графика ясно, что шум прибора $\sigma_{ш}$, пересчитанный в угловые единицы, равен приблизительно 1". Линейная зависимость от расстояния хорошо согласуется с теоретической формулой

$$\sigma_{\Phi}^2 \sim d^{-1} LC_{\epsilon}^2.$$

Аналогичные измерения недавно были выполнены А. С. Гурвичем и М. А. Каллистратовой [184] в дневных условиях, когда величина C_{ϵ}^2 обычно больше, чем ночью. В этой работе для более детального сопоставления результатов измерений с теорией по данным о средних значениях скорости ветра и температуры вычислялось значение C_{ϵ}^2 по формулам, приведенным в гл. 1 (с учетом зависимости от числа Ричардсона). Сопоставление рассчитанных и измеренных значений σ_{Φ} приведено на рис. 63, где по оси абсцисс отложены теоретические значения $\sigma_{\Phi T}$, а по оси ординат — экспериментально определенные значения дисперсий «дрожания» $\sigma_{\Phi \text{ эксп}}$ с учетом шума. Прямая на рис. 63 означает полное совпадение. Из графика видно, что измеренные значения ложатся около этой прямой. Коэффициент регрессии величины $\sigma_{\Phi \text{ эксп}}$ на теоретическое среднеквадратичное значение $\sigma_{\Phi T}$ равен 0,98.

Как было установлено в разделе А, произведение

$$fw(f) = \frac{fF(f)}{\int_0^{\infty} F(f) df}$$

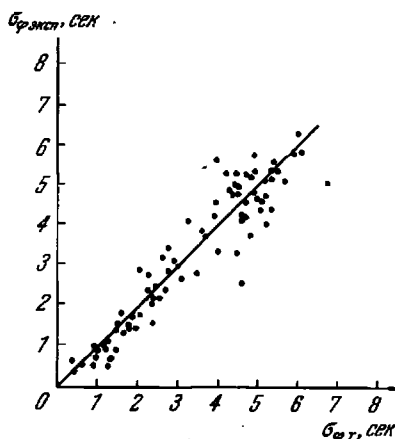


Рис. 63. Сопоставление экспериментально измеренных значений среднеквадратичной величины флуктуаций угла прихода света ($\sigma_{\Phi \text{ эксп}}$) с величиной $\sigma_{\Phi T}$, рассчитанной на основе измерений профилей средней температуры и скорости ветра.

$(F(f))$ — спектральная плотность мощности флуктуаций на частоте f является безразмерной функцией безразмерной частоты $f b/v_{\perp}$:

$$fw(f) = \text{const} \sin^2 \left(\frac{\pi f b}{v_{\perp}} \right) \left(\frac{f b}{v_{\perp}} \right)^{-1/2},$$

где v_{\perp} — нормальная к лучу компонента средней скорости ветра и b — диаметр объектива. Эта формула получена в предположении, что справедлив «закон 2/3» и что можно пользоваться гипотезой «замороженной турбулентности». На рис. 64 приведен спектр, полученный усреднением нормированных и приведенных к безразмерной частоте спектров $fw(f)$. Для сравнения с теорией указано асимптотическое поведение теоретической функции $fw(f)$ на низких частотах f при $\frac{\pi f b}{v_{\perp}} \ll 1$:

$$fw(f) \sim \left(\frac{f b}{v_{\perp}} \right)^{1/2},$$

и на высоких частотах при $\pi f b \gg v_{\perp}$:

$$fw(f) \sim \left(\frac{f b}{v_{\perp}} \right)^{-1/2}.$$

На графике отмечено значение безразмерной частоты $\frac{f b}{v_{\perp}} = 0,22$, соответствующее максимуму теоретического спектра.

Из графика видно, что экспериментально определенный спектр имеет тот же характер, что и теоретический. Максимум спектральной функции находится на частотах того же порядка, что и максимум теоретического спектра. Более быстрый по сравнению с теоретическим спад спектральной функции в области низких частот объясняется, по-видимому, тем, что в крупномасштабной области спектра турбулентности, ответственной за низкочастотный участок спектра «дрожания», «закон 2/3» выполняется недостаточно точно. На рис. 64 пунктиром нанесен также спектр флуктуаций угла прихода звуковых волн (см. ниже), форма которого довольно близка к спектру «дрожания» источника света.

В заключение сформулируем основные выводы, которые можно сделать на основе анализа проведенных экспериментов.

В области слабых флуктуаций при $\sigma_1^2 = = 0,077 C_i^2 k^{7/2} L^{11/6} < 0,6$

1. Флуктуации интенсивности света, вызванные турбулентностью атмосферы, распределены логарифмически нормально.

2. Зависимость

$$\langle [\ln A - \langle \ln A \rangle]^2 \rangle = 0,077 C_i^2 k^{7/2} L^{11/6}$$

подтверждается количественно вплоть до значений величины $0,077 C_2^2 k^{2/3} L^{11/3}$ порядка 0,6.

3. Непосредственные измерения подтверждают теоретический вывод о том, что корреляционная функция флуктуаций интенсивности света зависит от $\rho / \sqrt{\lambda L}$, а масштаб корреляции имеет порядок $\sqrt{\lambda L}$.

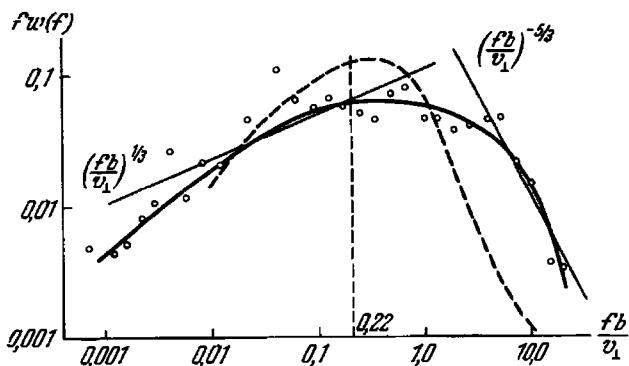


Рис. 64. Частотный спектр флуктуаций угла прихода света.

Прямые линии соответствуют теоретическим асимптотикам в области низких и высоких частот. Значение $fb/v_{\perp} = 0,22$, отмеченное вертикальной пунктирной линией, соответствует положению максимума теоретически рассчитанной функции $fW(f)$. Пунктиром нанесен экспериментальный спектр флуктуаций угла прихода звуковых волн.

4. Подтверждается, что частотный спектр флуктуаций интенсивности света зависит от $f\sqrt{\lambda L}/v_{\perp}$, и обнаруживается хорошее согласие временного и пространственного масштабов корреляции.

5. Средний квадрат флуктуаций угла прихода световых волн при распространении в турбулентной атмосфере пропорционален расстоянию, проходимому светом в турбулентной среде.

6. Экспериментальные данные о средних квадратах флуктуаций угла прихода находятся в хорошем согласии с расчетными значениями, полученными на основании измерений распределения скорости ветра и температуры с высотой в приземном слое атмосферы.

7. Вид частотного спектра флуктуаций угла прихода света находится в согласии с теоретическим, однако для объяснения ширины спектра необходимо учесть флуктуации скорости переноса неоднородностей.

В области сильных флуктуаций при $\sigma_1^2 > 2$

1. Закон распределения вероятностей флуктуаций интенсивности света близок к логарифмически нормальному.

2. Средний квадрат флуктуаций логарифма интенсивности света не зависит (или зависит очень слабо) от расстояния, пройденного в неоднородной среде, и от характеристики флуктуаций диэлектрической проницаемости C_ϵ^2 .

3. Величина $\langle [\ln I - \langle \ln I \rangle]^2 \rangle$ в области сильных флуктуаций равна приблизительно 2,5, чему соответствует

$$\frac{\langle [I - \langle I \rangle]^2 \rangle}{\langle I \rangle^2} = 3,5.$$

§ 57. Распространение звука в приземном слое атмосферы

Экспериментальные исследования распространения звуковых волн в турбулентной атмосфере выполнялись в работах В. А. Красильникова и К. М. Иванова-Шиц [130, 131], Б. А. Сучкова [132], Г. С. Голицына, А. С. Гурвича и автора [133].

В экспериментах Красильникова измерялись временная структурная функция флуктуаций фазы $\langle [S(t + \tau) - S(t)]^2 \rangle$ и средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды звуковой волны $\langle [\ln A - \langle \ln A \rangle]^2 \rangle$.

Остановимся сначала на флуктуациях фазы волны. В том случае, когда за время τ неоднородности в распределении скорости ветра и температуры не успевают заметно измениться, можно считать, что они лишь переносятся (без «эволюции») со средней скоростью ветра*). Если направление ветра перпендикулярно направлению распространения звука и скорость его v_\perp , то значение фазы $S(t + \tau)$ в точке M совпадает со значением фазы в момент t в точке, отстоящей от M на расстоянии $v_\perp \tau$. Таким образом,

$$\langle [S(t + \tau) - S(t)]^2 \rangle = D_S(\tau v_\perp).$$

Согласно соотношению (37.47) при $\lambda_0 \ll \rho$

$$D_S(\rho) \sim k^2 L C_n^2 \rho^{5/2}.$$

Таким образом, должно выполняться соотношение

$$\sigma_S = \sqrt{\langle [S(t + \tau) - S(t)]^2 \rangle} \sim C_n k L^{1/2} (v_\perp \tau)^{5/4},$$

*) «Условие замороженности» подробно обсуждалось в гл. 1, где приводились также экспериментальные данные по проверке выполнения этого условия в реальной атмосфере.

т. е. изменчивость фазы пропорциональна структурной постоянной C_n , частоте звука, корню из проходимого звуковой волной расстояния и интервалу времени в степени $5/6$.

На рис. 65 приведена полученная В. А. Красильниковым и К. М. Ивановым-Шиц [130] зависимость σ_S от расстояния L , а на рис. 66 зависимость σ_S от $v_{\perp} \tau$ (частота звука 3000 гц, расстояние $L = 22; 45$ и 67 м, $v_{\perp} = 5$ м/сек, $\tau = 0,04; 0,08$ и $0,2$ сек).

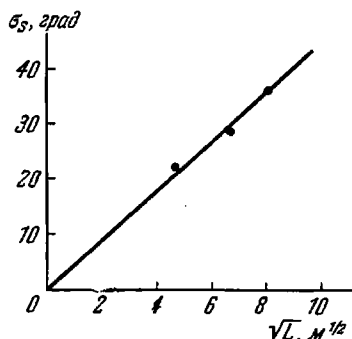


Рис. 65. Зависимость среднеквадратичного значения временной изменчивости фазы звука σ_S от длины трассы L .

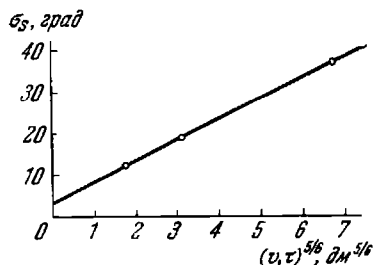


Рис. 66. Зависимость среднеквадратичного значения временной изменчивости фазы звука σ_S от $v_{\perp} \tau$.

По оси абсцисс отложена величина $(v_{\perp} \tau)^{5/6}$, по оси ординат — усредненные по различным значениям L величины σ_S .

Как видно из графиков, зависимость σ_S от L и $v_{\perp} \tau$ удовлетворительно согласуется с приведенной формулой. Эксперименты, проведенные с ультразвуком на частотах до 50 кгц, также приводят к удовлетворительному совпадению экспериментальных и теоретических результатов [131]. Таким образом, зависимость (37.47) находит экспериментальное подтверждение в диапазоне частот от одного до пятидесяти килогерц.

На рис. 67 приведена зависимость величины $\sigma_A = \sqrt{\left\langle \left[\ln \frac{A}{A_0} \right]^2 \right\rangle}$ от расстояния (все данные приведены к расстоянию 22 м). Зависимость σ_A от L удовлетворительно аппроксимируется формулой $\sigma_A = AL^{\alpha}$, где $\alpha \approx 0,8$. Заметим, что согласно формуле (31.47) следовало ожидать величины $\alpha \approx 0,92$ (в рассматриваемых экспериментах $\sqrt{\lambda L} \gg \lambda_0$). Опыты Красильникова

и Иванова-Шниц, таким образом, удовлетворительно согласуются с теоретической формулой (31.47).

На основании результатов измерений величин σ_S и σ_A можно произвести оценки входящей в формулу (31.47) и (37.47) величины C_n , характеризующей интенсивность флуктуаций скорости звука.

C_n , найденная по формуле

$$C_n = \frac{\sigma_S}{1,7kL^{1/2}(v_{\perp}\tau)^{1/2}}$$

со значениями $\sigma_S = 46^\circ = 0,8 \text{ рад}$, $k = 58 \text{ м}^{-1}$ ($f = 3 \text{ кгц}$), $L = 67 \text{ м}$, $v_{\perp} = 5 \text{ м/сек}$, $\tau = 0,2 \text{ сек}$, оказалась равной $0,0010 \text{ м}^{-1/2}$.

Эта же величина, определенная из соотношения

$$C_n = \frac{\sigma_A}{0,56k^{7/12}L^{11/12}}$$

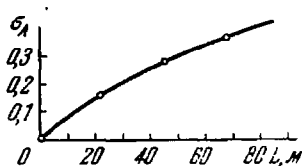


Рис. 67. Зависимость среднеквадратичной величины флуктуаций логарифма амплитуды звуковой волны от расстояния.

со значением $\sigma_A = 0,44$ и теми же значениями k и L , оказалась равной $0,0016 \text{ м}^{-1/2}$ (σ_A и σ_S взяты из работы [130]). Если учесть, что значения σ_S и σ_A получены в результате обработки записей флуктуаций фазы и амплитуды звука, имеющих различную длительность, то полученное совпадение величин C_n следует считать удовлетворительным.

В гл. 2 была получена формула, связывающая C_n для звуковых волн с величинами C_T^2 и C_v^2 определяющими флуктуации температуры и скорости ветра:

$$C_n^2 = \frac{C_T^2}{4\langle T \rangle^2} + \frac{C_v^2}{c_0^2},$$

где c_0 — средняя скорость звука. Воспользовавшись формулами (26.16) и (27.16), выражающими C_T^2 и C_v^2 через характеристики среднего профиля $\langle T(z) \rangle$, $\langle v(z) \rangle$, получим

$$C_n^2 = 2,3 \cdot 10^{-6} f_1(\text{Ri}) z^{1/3} \left(\frac{d\langle v(z) \rangle}{dz} \right)^2 + 3 \cdot 10^{-6} f_2(\text{Ri}) z^{1/3} \left(\frac{d\langle T(z) \rangle}{dz} \right)^2, \quad (1)$$

в которой использованы значения $\langle T \rangle = 290^\circ \text{ К}$, $c_0 = 340 \text{ м/сек}$, C_n^2 выражено в $\text{м}^{-1/2}$, а $\frac{dT}{dz}$ и $\frac{dv}{dz}$ выражены здесь в $^\circ\text{С}$ и в м/сек на метр соответственно. Функции $f_1(\text{Ri})$ и $f_2(\text{Ri})$ изображены на рис. 17, 18.

Значение $C_n = 0,0010 \text{ м}^{-1/2}$, полученное выше, соответствует разности скоростей Δv для высот $z_2 = 8 \text{ м}$ и $z_1 = 4 \text{ м}$, равной 1 м/сек , что представляет собой типичную величину. Таким образом, полученные выше формулы для средних квадратов флуктуаций амплитуды и фазы дают правильные результаты и по порядку величин.

Весьма подробные измерения флуктуаций амплитуды звуковой волны были произведены Б. А. Сучковым [132] в 1954 г. Измерения флуктуаций амплитуды звука сопровождалась одновременными измерениями профилей средней температуры и средней скорости ветра, что позволило рассчитать C_n , пользуясь формулой (1).

На рис. 68 представлена полученная Б. А. Сучковым зависимость

$$\sigma_A = \sqrt{\left\langle \left[\ln \left(\frac{A}{A_0} \right) \right]^2 \right\rangle}$$

от L (частота 76 кгц). Как видно из графика, экспериментальные результаты хорошо описываются теоретической формулой

$$\sigma_A^2 = 0,31 C_n^2 k^{7/6} L^{11/6}$$

(во всех опытах соблюдались условия $\sqrt{\lambda L} \gg \lambda_0$, $\sigma_A^2 < 1$).

Б. А. Сучковым было произведено 28 серий измерений зависимости $\sigma_A^2 = f(L)$ на частотах от 3 до 76 кгц . Экспериментальные данные аппроксимировались формулой $\sigma_A = AL^2$. Среднее для звуковых частот (18 серий) значение α оказалось равным 1,1, среднее значение α для ультразвуковых частот (30—76 кгц) — 0,95. Полученные значения α близки к теоретическому значению $\alpha = \frac{11}{12} = 0,92$.

Б. А. Сучков производил при помощи формулы типа (1) (без учета $f(Ri)$) расчет величины σ_A на основании измерений профилей температуры и скорости ветра.

На рис. 69 приведено сопоставление величин σ_A^2 , полученных в результате прямых измерений и на основании одновременных измерений профилей средней температуры и средней скорости ветра. Коэффициент корреляции между величинами $\lg \sigma_A$ и $\lg \sigma_{\text{мет}}$ равен 0,90 (на графике помещено 97 точек)*.

* Заметим, что все экспериментальные точки на рис. 69 лежат в области слабых флуктуаций.

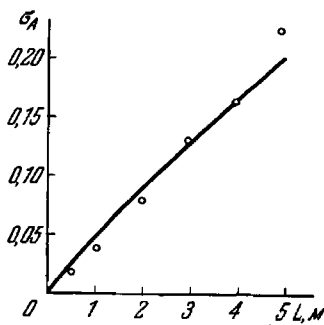


Рис. 68. Зависимость средне-квадратичной величины флуктуаций логарифма амплитуды ультразвуковой волны от расстояния.

Б. А. Сучков производил также измерения временной автокорреляционной функции флуктуации амплитуды звуковой волны. В том случае, когда направление ветра перпендикулярно направлению распространения звука и когда время корреляции

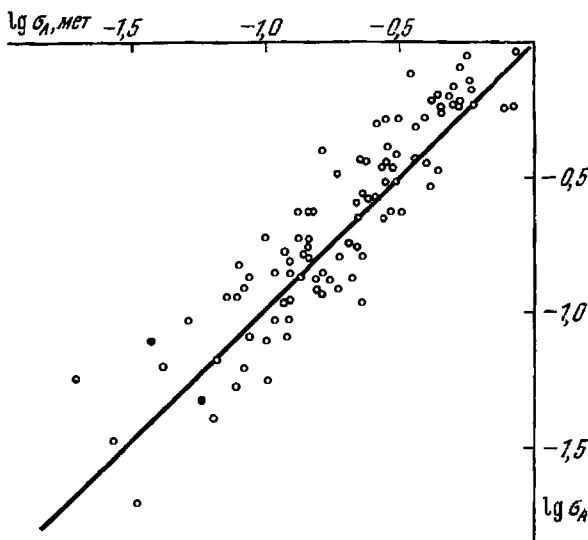


Рис. 69. Сооставление измеренных среднеквадратичных значений флуктуаций логарифма амплитуды (σ_A) со значениями этих величин, рассчитанными на основании измерений профилей скорости ветра и температуры ($\sigma_{мет}$).

Измерения производились в диапазоне частот от 3 до 76 кГц.

значительно меньше, чем z/v , приближенно выполняется соотношение

$$\left\langle \ln \frac{A(t+\tau)}{A_0} \cdot \ln \frac{A(t)}{A_0} \right\rangle = B_A(v_{\perp} \tau).$$

Функция $B_A(\rho)$ при $\sqrt{\lambda L} \gg \lambda_0$ была рассчитана выше (см. рис. 45, стр. 307). Масштаб корреляции флуктуаций амплитуды равен по порядку величине $\sqrt{\lambda L}$. Отсюда следует, что время корреляции флуктуаций амплитуды имеет порядок $\sqrt{\lambda L}/v_{\perp}$.

На рис. 70 изображены полученные Б. А. Сучковым корреляционные функции флуктуаций амплитуды, причем по оси абсцисс отложена величина $\tau v_{\perp}/\sqrt{\lambda L}$. Различные кривые соответствуют разным расстояниям между излучателем и приемником

(4; 8 и 16 м). Если величины

$$\left\langle \ln \frac{A}{A_0} \ln \frac{A'}{A'_0} \right\rangle = f(\tau)$$

нанести на график в натуральном масштабе, т. е. в виде функций от τ , то кривые, полученные для различных L , имеют различный

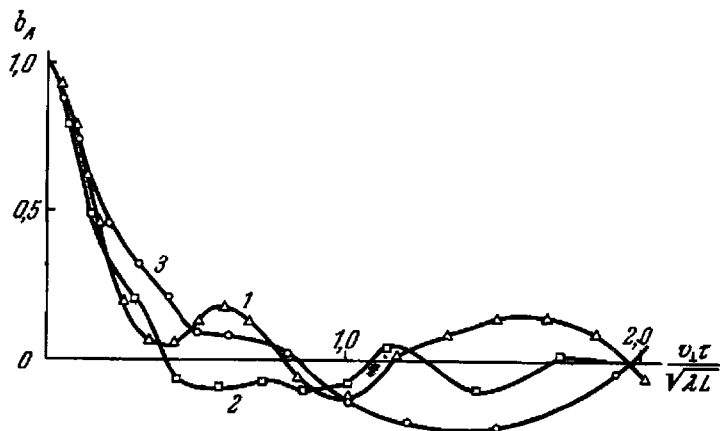


Рис. 70. Эмпирические нормированные автокорреляционные функции флуктуаций логарифма амплитуды звука.

Кривые 1, 2, 3 получены при $L = 4$ м, 8 м и 16 м соответственно.

вид. После приведения масштаба к величине $\tau_0 = \frac{\sqrt{\lambda L}}{v_{\perp}}$ все три кривые сближаются друг с другом, особенно при малых значениях $v_{\perp} \tau / \sqrt{\lambda L}$.

Эксперименты Б. А. Сучкова находятся в хорошем согласии с изложенной в гл. 3 теорией флуктуаций. Сопоставление измеренных и рассчитанных значений величины σ_A иллюстрирует возможность количественных оценок величины флуктуаций амплитуды звуковых волн на основании простых измерений профилей скорости ветра и температуры в атмосфере.

Измерения частотных спектров флуктуаций амплитуды и разности фаз звуковых волн было проведено в работе [133].

Измерения производились в конце лета 1958 г. на открытом и ровном участке степи в районе пос. Цимлянского (Научная станция Ин-та физики атмосферы АН СССР). Схема эксперимента представлена на рис. 71.

Сигнал, вырабатываемый звуковым генератором 1, поступал на усилитель 2, мощностью в 25 *вт*, нагруженный на громкоговоритель 3 с коническим рупором. Громкоговоритель располагался на высоте 1,5 м над земной поверхностью. Излучаемый сигнал воспринимался микрофонами M_1 и M_2 , которые помещались на

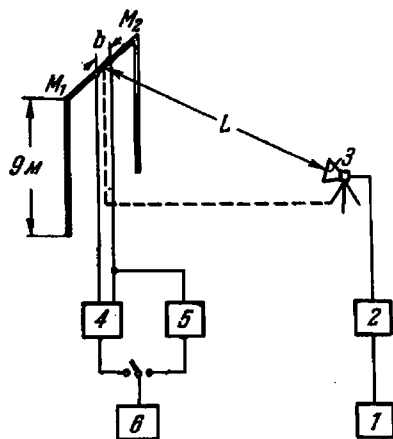


Рис. 71. Блок-схема измерений частотных спектров флуктуаций амплитуды и разности фаз звука.

1 — звуковой генератор, 2 — усилитель, 3 — громкоговоритель, M_1 , M_2 — микрофоны, 4 — фазометр, 5 — усилитель с детектором, 6 — частотный анализатор.

с детектора подавалось также на интегрирующий вольтметр, показания которого были пропорциональны средней амплитуде звука.

Каждое измерение частотного спектра производилось с общим усреднением в 10 *мин* (5 последовательных записей спектров, усредненных интегрирующими цепочками анализатора частот по интервалу в 100 *сек*).

Одновременно с акустическими измерениями производились измерения скорости и направления ветра, а также температуры на высотах 0,5; 1; 2; 4; 8 и 12 м. На основе этих измерений определялись характеристики турбулентного режима атмосферы, необходимые при анализе результатов измерений.

Измерения производились на трех частотах: 2; 6 и 8,5 *кГц*. Длина трассы L менялась от 21 до 80 м, база b — от 0,4 до 3 м.

Применявшийся фазометр позволял регистрировать пульсации фазы в пределах $\pm \pi$. Поэтому в случаях больших флуктуаций показателя преломления измерения проводились на малых

высоте 9 м над землей на горизонтальной ферме и могли перемещаться по ней на специальных тележках. Применение «наклонной» трассы и рупорного громкоговорителя позволило значительно ослабить отражения от земли, так как «отражающая зона» находилась вне основного лепестка диаграммы направленности рупора. Коэффициент отражения от земли под углом 10° , измеренный при помощи импульсной аппаратуры, описанной в [88], был менее 0,1 по амплитуде. Сигналы с микрофонов поступали на стартовый фазометр 4 и, с одного из микрофонов, на усилитель с линейным детектором на выходе 5. Напряжение с выхода фазометра или детектора подавалось на 30-канальный частотный анализатор 6. Напряжение

расстояниях, малых базах и меньших частотах. Относительные пульсации амплитуды $\sigma_A/\langle A \rangle$ составляли 0,1—0,42.

Всего для обработки было взято 16 спектров флуктуаций амплитуды и 21 спектр разности фаз, полученных в основном в ночное время. Были отброшены спектры, во время получения которых

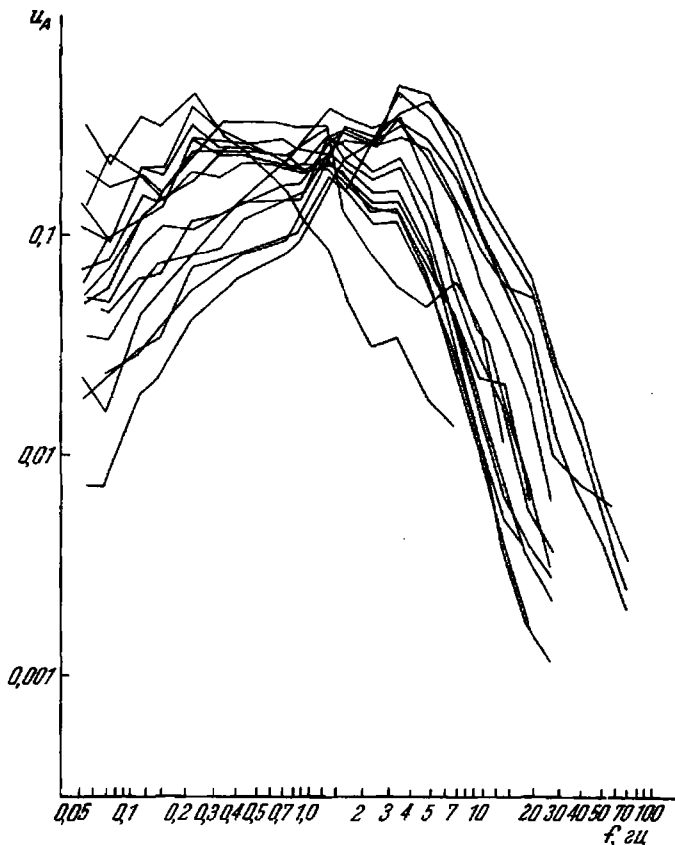


Рис. 72. Эмпирические частотные спектры флуктуаций амплитуды звука, полученные при различных расстояниях, частотах и метеорологических условиях.

ветер был направлен почти вдоль луча (в пределах 30°), или когда абсолютная скорость ветра была менее 1 м/сек, поскольку слабый ветер измеряется с малой точностью.

Результаты измерений частотных спектров представлены на рис. 72 и 73, где в логарифмическом масштабе отложены по осям

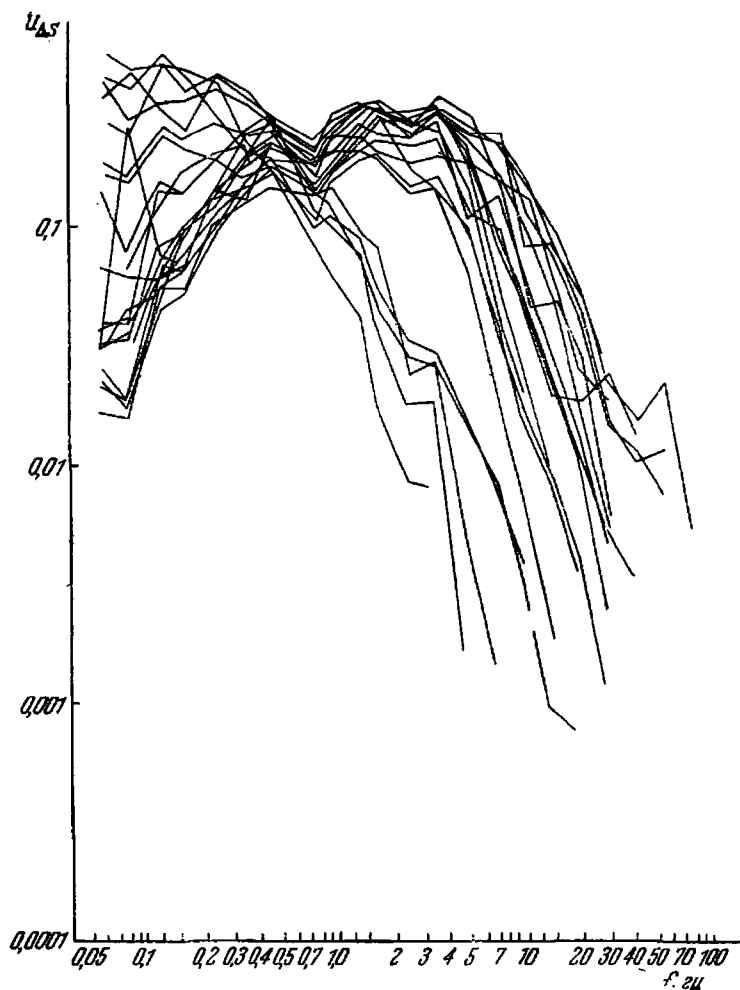


Рис. 73. Эмпирические частотные спектры флуктуаций разности фаз звука, полученные при различных расстояниях, частотах, базах и метеорологических условиях.

абсцисс частота, по осям ординат — безразмерные величины

$$u_A(f) = \frac{fw_A(f)}{1160 \int_{0,05} w_A(f) df}, \quad u_{\Delta S}(f) = \frac{fw_{\Delta S}(f)}{1160 \int_{0,05} w_{\Delta S}(f) df},$$

где $w_A(f)$ и $w_{\Delta S}(f)$ — спектральные плотности флуктуаций амплитуды и разности фаз звуковой волны. Величины u_A и $u_{\Delta S}$ подчинены условию нормировки

$$\int_0^{\infty} u_A(f) d \ln f = \int_0^{\infty} u_{\Delta S}(f) d \ln f = 1$$

и представляют собой нормированную спектральную плотность «мощности» флуктуаций в логарифмическом масштабе. На рис. 72 и 73 объединены частотные спектры, относящиеся к различным расстояниям, частотам, величинам базы и метеорологическим условиям; этим объясняется большой разброс полученных спектров.

Теоретический расчет частотного спектра флуктуаций разности фаз был проведен в разделе А. Там было установлено, что безразмерная функция

$$u_{\Delta S}(f) = \frac{fw_{\Delta S}(f)}{\langle \Delta S^2 \rangle}$$

при $\frac{bf}{v_{\perp}} \ll 1$ имеет вид

$$\frac{fw_{\Delta S}(f)}{\langle \Delta S^2 \rangle} = u_{\Delta S}(f) = 0,44 \left(\frac{bf}{v_{\perp}} \right)^{1/2},$$

т. е. в области низких частот $u_{\Delta S} \sim f^{1/2}$. При $\frac{bf}{v_{\perp}} \gg 1$ функция $u_{\Delta S}(f)$ убывает как $f^{-1/2}$. Характерная частота f_1 , при которой

$u_{\Delta S}(f)$ имеет максимум, равна $f_1 = 0,22 \frac{v_{\perp}}{b}$, т. е. определяется размером базы и скоростью ветра. Функция $u_{\Delta S}(f)$ изображена на рис. 74 (теоретическая кривая 1; способ получения кривой 2 будет

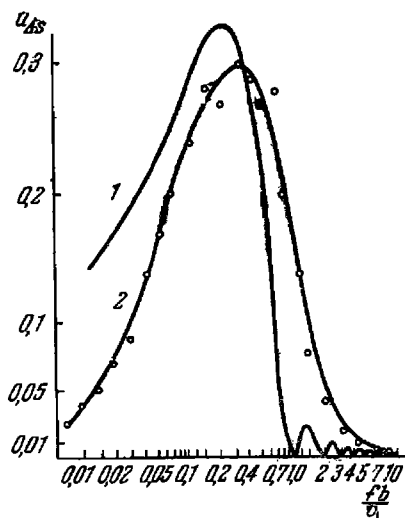


Рис. 74. Теоретический вид функции $u_{\Delta S}$, определяющей частотный спектр флуктуаций разности фаз (кривая 1); кривая 2 — результат обработки экспериментальных данных, представленных на рис. 73 (см. также рис. 77).

пояснен ниже). Как видно из этого рисунка, наибольший вклад в энергию флуктуаций разности фаз производят неоднородности с размерами порядка длины базы. Следует отметить, что при анализе спектра флуктуаций разности фаз частотным анализатором с полосой пропускания большей, чем v_{\perp}/b , провалы в спектре, соответствующие нулям множителя $\sin^2(\pi b f/v_{\perp})$, не будут

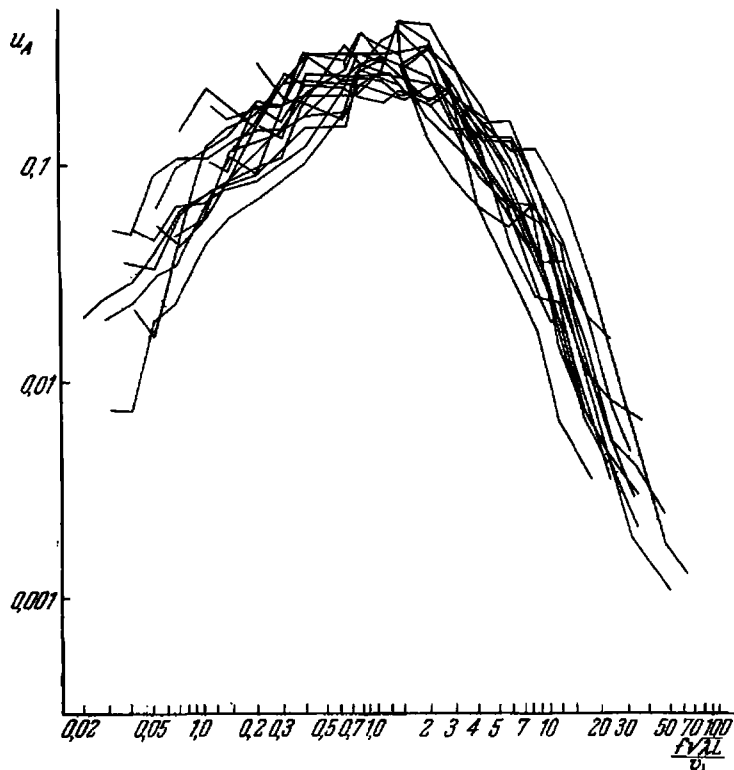


Рис. 75. Эмпирические частотные спектры флуктуаций амплитуды, построенные как функции аргумента $f\sqrt{L}/v_{\perp}$ (см. для сравнения рис. 72, где эти же частотные спектры приведены как функции частоты f).

обнаружены. Кроме того, за счет флуктуаций в скорости переноса неоднородностей положение нулей должно изменяться, что в среднем также приведет к выравниванию спектра. Поэтому форму спектра в высокочастотной области можно получить, заменяя $\sin^2(\pi b f/v_{\perp})$ его средним значением, равным $1/2$:

$$u_{\Delta S}(f) = \frac{f \omega_{\Delta S}(f)}{\langle \Delta S^2 \rangle} = 0,022 \left(\frac{fb}{v_{\perp}} \right)^{-5/3} \quad \text{при } f \gg f_1.$$

Вернемся теперь к анализу результатов измерений. Величины $u_A(f)$ и $u_{\Delta S}(f)$ являются функциями безразмерных частот f/f_A и f/f_S , где $f_A = \frac{v_{\perp}}{\sqrt{\lambda L}}$, $f_S = \frac{v_{\perp}}{b}$ — характерные частоты для флуктуаций амплитуды и разности фаз волны. Для проверки

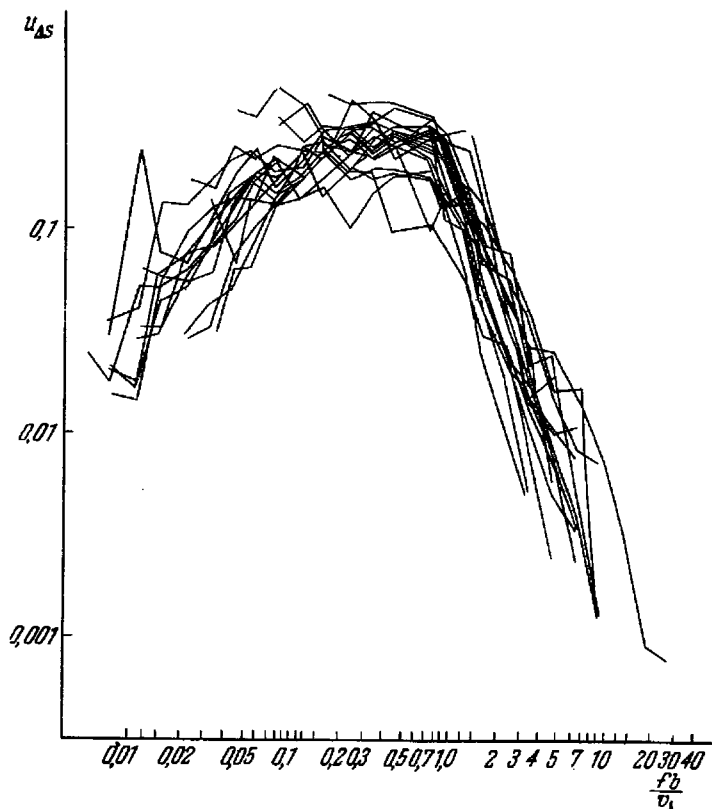


Рис. 76. Эмпирические частотные спектры флуктуаций разности фаз звука, построенные как функции аргумента fb/v_{\perp} (см. для сравнения рис. 73, где эти же частотные спектры приведены как функции частоты f).

указанной «гипотезы подобия» частотные спектры, изображенные на рис. 72 и 73 в координатах (u_A, f) и $(u_{\Delta S}, f)$, представлены на рис. 75 и 76 в координатах $(u_A, f/f_A)$ и $(u_{\Delta S}, f/f_S)$. Сопоставляя рис. 72 и 73 с рис. 75 и 76, легко обнаружить, что частотные спектры, которые на рис. 72 и 73 были довольно сильно сдвинуты

друг относительно друга, на рис. 75 и 76 сближаются, образуя довольно узкую «полосу». Это является подтверждением того факта, что частотные спектры флуктуаций амплитуды и фазы звука действительно можно считать функциями безразмерных аргументов fb/v_{\perp} для разности фаз и $f\sqrt{\lambda L}/v_{\perp}$ для амплитуды. Если учесть, что измерения проводились в различное время суток при различных метеорологических условиях, на разных частотах и трассах, то полученные результаты следует признать хо-

рошим подтверждением закона подобия. Закон подобия по параметру $f_A = \frac{v_{\perp}}{\sqrt{\lambda L}}$ для флуктуаций амплитуды волны был ранее подтвержден в экспериментах со светом (см. предыдущий параграф).

Спектр флуктуаций разности фаз, полученный усреднением всех спектров рис. 76, приведен на рис. 74 (кривая 2). Экспериментальная и теоретическая кривые довольно хорошо согласуются друг с другом. Провалы, соответствующие высокочастотной части спектра, на экспериментальной кривой отсутствуют по причинам, указанным выше. Усредненная спектральная плотность флуктуаций разности фаз, представлен-

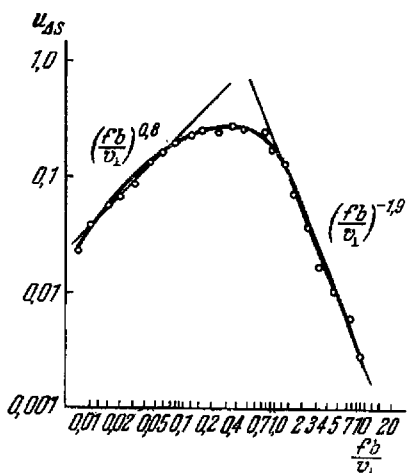


Рис. 77. Усредненный частотный спектр флуктуаций разности фаз звука в логарифмическом масштабе.

ная в логарифмическом масштабе на рис. 77, убывает с ростом частоты как $(fb/v_{\perp})^{-1,67}$. Здесь показатель степени довольно близок к значению $-1,67$, предсказываемому теорией. В области низких частот $fw_{\Delta S} \sim f^{0,8}$, показатель степени 0,33 отличается от теоретического значения 0,33. Это различие вполне естественно, так как в этой области играет роль низкочастотная часть спектра турбулентности, где уже нарушается «закон 2/3». Действительно, как видно из рис. 72, максимум частотного спектра приходится на частоты порядка 1 гц, что при средней скорости ветра 3—5 м/сек соответствует масштабам 3—5 м, т. е. тем сравнимым с высотой луча масштабам, для которых нарушается «закон 2/3». Поэтому вместо величины $\frac{1}{3} = 1 - \mu$ ($\mu = \frac{2}{3}$) для показателя степени в $u_{\Delta S}$ мы получаем значение, соответствующее меньшему μ .

На рис. 78 приведен усредненный по всем спектрам рис. 75 частотный спектр флуктуаций амплитуды (1), соответствующий теоретический спектр (2) и спектр, полученный при измерениях мерцания наземного источника света (3). Спектр флуктуаций амплитуды для звука, так же как и для света, шире и ниже, чем теоретический спектр. Расплывание и уменьшение максимума спектра может быть объяснено флуктуациями скорости переноса неоднородностей по трассе. Можно объяснить также некоторый сдвиг спектра для света влево, а для звука — вправо от теоретического. Размер зоны Френеля для света был порядка нескольких сантиметров, что уже близко к внутреннему масштабу турбулентности. Для звука же, наоборот, размер зоны Френеля составлял 1—2 м, т. е. уже был сравним с внешним масштабом турбулентности (в нашем случае средней высотой луча над землей).

На рис. 79 усредненный экспериментальный спектр флуктуаций амплитуды звука представлен в логарифмическом масштабе. Как видно из рисунка, форма экспериментального усредненного спектра хорошо согласуется с теоретической. При $f \gg v_1 / \sqrt{\lambda L}$ эксперимент дает убывание спектра с частотой $f^{-1,6}$, теория — $f^{-1,67}$. При $f \ll v_1 / \sqrt{\lambda L}$ экспериментальное значение показателя степени 0,9; теоретический показатель степени 1.

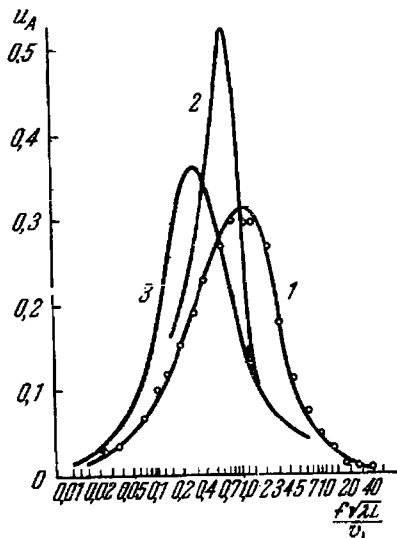


Рис. 78. Усредненный частотный спектр флуктуаций амплитуды звука (1), теоретическая кривая (2) и частотный спектр флуктуаций интенсивности света (3), как функции аргумента $f \sqrt{\lambda L} / v_1$.

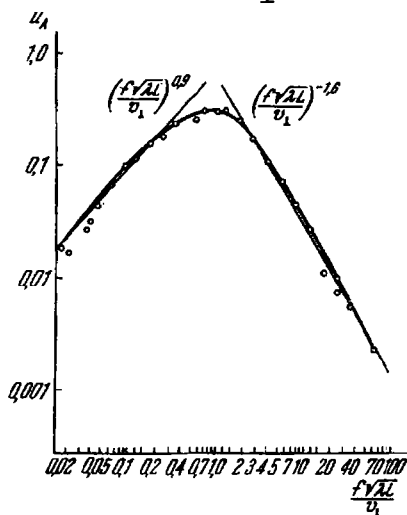


Рис. 79. Усредненный частотный спектр флуктуаций амплитуды звука в логарифмическом масштабе.

Теоретическое значение последнего показателя степени не зависит от показателя степени в структурной функции коэффициента преломления, и поэтому в случае флуктуаций амплитуды нарушение «закона $2/3$ » в области низких частот не приводит к изменению показателя степени в спектре флуктуаций амплитуды.

Из анализа экспериментов со звуком можно сделать следующие основные выводы.

1. Зависимость величины флуктуаций амплитуды от расстояния удовлетворительно согласуется с теоретической: $\sigma_x^2 \sim L^{11/6}$.

2. Масштаб корреляции имеет порядок $\sqrt{\lambda L}$, соответственный временной масштаб $\sqrt{\lambda L}/v_{\perp}$.

3. Флуктуации фазы растут с расстоянием по закону $\sigma_{\Delta S}^2 \sim L$.

4. Характерный масштаб для флуктуации разности фаз на базе совпадает с b . Соответствующий временной масштаб имеет порядок b/v_{\perp} .

5. Обнаруживается хорошее согласие частотных спектров флуктуаций света и звука после их приведения к безразмерному виду с использованием соответствующих масштабов.

6. Предположение о постоянстве скорости переноса неоднородностей не позволяет полностью объяснить «ширину» спектра флуктуаций амплитуды и фазы и нуждается для своего объяснения в рассмотрении флуктуаций скорости переноса.

§ 58. Флуктуации диэлектрической проницаемости тропосферы и распространение ультракоротких радиоволн

Изучению микроструктуры показателя преломления тропосферы посвящено большое количество экспериментальных работ. Первоначально основное внимание уделялось определению наиболее грубых характеристик: среднего квадрата флуктуаций показателя преломления $\langle \delta n^2 \rangle$ и радиуса корреляции флуктуаций L_0 . Это было связано с тем, что в первую теорию рассеяния радиоволн на турбулентных неоднородностях тропосферы, развитую Букером и Гордоном [63], входили именно эти два параметра, вернее, их отношение $\langle \delta n^2 \rangle / L_0$. Для величины L_0 (определяемой при аппроксимации корреляционной функции $\langle \delta n \delta n' \rangle$ экспонентой вида $\langle \delta n^2 \rangle e^{-\rho/L_0}$) получалось обычно значение от 50 до 100 м. Это значение L_0 с точки зрения теории турбулентности можно трактовать как внешний масштаб турбулентности. Величина $\langle \delta n^2 \rangle$ сильно меняется от случая к случаю и претерпевает резкие изменения с высотой.

Сведения о структуре турбулентности, заключенные в этих двух параметрах, весьма скудны. Если перевести их на

«спектральный язык», то

$$\langle \delta n^2 \rangle = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi_n(\kappa) d^3\kappa,$$

а $2\pi/L_0$ характеризует величину того интервала спектра, на котором сосредоточена основная доля «энергии» флуктуаций. В реальных условиях основная часть «энергии» турбулентных пульсаций сосредоточена в крупномасштабных неоднородностях (при $\kappa \leq \frac{2\pi}{L_0}$). Если же нас интересует вид спектра $\Phi_n(\kappa)$ при $\kappa > \frac{2\pi}{L_0}$, то параметры $\langle \delta n^2 \rangle$ и L_0 не характеризуют его. Действительно, легко можно построить корреляционные функции с одинаковыми $\langle \delta n^2 \rangle$ и L_0 , но с совершенно различным видом $\Phi_n(\kappa)$ при $\kappa > \frac{2\pi}{L_0}$.

В более поздних работах по экспериментальному изучению флуктуаций показателя преломления большее внимание уделялось измерениям вида частотного спектра ε . На рис. 19 и 20 приведены частотные спектры ε , полученные на самолете [35, 134], а на рис. 21 и 22 — в наземных измерениях [135]. Как видно из рисунков, экспериментальные частотные спектры можно хорошо аппроксимировать степенной функцией. Показатель степени m функции вида f^{-m} близок к 5/3, хотя в отдельных измерениях и отличается от этого значения.

В работе [61] исследовано пятнадцать частотных спектров флуктуаций показателя преломления в свободной тропосфере на высотах от 2 до 6 км. В этой работе указывается, что частотные спектры хорошо описываются степенной функцией вида $\text{const } f^{-m}$, причем для m приводятся границы:

$$1,52 < m < 1,62.$$

Это значение m , как отмечает автор [61], хорошо согласуется с теорией турбулентности Колмогорова — Обухова. По приводящимся в [61] частотным спектрам можно оценить и величину C_n . (Величины C_n и C_ε связаны соотношением $C_\varepsilon = 2 C_n$.) Она оказывается приблизительно равной $0,020 N\text{-ед.см}^{-1/2}$.*

Следует иметь в виду, что самолетные измерения δn дают горизонтальную структуру неоднородностей и «горизонтальные» спектры. В то же время при рассеянии радиоволн вектор $\mathbf{K} = \mathbf{K}_0 - \mathbf{K}_s$ обычно направлен вертикально, т. е. для задачи

*) N -единицы применяются для измерения отклонений показателя преломления от 1. Одна N -единица равна 10^{-6} .

о рассеянии радиоволн существенное значение имеют вертикальная структура неоднородностей и «вертикальный» спектр. Вообще говоря, возможна анизотропия турбулентности, приводящая к различию ее спектров по различным направлениям. Однако такую анизотропию можно ожидать лишь в области спектра, относящейся к крупным масштабам.

На основании графиков рис. 21 и 22 можно оценить величину C_n ; она оказывается равной $5 \cdot 10^{-8} \text{ см}^{-1/3} = 0,05 \text{ N-ед. см}^{-1/3}$ для $v = 18 \text{ м/сек}$ (рис. 21) и $0,09 \text{ N-ед. см}^{-1/3}$ для $v = 1,2 \text{ м/сек}$ (рис. 22).

Сравним эту величину с другими наземными измерениями. В работе [44] проводились многочисленные измерения структурных функций температурного поля в приземном слое. Для величины C_T , входящей в выражение для структурной функции температурного поля ($\langle (T_1 - T_2)^2 \rangle = C_T^2 r^{2/3}$), в этой работе при различных метеорологических условиях были получены значения от нуля приблизительно до $0,150 \text{ град} \cdot \text{см}^{-1/3}$. Как известно, величина показателя преломления n атмосферного воздуха связана с его температурой T (в °К), давлением p (в миллибарах) и влажностью e (в миллибарах) формулой

$$(n - 1) 10^8 = \frac{79}{T} \left(p + \frac{4800e}{T} \right).$$

Если рассчитать значение C_n , обусловленное такими флуктуациями температуры, то мы получим $C_n = (0 \div 0,15) \text{ N-ед. см}^{-1/3}$. Таким образом, величина C_n , рассчитанная по единичным измерениям частотных спектров показателя преломления вблизи земной поверхности [135], хорошо укладывается в пределы, найденные по нескольким сотням измерений, проведенных при различных метеорологических условиях.

Следует, однако, отметить, что флуктуации показателя преломления вблизи земной поверхности (в первых нескольких десятках метров) значительно интенсивнее, чем в свободной тропосфере. Величина $C_n(z)$ (z — высота над земной поверхностью) при $z \lesssim 50 \text{ м}$ убывает с высотой как $z^{-1/3}$; при больших значениях z закон изменения C_n может быть и другим. (Например, в условиях свободной конвекции $C_n^2 \sim z^{-4/3}$.) Но несомненно, что типичные значения C_n для свободной тропосферы намного меньше, чем в приземном слое.

В работе Цванга [52, 59] приводятся результаты измерений частотных спектров флуктуаций температуры на высотах до 5 км. Полученные в этой работе спектры (общим числом 26) хорошо согласуются с «законом 2/3», и рассчитанная по ним величина C_n лежит в пределах от 0,004 до 0,010 N-ед. см^{-1/3}. В действитель-

ности эта величина может быть и больше за счет флуктуаций влажности.

Перейдем теперь к оценкам флуктуаций показателя преломления тропосферы на основании анализа флуктуаций фазы и амплитуды радиоволн и света.

В настоящее время имеется довольно большое количество наблюдений за мерцанием и дрожанием изображений звезд. Из этих наблюдений (см. следующий параграф) можно извлечь величину $\sqrt{\langle \Delta S^2 \rangle}$, град $C_n \sim 0,01 N \cdot \text{ед} \cdot \text{см}^{-1/2}$.

Рассмотрим теперь эксперименты по измерению характеристик флуктуаций фазы сантиметровых радиоволн. Такие измерения производились в марте — июне 1955 г. в США вблизи Колорадо Спрингс [135, 136], а также в ноябре 1956 г. на острове Мауи (Гавайские острова) [137].

В работе Гербстрайта и Томсона [135] приводится зависимость среднеквадратичного значения флуктуаций разности фаз на базе 150 м от частоты (рис. 80). Как видно из приведенного графика, зависимость $\langle \Delta S^2 \rangle \sim k^2$, которая должна выполняться при любом виде спектра турбулентности, хорошо оправдывается на опыте.

На рис. 81 приведен частотный спектр флуктуаций фазы дециметровых радиоволн ($f = 1046 \text{ Мгц}$) на пути $L = 18,5 \text{ км}$. Трасса проходила от вершины Pikes Peak (высота 4300 м) до пункта Garden of the Gods (высота 1950 м). Прямая линия на графике соответствует степенному виду спектра $W_S(f)$; ее наклон соответствует формуле $W_S(f) \sim f^{-2/3}$. Данные графика свидетельствуют о том, что в указанном диапазоне частот хорошо оправдывается формула (18.52).

Этот результат трудно было ожидать заранее. Действительно, «закон 2/3» для флуктуаций показателя преломления, вообще говоря, должен быть справедлив для масштабов, меньших внешнего масштаба турбулентности L_0 , т. е. для частот $f > \frac{v}{L_0}$. В рассматриваемом случае величина $v \approx 3 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-1}$ (см. стр. 432). Поэтому диапазон частот 1/3600—1/36 гц соответствует расстояниям от 100 м до 10 км, которые значительно превышают величину L_0 .

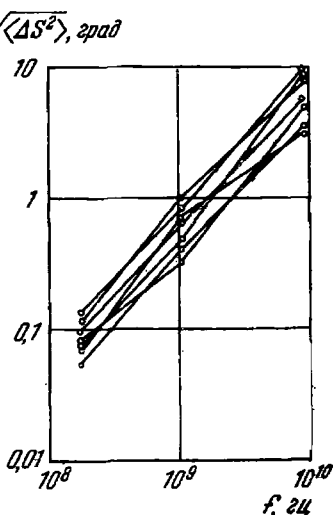


Рис. 80. Зависимость среднеквадратичного значения флуктуаций разности фаз на базе 150 м от частоты.

Таким образом, частотный спектр на рис. 81 дает нам сведения о сравнительно крупномасштабном участке спектра турбулентности, для которого нет достаточно надежной теории. Однако на основании этого эксперимента можно утверждать, что в рассматриваемом случае структура турбулентных неоднородностей описывается «законом 2/3» и в этой области масштабов.

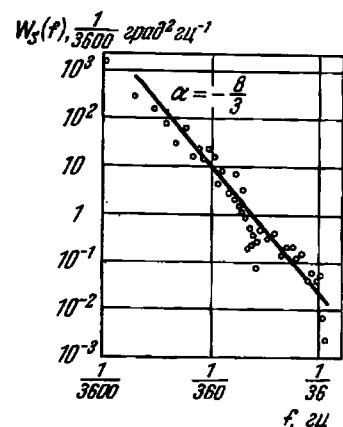


Рис. 81. Частотный спектр флуктуаций фазы радиоволл дециметрового диапазона ($f = 1046 \text{ Мгц}$) на трассе протяженностью 18,5 км при скорости ветра 2,7 м/сек.

Поскольку вид частотного спектра $W_S(f)$ хорошо соответствует «закоу 2/3», можно ожидать, что в экспериментах Гербстрайта и Томсона для флуктуаций разности фаз на некоторой базе b будет справедлива формула (37.47), основанная на предположении о справедливости того же закона. Это позволяет нам оценить величину C_n на основании данных рис. 80. Эти данные получены на трассе длиной 6,5 км и базе 150 м. Взяв $k = 0,22 \text{ см}^{-1}$ и $6,1 \cdot 10^{-3} \text{ рад} < \sqrt{\langle \Delta S^2 \rangle} < 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ рад}$ (что соответствует разбросу точек на рис. 80 для $f = 1046 \text{ Мгц}$), получим на основании (37.47), что C_n меняется от $0,007 \text{ N-ед} \cdot \text{см}^{-1/2}$ до $0,019 \text{ N-ед} \cdot \text{см}^{-1/2}$.

В работе [135] изучались также величины

$$\Delta_1(r, \tau) = S(r, t + \tau) - S(r, t)$$

$$\text{и } \Delta_2(r, \tau) = \Delta_1(r, t + \tau) - \Delta_1(r, t)$$

(первая и вторая временные разности фаз в некоторой точке). Легко выразить эти величины через частотный спектр флуктуаций фазы $W_S(f)$:

$$\langle \Delta_1^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} (1 - \cos 2\pi f\tau) W_S(f) df, \quad (1)$$

$$\langle \Delta_2^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} [3 - 4\cos(2\pi f\tau) + \cos(4\pi f\tau)] W_S(f) df. \quad (2)$$

В случае, если $W_S(f) = \text{const} \cdot f^{-m}$, интегралы легко вычисляются и мы получаем формулу

$$\frac{\langle \Delta_2^2 \rangle}{\langle \Delta_1^2 \rangle} = 4(1 - 2^{m-3}). \quad (3)$$

Таким образом, соотношение величин $\langle \Delta_2^2 \rangle$ и $\langle \Delta_1^2 \rangle$ зависит только от вида частотного спектра $W_S(f)$. На основании приведенных в [135] значений $\sqrt{\langle \Delta_1^2 \rangle} = 4,92^\circ$, $\sqrt{\langle \Delta_2^2 \rangle} = 2,83^\circ$ ($\tau = 300$ сек) можно при помощи (3) определить величину m . Она оказывается равной 2,87, что близко к значению $8/3 = 2,67$.

В работе Гербстрайта и Томсона приводятся также корреляционные функции вида

$$\rho_1(b) = \frac{\langle \Delta_1(r+b, \tau) \Delta_1(r, \tau) \rangle}{\langle \Delta_1^2 \rangle}, \quad \rho_2(b) = \frac{\langle \Delta_2(r+b, \tau) \Delta_2(r, \tau) \rangle}{\langle \Delta_2^2 \rangle}.$$

Приняв гипотезу «замороженной» турбулентности, легко выразить величины ρ_1 и ρ_2 через структурную функцию фазы

$$D_S(r) = \langle [S(r+r_1) - S(r_1)]^2 \rangle,$$

$$\rho_1(b) = \frac{D_S(|v\tau + b|) + D_S(|v\tau - b|) - 2D_S(b)}{2D_S(v\tau)}, \quad (4)$$

$$\rho_2(b) = \frac{D_S(|2v\tau + b|) + D_S(|2v\tau - b|) - 4D_S(|v\tau + b|)}{2D_S(2v\tau) - 8D_S(v\tau)} - \frac{4D_S(|v\tau - b|) - 6D_S(b)}{2D_S(2v\tau) - 8D_S(v\tau)}. \quad (5)$$

Здесь v — эффективная скорость движения неоднородностей показателя преломления.

Авторы [135] сравнивают экспериментальные результаты с теорией, развитой в [138] на основании аппроксимации корреляционной функции показателя преломления функцией e^{-r/L_0} . Для того чтобы добиться хорошего согласия экспериментальных данных с теорией, они полагают $L_0 = 360$ м для кривой $\rho_1(b)$. Однако чтобы добиться хорошего согласия и по кривой $\rho_2(b)$, им приходится положить $L_0 = 146$ м, что в 2,5 раза меньше первого значения. Это свидетельствует просто о неудачном выборе функции e^{-r/L_0} в качестве корреляционной функции показателя преломления. Если принять для $D_S(\rho)$ выражение $D_S(\rho) = \text{const} \cdot \rho^{5/2}$, соответствующее измеренному в этой работе спектру флуктуаций фазы и согласующееся с теорией, то выражения (4) и (5) примут вид

$$\rho_1(b) = \frac{1}{2} \left[\left| 1 + \frac{b}{v\tau} \right|^{5/2} + \left| 1 - \frac{b}{v\tau} \right|^{5/2} - 2 \left(\frac{b}{v\tau} \right)^{5/2} \right], \quad (6)$$

$$\rho_2(b) = \frac{1}{4(2^{5/2} - 2)} \left[\left| 2 + \frac{b}{v\tau} \right|^{5/2} + \left| 2 - \frac{b}{v\tau} \right|^{5/2} - 4 \left| 1 + \frac{b}{v\tau} \right|^{5/2} - 4 \left| 1 - \frac{b}{v\tau} \right|^{5/2} + 6 \left(\frac{b}{v\tau} \right)^{5/2} \right]. \quad (7)$$

На рис. 82 изображены экспериментальные данные Герб-страйта и Томсона вместе с кривыми, построенными по формулам (6) и (7). Для того чтобы совместить экспериментальные точки с теоретическими кривыми, мы приняли $\nu\tau = 320$ м. При этом значении $\nu\tau$ экспериментальные точки и теоретические кривые сближаются одновременно для обеих величин ρ_1 и ρ_2 , в отличие от аналогичного графика в [135], где авторам пришлось брать различные значения L_0 . На основании полученного значения $\nu\tau$ и известного $\tau = 300$ сек можно определить эффективную скорость переноса неоднородностей $v = 2,7$ м·сек⁻¹. Она оказывается заключенной между значениями скорости ветра в верхней точке трассы ($v \approx 18$ м·сек⁻¹) и скорости ветра в нижней точке ($v \approx 2$ м·сек⁻¹).

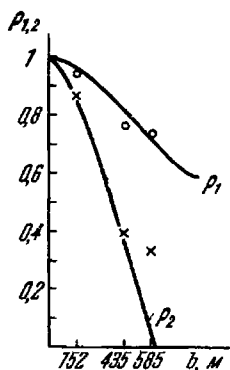


Рис. 82. Пространственные корреляционные функции для первой и второй временных разностей фаз.

Сплошная линия — теоретические кривые; крестики — экспериментальные данные.

Используя это значение ν , мы можем определить величину C_n на основании частотного спектра $W_S(f)$ (рис. 81), а также исходя из измеренного значения $\langle \Delta_1^2 \rangle$.

Воспользовавшись формулой (36.52) и подставляя в нее $k = 0,22$ см⁻¹, $L = 18,5$ км, $v = 2,7$ м·сек⁻¹, получим $C_n = 0,021$ N-ед·см^{-1/3}. Для того чтобы найти величину C_n по измеренному значению $\langle \Delta_1^2 \rangle$, перепишем формулу (37.47), положив $\rho = \nu\tau$:

Воспользовавшись формулой (36.52) и подставляя в нее $k = 0,22$ см⁻¹, $L = 18,5$ км, $v = 2,7$ м·сек⁻¹, получим $C_n = 0,021$ N-ед·см^{-1/3}. Для того чтобы найти величину C_n по измеренному значению $\langle \Delta_1^2 \rangle$, перепишем формулу (37.47), положив $\rho = \nu\tau$:

$$\langle \Delta_1^2 \rangle = 2,9k^2L(\nu\tau)^{1/3}C_n^2.$$

На основании значений $\sqrt{\langle \Delta_1^2 \rangle} = 4,92^\circ$,

$\nu\tau = 820$ м и прежних значений k и L

получим $C_n = 0,015$ N-ед·см^{-1/3}, что с точностью в 30% согласуется с предыдущим значением.

Одновременно с измерениями Гербстрайтом и Томсоном флуктуаций фазы проводились измерения флуктуаций разности фаз на нескольких базах от 5,5 м до 150 м на длине волны 3,2 см [136]. Приведенные в этой работе экспериментальные структурные функции фазы имеют сравнительно большой разброс, вследствие чего по ним трудно определить вид структурной функции флуктуаций фазы. Во всяком случае, он не противоречит формуле (37.47). Среднеквадратичное значение разности фаз на базе 150 м колеблется от 1° до 8°. В этих опытах $L = 5,5$ км, $\lambda = 3,2$ см. Определенная по формуле (37.47) величина C_n колеблется от 0,002 N-ед·см^{-1/3} до 0,018 N-ед·см^{-1/3}. Эта оценка C_n по порядку величины хорошо согласуется с предыдущими.

В статье Портона [137] приводятся спектры флуктуаций фазы сантиметровых радиоволн ($\lambda = 3,2$ см), измеренные на трассе протяженностью 30 км на острове Мауи (Гавайи) (рис. 83 и 84).

Прямые линии на графиках соответствуют зависимости $W_S(f) \sim f^{-2/3}$ и хорошо согласуются с экспериментальными данными. Таким образом, спектры на рис. 83 и 84 дают тот же результат, что и спектр из работы [135] на рис. 81. Однако спектры рис. 83 и 84 относятся к более высоким частотам (масштабы от 1 м до 2 км), чем спектр на рис. 81, и охватывают больший

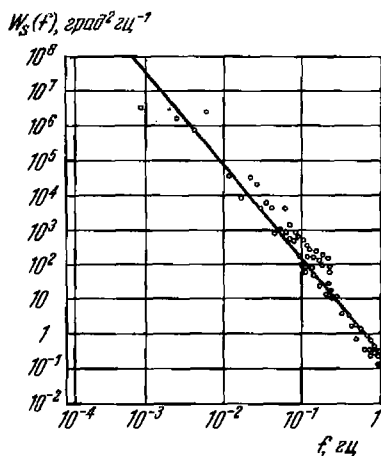


Рис. 83. Пример частотного спектра флуктуаций фазы сантиметровых радиоволн ($f = 9414$ Мгц) на трассе протяженностью 30 км при скорости ветра 2,2 м/сек.

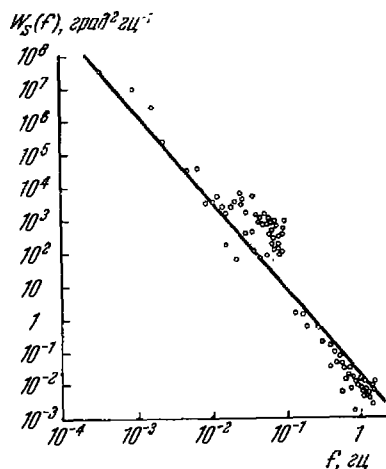


Рис. 84. Пример частотного спектра флуктуаций фазы сантиметровых радиоволн ($f = 9414$ Мгц) на трассе протяженностью 30 км при скорости ветра 0,5 м/сек.

интервал масштабов. Высоочастотная часть этих спектров, несомненно, относится к инерционному участку спектра турбулентности (т. е. к участку, на котором должен выполняться «закон $2/3$ »); для этого участка показатель степени $-2/3$ в функции $W_S(f)$ является вполне естественным. Тот факт, что вид функции $W_S(f)$ не меняется существенно и в области более низких частот, говорит о том, что в данном случае «закон $2/3$ » выполняется до сравнительно больших масштабов, так же как это было и для данных рис. 81.

В заключение этого параграфа приведем табл. 4, суммирующую значения C_n , полученные в различных экспериментах [139].

Таблица 4

№	C_n , N-ед. см ^{-1/2}	На основании каких данных получена приводимая оценка
1	0,004—0,010	Прямые измерения спектров флуктуаций температуры на самолете [52, 59].
2	0,020	Прямые измерения спектров флуктуаций показателя преломления на самолете [61].
3	0,050 *)	Спектр флуктуаций показателя преломления (Garden of the Gods, Колорадо, США, июнь 5—6 ч [135]).
4	0,090 *)	Спектр флуктуаций показателя преломления (Pikes Peak, Колорадо, США, июнь, 5—6 ч [135]).
5	0—0,150 *)	Измерения структурной функции температуры в приземном слое атмосферы [44].
6	0,007	Мерцание и «дрожание» звезд [140].
7	0,007—0,019	Флуктуации разности фаз на базе 150 м на частотах от 173 до 9350 Мгц (Колорадо, США, март, 15 ч [135]).
8	0,002—0,018	Флуктуации разности фаз на базах до 150 м, $\lambda = 3$ см (Колорадо, США, март [136]).
9	0,021	Частотный спектр флуктуаций фазы, $\lambda = 30$ см (Колорадо, США, июнь [135]).
10	0,015	Изменчивость фазы за 5 мин на $\lambda = 30$ см (Колорадо, США, июнь [135]).
11	0,130—0,180	Спектр флуктуаций фазы $\lambda = 3,2$ см (Мауи, Гавайи [137]).

*) Значения C_n относятся к приземному слою атмосферы.

§ 59. Мерцание и «дрожание» изображений звезд в телескопах

Мерцание звезд — одно из наиболее полно изученных явлений, относящихся к рассматриваемому кругу вопросов. Оно привлекает внимание астрономов как один из факторов, затрудняющих наблюдения. Например, при измерениях спектров звезд флуктуации интенсивности могут существенно исказить результаты измерений.

Из астрономических наблюдений известны следующие основные факты. Величина мерцания σ_p^2 (средний квадрат относительных флуктуаций светового потока через телескоп) зависит от зенитного угла звезды θ . Эта зависимость разная при различных диаметрах объектива телескопа [141—143]. На рис. 85, а, б, в, г изображены четыре кривые, относящиеся к телескопам с диаметром объектива

$D=7,6$ см, 24 см, 32 см и 38 см. Из этих рисунков видно, что для малых диаметров телескопа величина σ_p^2 сначала возрастает вместе с θ ,

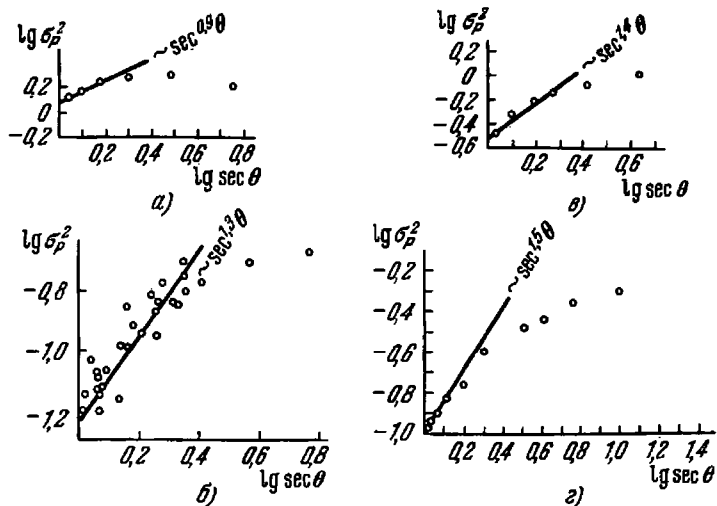


Рис. 85. Зависимость среднеквадратичной величины флуктуаций светового потока через диафрагму телескопа от зенитного угла для телескопов различных диаметров D : а — $D = 7,6$ см; б — $D = 24$ см; в — $D = 32$ см; г — $D = 38$ см.

а затем начинает убывать. Для больших диаметров D при малых θ функция $\sigma_p^2(\theta)$ возрастает быстрее, чем для малых D , но при больших θ происходит «насыщение» кривой вместо ее спада, как при малых D . На рис. 86 изображена зависимость $\sigma_p^2 = f(D)$ при малых зенитных углах [141].

Если рассматривать распределение освещенности на поверхности объектива телескопа (это делается при помощи специальной линзы), то можно обнаружить отдельные более темные и светлые пятна, перемещающиеся по поверхности в некотором направлении. Эти пятна носят название бегущих теней. Их размер — порядка 10 см. На рис. 87 изображена полученная в работе [144] корреляционная функция распределе-

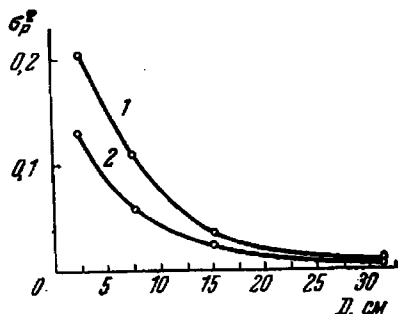


Рис. 86. Эмпирическая зависимость величины мерцания от диаметра телескопа.

1 — Зима, 2 — лето.

ния освещенности на поверхности объектива. В ряде работ с размером бегущих теней связывали размер реальных неоднородностей показателя преломления атмосферы.

В астрономических наблюдениях было установлено, что планеты мерцают значительно слабее, чем звезды, находящиеся на том же зенитном расстоянии (этот вопрос рассматривался в разделе А [146]).

Наконец, следует отметить так называемый эффект хроматического мерцания. Он проявляется в том, что звезды, наблюдаемые вблизи горизонта, случайным образом меняют свои спектральные характеристики—

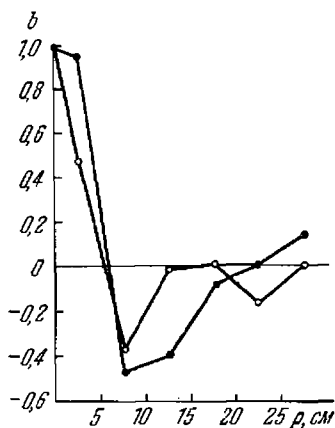


Рис. 87. Эмпирические корреляционные функции распределения освещенности на поверхности объектива телескопа.

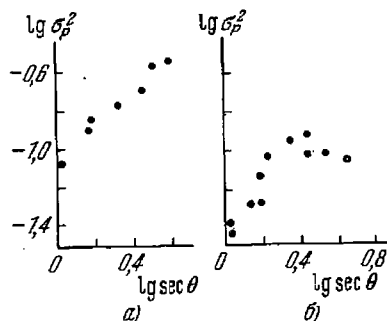


Рис. 88. Влияние ширины спектрального интервала на зависимость мерцания от зенитного угла. а — Полоса пропускания 90 Å; б — интегральный свет.

максимум спектра хаотически перемещается из одной области в другую. При визуальных наблюдениях этот эффект проявляется как изменение цвета звезды. Зависимость мерцания от зенитного расстояния θ звезды при наблюдениях в узком участке оптического спектра отличается от аналогичной зависимости, получаемой в интегральном свете. На рис. 88 приведены две зависимости $\sigma_p^2(\theta)$, полученные при одновременных наблюдениях в участке спектра шириной 90 Å и в интегральном свете. Из этих графиков видно, что, в то время как в интегральном свете кривая $\sigma_p^2(\theta)$ в области больших θ падает, в узком участке спектра такого падения не наблюдается [145].

В ряде работ [см. 147] проводились сопоставления скорости движения бегущих теней со скоростью ветра на различных высотах. Было установлено, что наибольшая корреляция наблю-

дается между скоростью движения бегущих теней и скоростью ветра на высотах порядка 10 км (вблизи тропопаузы).

Все перечисленные особенности явления мерцания звезд находят естественно объяснение с помощью изложенной выше теории.

Как уже указывалось выше, параметр $L_k = \lambda_0^2/\lambda$, определяющий расстояние, в пределах которого справедлива геометрическая оптика, в атмосфере имеет порядок 100 м при $\lambda = 0,5 \mu\text{к}$. Поэтому средний квадрат флуктуаций логарифма амплитуды волны при наблюдении «точечным» приемником имеет вид (24.48)

$$\langle \chi^2 \rangle = 0,56k^{1/2} \int_0^L C_n^2(x) x^{5/2} dx. \quad (1)$$

Здесь вместо C_n^2 введена величина $C_n^2 = \frac{1}{4} C_z^2$, которая предполагается зависящей от координат. Начало координат в (1) помещено в точке наблюдения и интегрирование производится вдоль луча. Если C_n^2 зависит лишь от высоты над поверхностью земли, т. е. от $z = x \cos \theta$, то, производя в (1) замену переменных $x = z \sec \theta$, получим

$$\langle \chi^2 \rangle = 0,56k^{7/2} (\sec \theta)^{11/2} \int_0^\infty C_n^2(z) z^{5/2} dz \quad (2)$$

(верхний предел интегрирования можно заменить на бесконечность, учитывая, что $C_n^2(z)$ быстро убывает при больших z).

Таким образом, при наблюдениях при помощи телескопа с небольшим (по сравнению с радиусом корреляции флуктуаций) диаметром D для $\sigma_I^2 = 4 \langle \chi^2 \rangle$ имеем формулу

$$\sigma_I^2(\theta) = 2,2k^{7/2} (\sec \theta)^{11/2} \int_0^\infty C_n^2(z) z^{5/2} dz, \quad (3)$$

т. е. $\sigma_I^2 \sim (\sec \theta)^{11/2}$. На графике рис. 85, а проведена прямая линия, соответствующая степенной зависимости $\sigma_I \sim (\sec \theta)^{0,98}$, весьма близкая к теоретической $\sigma_I \sim (\sec \theta)^{11/12} = (\sec \theta)^{0,92}$.

Объяснение насыщения кривой $\sigma_I^2 = f(\theta)$ будет дано ниже, а сейчас мы обратимся к зависимости флуктуаций от диаметра объектива D . В § 53 предыдущего раздела была вычислена функция $G(R)$, равная отношению среднего квадрата флуктуаций полного светового потока через объектив радиуса R к среднему квадрату флуктуаций интенсивности света. Эта функция фактически зависит от безразмерного параметра $R/\sqrt{\lambda L}$. Сопоставляя теоретическую кривую с экспериментальной зависимостью, изображенной на рис. 86, можно подобрать такое значение $\sqrt{\lambda L}$, при котором эти зависимости практически совпадают. Сопоставление этих данных приведено на рис. 89. Из него следует, что $\sqrt{\lambda L} =$

$= 9,2 \text{ см} \pm 0,5 \text{ см}$ для зимних измерений и $\sqrt{\lambda L} = 8,1 \pm 0,5 \text{ см}$ для летних измерений. Принимая $\lambda = 0,5 \text{ мк}$, можно найти эффективную толщину атмосферы, ответственную за мерцание, порядка 13—16 км. Величина L связана с толщиной H этого слоя (по вертикали) соотношением $L = H \sec \theta$. Значение $\sec \theta$ для данных рис. 86 менялось в пределах от 1 до 1,5. Разделив полученное

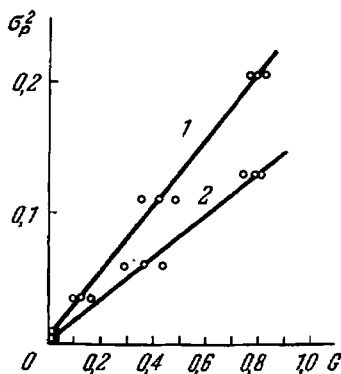


Рис. 89. Сопоставление эмпирической и теоретической зависимостей $\sigma_p^2 = f(D)$, где D — диаметр телескопа.

По оси абсцисс отложены значения функции $G\left(\frac{D}{\sqrt{\lambda L}}\right)$, приведенной на рис. 49 на стр. 374, по оси ординат — значения σ_p^2 , взятые с рис. 86.

Подбирая величину $\sqrt{\lambda L}$, можно добиться линейной зависимости между этими величинами. Слева и справа от точек, соединенных прямой, помещены точки, соответствующие измененным на $\pm 1 \text{ см}$ значениям $\sqrt{\lambda L}$. Эти точки уже не располагаются на прямых линиях. Кривая 1 — зима, 2 — лето.

$(\sec \theta)^{1/2}$, еще и функцией G . Если $R \ll \sqrt{\lambda H}$, то можно считать $G = 1$ и мы снова приходим к формуле (3). Если $R \gg \sqrt{\lambda H}$, то можно воспользоваться асимптотическим разложением функции $G(x) \sim x^{-1/2}$ при $x \gg 1$, и в этом случае мы получаем

$$\sigma_p^2 \sim R^{-1/2} H^{1/2} \sec^3 \theta \int_0^\infty C_n^2(z) z^{1/2} dz. \quad (5)$$

Таким образом, при $D \gg \sqrt{\lambda H}$ зависимость σ_p^2 от θ выражается множителем $\sec^3 \theta$. При промежуточных значениях отношения

значение L на среднее значение $\sec \theta$, равное 1,25, получим для эффективной толщины H величину 10 км (летние измерения) и 13 км (зимние измерения). Как следует из (3), множитель $z^{1/2}$ под интегралом, обращающийся в нуль при $z = 0$, сильно уменьшает роль низких слоев в атмосфере. В результате произведение $C_n^2 z^{1/2}$ имеет максимум в сравнительно высоких слоях атмосферы, что и объясняет большое значение H . Полученное значение H хорошо согласуется по порядку величины со значениями, получаемыми из сопоставления скорости движения бегущих теней и скорости ветра на разных высотах.

Вернемся к зависимости $\sigma_p^2 = f(\theta)$. Для объектива радиуса R она имеет вид

$$\sigma_p^2 = 2,2 \cdot k^{7/4} (\sec \theta)^{1/2} \times G\left(\frac{R}{\sqrt{\lambda H} \sec \theta}\right) \int_0^\infty C_n^2(z) z^{1/2} dz, \quad (4)$$

где G — функция, рассчитанная в § 53. Как видно из (4), зависимость от θ обусловлена, помимо множителя

$D/\sqrt{\lambda H}$ зависимость $\sigma_p^2 = f(\theta)$ можно аппроксимировать формулой $\sigma_p^2 = (\sec \theta)^\alpha$, где $\frac{11}{6} < \alpha < 3$. Этот вывод хорошо согласуется с полученной экспериментально зависимостью $\alpha(R)$ [141]:

$2R$, см	2,5	7,6	15,2	32
α	1,8	2	2,4	3

На рис. 85, *в* сплошная линия проведена по формуле (4). Таким образом, изменение начального участка кривой $\sigma_1^2 = f(\theta)$ при изменении размера диафрагмы R объясняется усредняющим действием объектива. Этим же эффектом объясняется и деформация частотных спектров мерцания (см. теоретические кривые на рис. 50 и экспериментальные данные на рис. 90).

Обратимся теперь к поведению кривых $\sigma_p^2 = f(\theta)$ в области больших θ ($\theta > 60^\circ$).

Прежде всего отметим, что при наблюдениях в узком участке спектра кривая $\sigma_p^2 = f(\theta)$ не испытывает насыщения в области больших θ (см. рис. 88). Таким образом, эффект насыщения связан с хроматическим мерцанием.

Рассмотрим этот вопрос подробнее [148].

Так как атмосфера обладает слабой дисперсией, то рефракция лучей с разными длинами волн различна. Поэтому, если два луча с длинами волн λ_1 и λ_2 сходятся в одну точку на поверхности земли, то на некоторой высоте z они разделены расстоянием ρ , которое с достаточной степенью точности выражается формулой [149]

$$\rho(\Delta\lambda, \theta) = D_0(\theta) [n(\lambda_1) - n(\lambda_2)] (1 - e^{-z/h}). \quad (6)$$

Здесь $\Delta\lambda = \lambda_1 - \lambda_2$; $D_0(\theta)$ — функция, рассчитанная в [149]; $h = 8$ км — высота однородной атмосферы; $n(\lambda)$ — показатель преломления*). Как следует из формулы (6), на высотах порядка 10—15 км, существенных для мерцания, расстояние между лучами $\rho(\Delta\lambda, \theta)$ уже мало меняется при изменениях z , и поэтому с достаточной точностью можно считать, что лучи идут параллельно друг другу на расстоянии $\rho(\Delta\lambda, \theta)$, определяемом формулой (6) при $z = 10$ км. Поэтому для расчета хроматического

*) При $z \gg H$ и $n(\lambda_1) - n(\lambda_2) = 5,9 \cdot 10^{-6}$ (крайние лучи в диапазоне видимого света) ρ принимает следующие значения: 0 при $\theta \leq 10^\circ$; 0,2 см при $\theta = 20^\circ$; 0,8 см при $\theta = 30^\circ$; 2,1 см при $\theta = 40^\circ$; 4,9 см при $\theta = 50^\circ$; 11,6 см при $\theta = 60^\circ$; 31,2 см при $\theta = 70^\circ$; 128 см при $\theta = 80^\circ$ и 1283 см при $\theta = 88^\circ$.

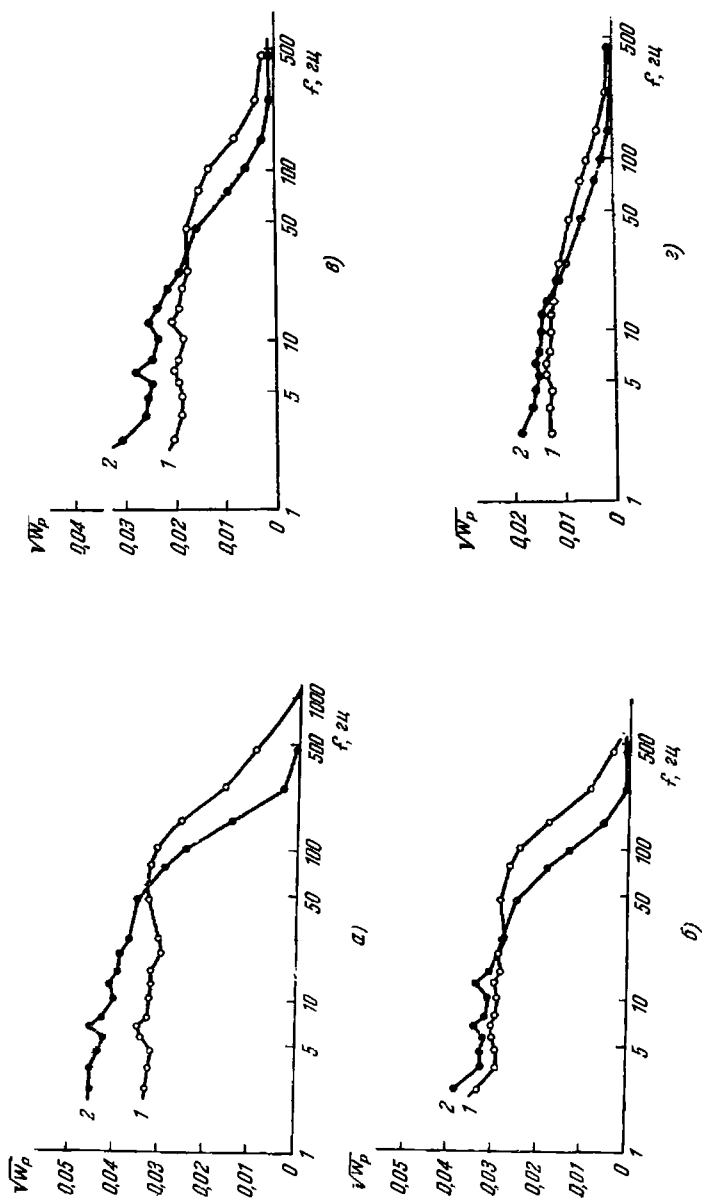


Рис. 90. Частотные спектры флуктуаций светового потока для телескопов с различными диаметрами:
 а — $D = 2,5$ см; б — $D = 7,6$ см; в — $D = 15$ см; г — $D = 32$ см; 1 — зима, 2 — лето.

мерцания достаточно вычислить коэффициент корреляции между флуктуациями амплитуды для такого идеализированного случая, когда через атмосферу в одном направлении (без рефракции) распространяются две плоские монохроматические волны (с длинами волн λ_1 и λ_2), а точки наблюдения находятся на расстоянии ρ ($\Delta\lambda$, θ) друг от друга в плоскости, перпендикулярной лучам. Исходным является уравнение метода плавных возмущений

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + 2ik \frac{\partial \Phi}{\partial x} + 2k^2 n_1(x, y, z) = 0, \quad (7)$$

описывающее возмущения амплитуды A и фазы S плоской монохроматической волны, распространяющейся вдоль оси x . Здесь $\text{Re } \Phi = \ln A - \langle \ln A \rangle \equiv \chi$.

Записывая решение (7) в спектральной форме (см. 8.46), имеем

$$\chi(L, y, z) = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\kappa_2 y + \kappa_3 z)} \left\{ k_1 \int_0^L \left[\sin \frac{\kappa^2(L-x)}{2k_1} u_n(d\kappa_2, d\kappa_3, x) \right] dx \right\}. \quad (8)$$

Умножая (8) на аналогичное уравнение, записанное для другой точки наблюдения и другой длины волны $\lambda_2 = \frac{2\pi}{k_2}$, и усредняя, после некоторых преобразований, в процессе выполнения которых существенно используется условие $\lambda \ll \lambda_0$, получим

$$\begin{aligned} \langle \chi(M_1) \chi(M_2) \rangle &= \pi k_1 k_2 \int_0^{\infty} e^{i\kappa \rho (\Delta\lambda, \theta)} \kappa d\kappa \times \\ &\times \iint \left[\cos \frac{\kappa^2(L-\eta)}{2\tilde{k}} - \cos \frac{\kappa^2(L-\eta)}{2k} \right] F(\kappa_2, \kappa_3, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (9) \end{aligned}$$

где $\frac{1}{\tilde{k}} = \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}$, $\frac{1}{k} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right)$ и $F(\kappa_2, \kappa_3, \xi, \eta)$ — двумерная спектральная функция флуктуаций показателя преломления.

Интеграл (9) может быть выражен через корреляционную функцию флуктуаций амплитуды монохроматической волны. Действительно, полагая $k_1 = k_2 = k$ и $\tilde{k}^{-1} = 0$, получим

$$\begin{aligned} \langle \chi(M_1) \chi(M_2) \rangle &\equiv B_A(\rho, k) = \\ &= \pi k^2 \int_0^{\infty} e^{i\kappa \rho (\Delta\lambda, \theta)} \kappa d\kappa \iint \left[1 - \cos \frac{\kappa^2(L-\eta)}{k} \right] F(\kappa_2, \kappa_3, \xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (10) \end{aligned}$$

где $B_A(\rho, k)$ — корреляционная функция флуктуаций логарифма амплитуды плоской монохроматической волны с $\lambda = \frac{2\pi}{k}$. Легко видеть, что интеграл (9) может быть представлен в виде разности двух функций типа (10):

$$\langle \chi(M_1) \chi(M_2) \rangle = \frac{k_1 k_2}{k^2} B_A(\rho(\Delta\lambda, \theta), k) - \frac{k_1 k_2}{4\tilde{k}^2} B_A(\rho(\theta, \Delta\lambda), 2\tilde{k}). \quad (11)$$

Здесь $B_A(\rho, 2\tilde{k})$ — корреляционная функция флуктуаций логарифма амплитуды некоторой фиктивной волны с длиной волны $\frac{2\pi}{2\tilde{k}} = \frac{1}{2}(\lambda_1 - \lambda_2)$. Функция $B_A(\rho, k)$ для монохроматической волны была найдена выше. В случае, когда $\lambda_0 \ll \sqrt{\lambda L} \ll L_0$, где L_0 — внешний масштаб турбулентности (практически в задаче о мерцании звезд это условие всегда выполняется), имеет место формула

$$B_A(\rho, k) = 0,56 k^{7/6} (\sec \theta)^{11/6} b_A \left(\frac{\rho}{\sqrt{\lambda H \sec \theta}} \right) \int_0^\infty C_n^2(z) z^{5/6} dz, \quad (12)$$

где b_A — коэффициент корреляции флуктуаций логарифма амплитуды; H — толщина (по вертикали) оптически активного слоя атмосферы.

Найдем коэффициент корреляции $R(\Delta\lambda, \theta)$ между флуктуациями логарифма амплитуды для волн с длинами λ_1 и λ_2 . Воспользовавшись формулами (6) и (11), получим

$$R(\Delta\lambda, \theta) = (1 - \varepsilon^2)^{-3/12} \left[b_A \left(\frac{\rho(\Delta\lambda, \theta)}{\sqrt{\lambda H \sec \theta}} \right) - \varepsilon^{5/6} b_A \left(\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \frac{\rho(\Delta\lambda, \theta)}{\sqrt{\lambda H \sec \theta}} \right) \right], \quad (13)$$

где введено обозначение $\varepsilon = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_2 + \lambda_1}$.

На рис. 91 приведены значения $R(\Delta\lambda, \theta)$ для различных θ , построенные по формуле (13). В качестве b_A взята функция, рассчитанная для случая, когда флуктуации показателя преломления подчиняются закону двух третей. Для $\sqrt{\lambda H}$ принято значение 10 см, $\rho(\Delta\lambda, \theta)$ подсчитывалось по формуле (6) при $z = 10$ км. На этом же графике помещены экспериментальные точки, полученные в Пулковской обсерватории при $\theta = 76^\circ, 65^\circ, 50^\circ$ и 40° . Экспериментальные данные находятся в удовлетворительном согласии с теоретическими кривыми.

Хроматическим мерцанием объясняется и тот факт, что величина мерцания, наблюдаемого в интегральном свете при

помощи достаточно малого по диаметру телескопа (диаметром до 6—7 см), уменьшается с ростом зенитного расстояния при $\theta > 60^\circ$.

Пусть $I(\lambda)$ — спектральная плотность интенсивности света. Тогда интегральный световой поток J равен

$$J = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} I(\lambda) d\lambda,$$

а средний квадрат флуктуаций J выражается формулой

$$\langle J'^2 \rangle = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \langle I'(\lambda) I'(\lambda') \rangle d\lambda d\lambda',$$

т. е. зависит от корреляционной функции флуктуаций спектральной интенсивности светового потока в разных участках спектра. Для малых флуктуаций (что практически выполняется в большинстве случаев) $\langle I'(\lambda) I'(\lambda') \rangle$ пропорционально $R(\Delta\lambda, \theta)$. Пользуясь формулой (13), можно рассчитать функцию $R(\theta)$, равную отношению среднего квадрата флуктуаций интегрального светового потока в диапазоне (λ_1, λ_2) к среднему квадрату флуктуаций монохроматического света с длиной волны $\lambda_0 = \frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2)$. (Средний квадрат флуктуаций монохроматического светового потока выражается формулой (4)).

$R(\theta)$ можно определить из экспериментальных данных двумя независимыми путями. С одной стороны, зная функцию

$$G = f\left(\frac{D}{\sqrt{\lambda_0 H \sec \theta}}\right),$$

ее можно построить на основе экспериментальной зависимости $\sigma_I^2 = \varphi(\sec \theta)$, сравнивая ее с формулой (4). С другой стороны, эту функцию можно найти как отношение мерцания в интегральном свете к мерцанию в монохроматическом свете.

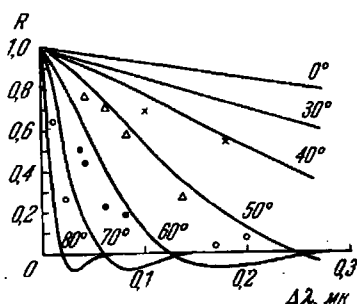


Рис. 91. Коэффициент корреляции флуктуаций интенсивности света в зависимости от разности длин волн при различных зенитных расстояниях.

Точками отмечены экспериментальные данные:
 ○ — $\theta = 76^\circ$; ● — $\theta = 65^\circ$; △ — $\theta = 50^\circ$; × — $\theta = 40^\circ$.

На рис. 92 сплошной линией изображена функция $F(\theta)$, полученная на основании (13) путем теоретических расчетов для $\lambda_1 = 0,3$ мкм, $\lambda_2 = 0,6$ мкм. На этом же графике приведены экспериментальные точки. Звездочки — полученные в Пулковской обсерватории (Л. Н. Жуковой) значения отношения мерцания в интегральном свете к мерцанию в узком участке спектра (шириной 90 \AA). Остальные точки — результаты обработки полученных различными авторами зависимостей мерцания в интегральном свете от зенитного расстояния при помощи формулы (4)

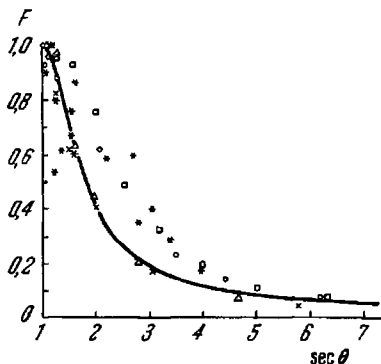


Рис. 92. Отношение F среднего квадрата относительных флуктуаций интенсивности света в диапазоне длин волн (λ_1, λ_2) к среднему квадрату относительных флуктуаций интенсивности монохроматического света длины волны $\lambda_0 = \frac{\lambda_1 + \lambda_2}{2}$ как функция зенитного угла.

Сплошная кривая — теоретическая, точки — результат измерений.

уменьшения мерцания в интегральном свете при увеличении зенитного расстояния может быть объяснен хроматическим мерцанием.

Таким образом, все основные закономерности мерцания звезд находят естественное объяснение в теории.

Рассмотрим теперь эксперименты по наблюдению «дрожания» изображений звезд. В разделе А была получена формула

$$\sigma_x^2 = 2,84 C_n^2 L (2R)^{-1/2}.$$

Для случая неоднородной турбулентности она имеет вид (25.48)

$$\sigma_x^2 = 2,84 (2R)^{-1/2} \int_0^\infty C_n^2(r) dx,$$

- а) $D = 15''$ [142];
- б) $D = 10''$ [143];
- в) $D = 3''$ [141];
- г) $D = 12''$ [141].

Входящая в $G(D/\sqrt{\lambda_0 H \sec \theta})$ величина $\sqrt{\lambda_0 H}$ была принята равной 10 см. Все величины нормированы на 1 при $\theta = 0$. Хорошее согласие полученных независимыми способами экспериментальных данных между собой и с теоретической кривой свидетельствует, что эффект

а в случае, когда C_n^2 зависит лишь от высоты,

$$\sigma_\alpha^2 = 2,84 (2R)^{-1/2} \sec \theta \int_0^\infty C_n^2(z) dz. \quad (14)$$

Из этой формулы следует, что неоднородности, находящиеся на различных высотах пад поверхностью земли, входят в σ_α^2 с одинаковым весом. Однако, так как обычно $C_n^2(z)$ имеет максимум

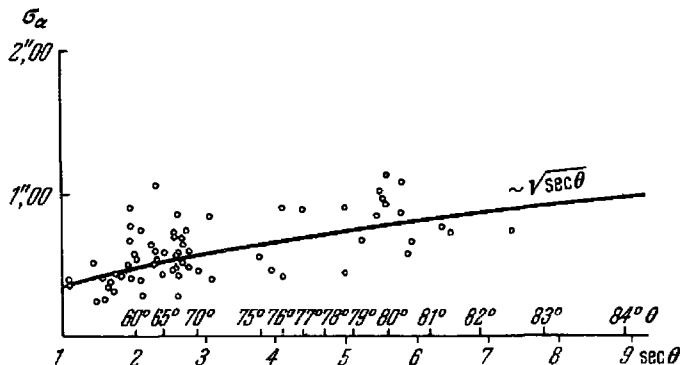


Рис. 93. Зависимость среднеквадратичного значения флуктуаций угла прихода света звезд от зенитного угла.

при малых z , в основном «дрожание» изображений обусловлено именно нижними слоями атмосферы (большое значение могут иметь даже флуктуации показателя преломления в непосредственной близости от пункта наблюдения). Это, в частности, объясняет отсутствие корреляции между мерцанием и «дрожанием» изображений звезд.

Зависимость σ_α от θ дается множителем $\sec \theta$. Эта зависимость в среднем оправдывается экспериментально (рис. 93); однако в отдельных наблюдениях довольно часто имеются отступления от этой формулы, которые, вероятно, можно объяснить сильным влиянием местных условий (см. [151—153]).

Весьма обстоятельное исследование «дрожания» изображения края Солнца было выполнено в работе [173]. Здесь была применена аппаратура, описанная выше при изложении результатов измерений «дрожания» искусственного источника света в приземном слое.

Измерения проводились в жаркие летние дни с хорошо развитой конвекцией. В этом случае профиль пульсаций температуры

выражается полученной в гл. 1 формулой

$$C_n^2(z) = C_n^2(z_0) \left(\frac{z_0}{z} \right)^{4/3}.$$

Измеряя одновременно с флуктуациями угла прихода профили скорости ветра и температуры в приземном слое атмосферы, можно по этой формуле рассчитать ожидаемую величину среднего квадрата флуктуаций угла прихода лучей. Результаты сопоставления измеренных и рассчитанных величин приведены на рис. 94. Здесь по оси ординат отложено среднеквадратичное значение флуктуаций угла прихода, приведенное к зениту. По оси абсцисс отложены вычисленные на основании метеорологических наблюдений в приземном слое атмосферы значения среднеквадратичной величины флуктуаций угла прихода (в угловых секундах). Крестиками на графике отмечены средние по группам близких точек значения.

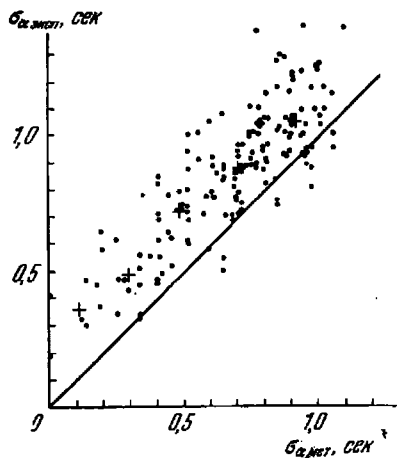


Рис. 94. Сопоставление измеренных ($\sigma_{\text{эксп}}$) и рассчитанных на основании метеорологических измерений ($\sigma_{\text{мет}}$) среднеквадратичных значений флуктуаций угла прихода света от края диска Солнца.

Приведенный график свидетельствует о том, что изложенная теория дает вполне удовлетворительное количественное описание явления «дрожания» изображений.

В этой же работе изучались частотные спектры флуктуаций угла прихода. Сигнал с выхода прибора, измерявшего мгновенное положение края диска Солнца, подавался на 30-канальный частотный анализатор, аналогичный применявшемуся в экспериментах с наземным источником света. Результаты измерений сведены на графике (рис. 95). Здесь по оси ординат отложено произведение нормированной на 1 спектральной плотности флуктуаций угла прихода на частоту флуктуаций (в логарифмическом масштабе). По оси абсцисс отложена частота флуктуаций, также в логарифмическом масштабе. Сплошная кривая изображает теоретическую зависимость, полученную в разделе А. Точками обозначены экспериментальные данные, усредненные по нескольким десяткам частотных спектров, полученных при различных условиях. При усреднении различных спектров все они

строились в безразмерных координатах $fw_{\alpha}(f)$, $\frac{fb}{v_{\perp}}$, в которых максимум спектра приходится на безразмерную частоту $\frac{fb}{v_{\perp}} = 0,22$. Для того чтобы дать представление о реальных частотах флуктуаций, частота на рис. 95 приведена в герцах, но отмечено положение характерной частоты $0,22 v_{\perp}/b$, соответствующей

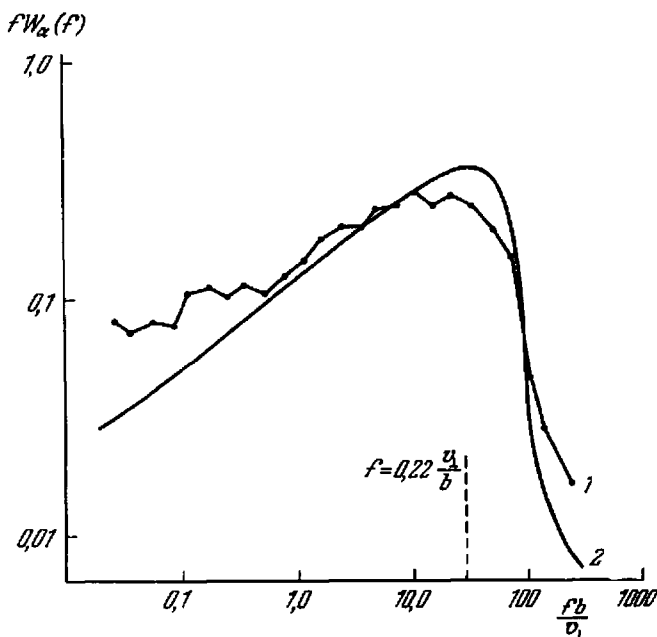


Рис. 95. Эмпирический частотный спектр флуктуаций угла прихода света от края диска Солнца (кривая 1) и теоретическая кривая (2).

максимуму произведения $fw_{\alpha}(f)$. (Чтобы получить на основании приведенного обобщенного спектра реальный спектр флуктуаций угла прихода при конкретных значениях b и v_{\perp} , необходимо вычислить характерную частоту $0,22 v_{\perp}/b$ и затем так сдвинуть частотную ось, чтобы эта частота заняла правильное положение на шкале.)

В заключение этого параграфа произведем оценку величины C_n^2 на основании данных о мерцании и «дрожании» изображений звезд.

Сначала произведем оценку на основании данных о мерцании. Удобнее всего исходить из формулы (3), считая, что

$$\int_0^{\infty} C_n^2(z) z^{3/2} dz = \frac{6}{11} C_{n\text{ ср}}^2 H^{11/2},$$

где $C_{n\text{ ср}}^2$ — среднее по слою толщиной H значение C_n^2 , вычисленное с весом $z^{3/2}$. Согласно экспериментальным данным $\sigma_I^2 = 0,2$ для $\theta = 0$ и $D \ll \sqrt{\lambda H}$. Подставляя найденное выше значение $H = 10$ км, $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\lambda = 0,5$ мкм, получаем $C_n \approx 10^{-3} N\text{-ед} \cdot \text{см}^{-1/2}$. Эта величина относится к высоким слоям атмосферы ($z \sim 10$ км).

Из наблюдений «дрожания» изображений звезд в телескопах можно найти величину C_n^2 , характеризующую более низкие слои атмосферы. Предварительно необходимо определить порядок величины эффективной толщины слоя атмосферы, ответственного за это явление. Такую оценку можно произвести, сравнивая с теорией данные о коэффициенте корреляции флуктуаций угла прихода света от звезд с близкими угловыми координатами. В гл. 3 была получена формула для коэффициента корреляции флуктуаций угла прихода двух лучей, расходящихся под углом γ :

$$b(\gamma) = \begin{cases} \frac{3}{16} \frac{(1+x)^{3/2} - (1-x)^{3/2} - 2x^{3/2}}{x} & \text{при } x < 1, \\ \frac{3}{16} \frac{(x+1)^{3/2} + (x-1)^{3/2} - 2x^{3/2}}{x} & \text{при } x > 1, \end{cases}$$

где $x = \frac{2L}{b} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2}$, b — диаметр телескопа (см. (23. 43) на стр. 267).

Из этой формулы видно, что характерный угол корреляции определяется величиной b/L , т. е. отношением диаметра зрачка телескопа к эффективной толщине слоя атмосферы, вызывающего «дрожание» изображения. Исходя из приведенных в работе И. Г. Колчинского [154] экспериментальных данных об угловой корреляции флуктуаций угла прихода, можно оценить величину L как 0,5—1 км.

Применим теперь формулу (14) и подставим в нее $\sigma_a \approx \approx 1,7 \cdot 10^{-6}$ рад, $2R = 40$ см, $L = 0,5$ км. Тогда для среднего по слою значения C_n получим оценку $C_n \sim 10^{-2} N\text{-ед} \cdot \text{см}^{-1/2}$. Это значение C_n хорошо согласуется с данными таблицы, приведенной в предыдущем параграфе.

ИССЛЕДОВАНИЕ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ВОЛН В СРЕДЕ СО СЛУЧАЙНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ МЕТОДАМИ КВАНТОВОЙ ТЕОРИИ ПОЛЯ

А. РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СРЕДЕ С СИЛЬНЫМИ ФЛУКТУАЦИЯМИ

Рассмотрение всех задач в предыдущих главах в основном велось при помощи той или иной модификации метода возмущений. Естественно, что получаемые таким образом результаты справедливы лишь в случае слабых флуктуаций показателя преломления.

В настоящей главе мы рассмотрим некоторые методы, выходящие за рамки теории возмущений. Задача о распространении волн в среде со случайными неоднородностями имеет много общего с квантовой теорией поля. Эта аналогия основывается на том факте, что задачи квантовой теории поля требуют для своего разрешения нахождения решений уравнений поля в среде с произвольными внешними источниками, взаимодействующими с полем, с последующим усреднением по квантовым флуктуациям источников. Эта задача во многом аналогична рассматриваемой нами. Однако задача о распространении волн в среде со случайными неоднородностями существенно проще, поскольку в квантовой теории поля перестановочные функции, аналогичные корреляционным функциям нашей задачи, всегда сингулярны, что приводит к появлению расходимостей. В задаче же о распространении волн в случайно неоднородной среде такие расходимости не появляются.

Использование математических методов, развитых в квантовой теории поля, позволяет выйти за рамки теории возмущений и получить решения, справедливые и в случае сильных флуктуаций. При изложении материала этой главы мы не предполагаем, что читатель знаком с этими методами.

Следует также отметить, что излагаемая в этой главе теория еще далека от своего завершения и носит в значительной степени методический характер. Однако ввиду чрезвычайной перспективности указанных методов мы сочли целесообразным включить в книгу и эту главу.

В основном изложение ведется применительно к скалярному уравнению. Однако обобщение на случай уравнений Максвелла не представляет труда и может быть легко выполнено.

§ 60. Анализ рядов теории возмущений

Рассмотрим уравнение

$$\Delta\psi + k^2(1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}))\psi = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (1)$$

где $\varepsilon_1(\mathbf{r})$ — случайная функция координат. Введем оператор $L_0(\mathbf{r}) = \Delta(\mathbf{r}) + k^2$. Оператор $L_0^{-1} = M_0$, обратный L_0 , можно получить из уравнения $L_0(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ и условий излучения. Решение этого уравнения, как известно, имеет вид

$$\varphi(\mathbf{r}) = \int G_0(\mathbf{r}, \rho) f(\rho) d^3\rho,$$

где

$$G_0(\mathbf{r}, \rho) = -\frac{e^{ik|\mathbf{r}-\rho|}}{4\pi|\mathbf{r}-\rho|}. \quad (2)$$

Решение уравнения $L_0(\mathbf{r})\varphi(\mathbf{r}) = f(\mathbf{r})$ можно записать в символической форме при помощи оператора $M_0 = L_0^{-1}$ как $\varphi(\mathbf{r}) = M_0(\mathbf{r})f(\mathbf{r})$. Сравнивая эту формулу с явным видом решения для φ , мы видим, что M_0 — интегральный оператор с ядром (2). Заметим, что запись $M_0 f(\mathbf{r})$ означает, что преобразованная оператором M_0 функция f , т. е. функция $M_0 f$, берется в точке \mathbf{r} . Правильнее было бы писать $(M_0 f)(\mathbf{r})$, где $(M_0 f)$ означает новую функцию, однако, имея в виду это замечание, мы будем употреблять простую запись $M_0 f(\mathbf{r})$.

Очевидно, что

$$G_0(\mathbf{r}, \rho) = M_0 \delta(\mathbf{r} - \rho). \quad (3)$$

Запишем уравнение (1) в виде

$$L_0(\mathbf{r})\psi = -k^2\varepsilon_1(\mathbf{r})\psi(\mathbf{r}) + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и подействуем на него оператором M_0 :

$$\begin{aligned} \psi(\mathbf{r}) &= -k^2 M_0 \varepsilon_1(\mathbf{r}) \psi(\mathbf{r}) + G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \\ &= -k^2 \int G_0(\mathbf{r}, \rho) \varepsilon_1(\rho) \psi(\rho) d^3\rho + G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \end{aligned} \quad (4)$$

Уравнение (4) представляет собой интегральное уравнение, эквивалентное (1). Решение (4) можно получить методом последовательных итераций, многократно подставляя в правую часть (4) вместо $\psi(\rho)$ выражение, даваемое формулой (4).

Удобнее, однако, получить решение (4) в символической форме. Записывая это уравнение в виде

$$[1 + k^2 M_0 \varepsilon_1] \psi = G_0(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = M_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

и вводя оператор

$$[1 + k^2 M_0 \varepsilon_1]^{-1} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} (-k^2 M_0 \varepsilon_1)^n,$$

получим

$$\begin{aligned} \psi(r) &= \sum_{n=0}^{\infty} (-k^2 M_0 \varepsilon_1)^n M_0 \delta(r - r_0) = \\ &= [M_0 - k^2 M_0 \varepsilon_1 M_0 + k^4 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 - \dots] \delta(r - r_0). \end{aligned} \quad (5)$$

В (5) каждый из операторов M_0 действует на все сомножители, стоящие справа от него. Например,

$$M_0 \varepsilon_1 M_0 f(r) = \iiint G_0(r, \rho) \varepsilon_1(\rho) G_0(\rho, \rho') f(\rho') d^3\rho d^3\rho'.$$

и т. д. Ряд (5) является рядом теории возмущений. В дальнейшем мы будем интересоваться средним значением $\langle \psi(r) \rangle$ и корреляционной функцией $\langle \psi(r_1) \psi^*(r_2) \rangle$. Рассмотрим сначала $\langle \psi \rangle$. Предположим, что случайное поле ε_1 является гауссовским. Это означает, что $\langle \varepsilon_1 \rangle = 0$, $\langle \varepsilon_1(r_1) \varepsilon_1(r_2) \varepsilon_1(r_3) \rangle = 0$ и вообще $\langle \varepsilon_1(r_1) \dots \varepsilon_1(r_{2n+1}) \rangle = 0$, а моменты четного порядка выражаются через вторые моменты:

$$\begin{aligned} \langle \varepsilon_1(r_1) \varepsilon_1(r_2) \varepsilon_1(r_3) \varepsilon_1(r_4) \rangle &= \langle \varepsilon_1(r_1) \varepsilon_1(r_2) \rangle \times \\ &\times \langle \varepsilon_1(r_3) \varepsilon_1(r_4) \rangle + \langle \varepsilon_1(r_1) \varepsilon_1(r_3) \rangle \cdot \langle \varepsilon_1(r_2) \varepsilon_1(r_4) \rangle + \\ &+ \langle \varepsilon_1(r_1) \varepsilon_1(r_4) \rangle \cdot \langle \varepsilon_1(r_2) \varepsilon_1(r_3) \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

Аналогичную формулу можно написать и для моментов шестого порядка (она содержит 15 слагаемых, каждое из которых представляет собой произведение трех корреляционных функций) и т. д. Момент порядка $2n$ выражается через сумму $(2n - 1)!!$ слагаемых, каждое из которых является произведением n корреляционных функций, причем среди всех $(2n - 1)!!$ слагаемых встречаются все возможные сочетания величин $\varepsilon_1(r_k)$, $\varepsilon_1(r_l)$. Пользуясь этим правилом, произведем усреднение формулы (5).

Величина $\langle \psi(r) \rangle = \tilde{G}(r, r_0)$ является усредненной функцией Грина*):

$$\begin{aligned} \tilde{G}(r, r_0) &= [M_0 + k^2 \langle M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \rangle + \\ &+ k^4 \langle M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \rangle + \dots] \delta(r - r_0). \end{aligned} \quad (7)$$

*) Напомним, что $\psi(r)$, являясь решением уравнения (1) с правой частью $\delta(r - r_0)$, по определению есть функция Грина этого уравнения.

Первое слагаемое в (7) равно $M_0 \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$. Рассмотрим подробнее второе слагаемое:

$$k^4 \langle M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \rangle \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) = \\ = \left\langle k^4 \iiint G_0(\mathbf{r}, \rho_1) \varepsilon_1(\rho_1) G_0(\rho_1, \rho_2) \varepsilon_1(\rho_2) G_0(\rho_2, \rho_3) \delta(\rho_3 - \mathbf{r}_0) \times \right. \\ \left. \times d^3 \rho_1 d^3 \rho_2 d^3 \rho_3 \right\rangle = k^4 \iiint G_0(\mathbf{r}, \rho_1) G_0(\rho_1, \rho_2) G_0(\rho_2, \mathbf{r}_0) \times \\ \times \langle \varepsilon_1(\rho_1) \varepsilon_1(\rho_2) \rangle d^3 \rho_1 d^3 \rho_2. \quad (8)$$

Сопоставим выражениям, входящим в (7), графики, которые будем строить следующим образом. Функцию $G_0(\rho_1, \rho_2)$ будем изображать прямой линией, начало и конец которой находятся в точках ρ_1, ρ_2 :

$$G_0(\rho_1, \rho_2) \sim \overline{\rho_1 \rho_2}.$$

Множители k^2 будем изображать точками, помещаемыми в те места диаграммы, к которым относятся множители $\varepsilon_1(\rho_i)$

$$k^2 \sim \bullet.$$

(вершины графика), а пунктирная черта будет соединять те точки, для которых функции $\varepsilon_1(\rho_1)$ и $\varepsilon_1(\rho_2)$ входят под общий знак усреднения

$$k^4 \langle \varepsilon_1(\rho_1) \varepsilon_1(\rho_2) \rangle \sim \bullet \text{---} \bullet$$

Выражение (8) изобразится при помощи графика

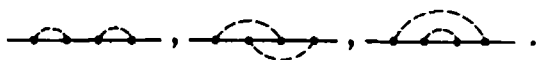


По всем внутренним вершинам графика (ρ_1 и ρ_2) производится интегрирование. Таким образом, по интегралу (8) можно единственным образом построить график (диаграмму Фейнмана) и, наоборот, по диаграмме Фейнмана восстановить интеграл. При помощи этого же графика мы будем изображать ядро интегрального оператора, действующего на $\delta(\rho_0 - \mathbf{r}_0)$:

$$k^4 M_0(\mathbf{r}, \rho_1) \langle \varepsilon_1(\rho_1) M_0(\rho_1, \rho_2) \varepsilon_1(\rho_2) \rangle M_0(\rho_2, \mathbf{r}_0) \sim \overline{\rho_1 \rho_2} \text{---} \rho_2 \mathbf{r}_0$$

Рассмотрим следующий член формулы (7). В нем под интегралом содержатся четыре множителя ε_1 , взятые в разных точках. Применяя к ним формулу (6), мы разобьем интеграл на три

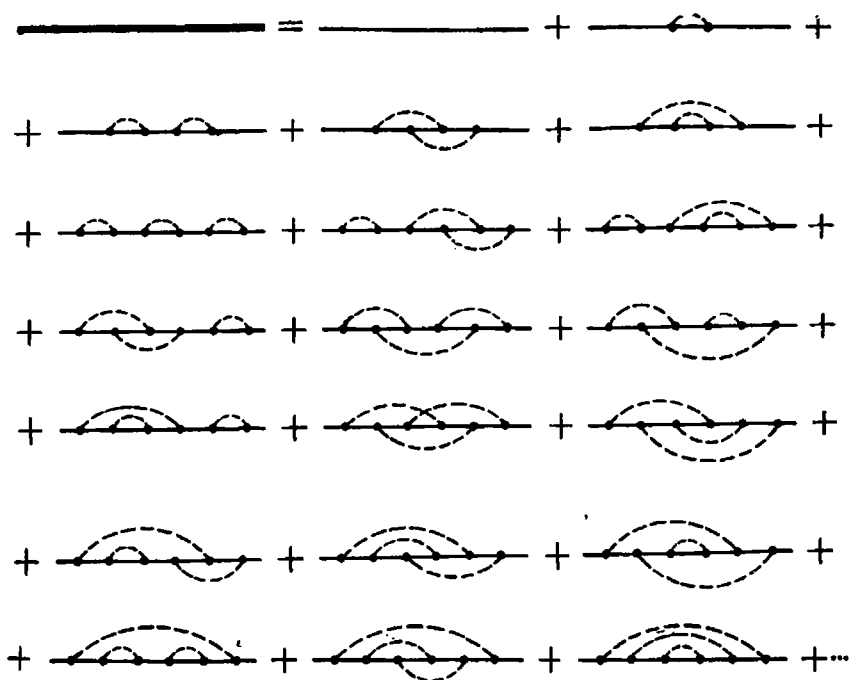
слагаемых, которые изобразятся диаграммами четвертого (по числу вершин) порядка:



Если функцию $\tilde{G}(r, r_0)$ изображать жирной линией,

$$\tilde{G}(r, r_0) \sim \overline{r - r_0},$$

то разложение (7) представится в виде



Закон построения высших членов ряда ясен из этого графика. В диаграммах $2l$ -го порядка следует соединить вершины попарно всеми возможными способами и взять сумму всех таких графиков.

Диаграммы, входящие в \tilde{G} , можно разделить на два класса: слабо связанных и сильно связанных. Слабо связанные диаграммы распадаются на две части при разрыве одной линии G_0 . К ним,

например, относятся диаграммы



и т. д.

Остальные диаграммы — сильно связанные. Из ряда (7) можно выделить совокупность слабо связанных диаграмм. Проще всего это можно сделать, если представить $\psi(\mathbf{r})$ в виде

$$\psi(\mathbf{r}) = \langle \psi(\mathbf{r}) \rangle + \varphi(\mathbf{r}), \quad \langle \varphi \rangle = 0. \quad (9)$$

Подставляя (9) в уравнение (1), получим

$$L_0(\mathbf{r}) \langle \psi(\mathbf{r}) \rangle + L_0(\mathbf{r}) \varphi + k^2 \varepsilon_1 \langle \psi \rangle + k^2 \varepsilon_1 \varphi = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (10)$$

Усредняя это уравнение, получим (учитывая, что $\langle \varepsilon_1 \rangle = \langle \varphi \rangle = 0$)

$$L_0(\mathbf{r}) \langle \psi \rangle + k^2 \langle \varepsilon_1 \varphi \rangle = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0). \quad (11)$$

Вычитая (11) из (10), найдем

$$L_0(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r}) + k^2 \varepsilon_1 \langle \psi \rangle + k^2 [\varepsilon_1 \varphi - \langle \varepsilon_1 \varphi \rangle] = 0. \quad (12)$$

Уравнения (11), (12) эквивалентны исходному уравнению (1).

Поддействуем на (12) оператором M_0 :

$$\varphi(\mathbf{r}) = -k^2 M_0 \varepsilon_1 \langle \psi \rangle - k^2 M_0 [\varepsilon_1 \varphi - \langle \varepsilon_1 \varphi \rangle]. \quad (13)$$

Интегральное уравнение (13) можно решать последовательными итерациями. Это приводит к ряду

$$\begin{aligned} \varphi = & -k^2 M_0 \varepsilon_1 \langle \psi \rangle + k^4 M_0 (\varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 - \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle) \langle \psi \rangle - \\ & - k^6 (M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 - M_0 \varepsilon_1 M_0 \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle) \langle \psi \rangle + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

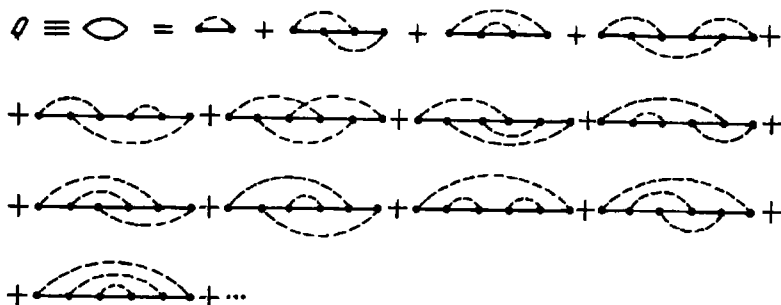
Умножим (14) на $k^2 \varepsilon_1$ и усредним:

$$\begin{aligned} k^2 \langle \varepsilon_1 \varphi \rangle = & [-k^4 \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle - k^6 (\langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle - \\ & - \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle M_0 \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle) - \dots] \langle \psi \rangle = -Q \langle \psi \rangle, \end{aligned} \quad (15)$$

где Q — интегральный оператор (с ядром, которое мы также обозначим через $Q = Q(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$):

$$Q = k^4 \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle + k^6 [\langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle - \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle M_0 \langle \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 \rangle] + \dots$$

Оператор Q (являющийся аналогом так называемого массового оператора квантовой теории поля) представляется диаграммой



За счет выделения из ψ средней части $\langle \psi \rangle$ оператор Q не содержит слабо связанных диаграмм. Подставим (15) в уравнение (11):

$$L_0 \langle \psi \rangle - Q \langle \psi \rangle = (L_0 - Q) \langle \psi \rangle = \delta(r - r_0). \quad (16)$$

Оно имеет вид $L \langle \psi \rangle = \delta(r - r_0)$, где

$$L = L_0 - Q. \quad (17)$$

Пусть $M = L^{-1}$, так что

$$M \delta(r - r_0) = \langle \psi \rangle = \tilde{G}(r, r_0). \quad (18)$$

Из (17) следует

$$Q = L_0 - L = M_0^{-1} - M^{-1}. \quad (19)$$

Рассмотрим выражение

$$M_0 + M_0 Q M = M_0 + M_0 (M_0^{-1} - M^{-1}) M = M_0 + M - M_0 = M.$$

Таким образом, мы получаем формулу, связывающую M и Q (уравнение Дайсона):

$$M = M_0 + M_0 Q M. \quad (20)$$

Применив (20) к δ -функции, получаем уравнение

$$\tilde{G}(r, r_0) = G_0(r, r_0) + M_0 Q \tilde{G}(r, r_0). \quad (21)$$

В графической форме (20) имеет вид

$$\text{thick line} = \text{thin line} + \text{thin line} \text{ with loop} \text{ thick line} \quad (20')$$

В том случае, если Q известно, уравнение (21) может быть решено. Таким образом, \tilde{G} может быть выражено только через сильно связанные диаграммы, входящие в Q .

Покажем графически, что решение уравнения (20') действительно дает \tilde{G} . Уравнение (20') можно графически решать при помощи итераций, подставляя (20') в правую часть (20'):

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} = \text{---} +$$

$$+ \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots$$

Здесь первое слагаемое — G_0 , во второе входят все сильно связанные диаграммы, в третье — все слабо связанные диаграммы, распадающиеся на две части (каждая из которых сильно связана), в четвертое — слабо связанные диаграммы, которые могут быть разделены на три части и т. д.

Можно дать также графический вывод уравнения Дайсона (в дальнейшем аналогичный вывод будет проведен для корреляционных функций).

Всю совокупность диаграмм, изображающих \tilde{G} , можно разбить на следующие классы:

1. Сильно связанные диаграммы

$$\text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} + \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} + \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \dots$$

Эту совокупность диаграмм можно представить так:

$$\text{---} \circ \text{---}$$

2. Слабо связанные диаграммы, содержащие лишь два сильно связанных элемента:

$$\text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} + \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} + \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} +$$

$$+ \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} + \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} \overset{\curvearrowright}{\circ} \text{---} + \dots$$

Очевидно, что эту совокупность диаграмм можно представить в виде

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$$

3. Слабо связанные диаграммы, содержащие три сильно связанных элемента. Эта совокупность диаграмм представима в виде

$$\text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---}$$

и т. д. Ясно, что

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} \circ \text{---} + \dots$$

Но это выражение представляет собой решение уравнения

$$\text{---} = \text{---} + \text{---} \circ \text{---},$$

если последнее решать методом итераций.

Вернемся к уравнению (21). Пусть корреляционная функция $B_z(r_1, r_2)$ зависит лишь от $r_1 - r_2$ (статистическая однородность). В этом случае, так как $G_0(r_1, r_2) = G_0(r_1 - r_2)$, ядро оператора Q также зависит лишь от $r_1 - r_2$: $Q(r_1, r_2) = Q(r_1 - r_2)$. В этом случае уравнение (21) принимает вид

$$\begin{aligned} \tilde{G}(r_1 - r_2) &= G_0(r_1 - r_2) + \\ &+ \iint G_0(r_1 - \rho_1) Q(\rho_1 - \rho_2) \tilde{G}(\rho_2 - r_2) d^3\rho_1 d^3\rho_2. \end{aligned} \quad (22)$$

Это уравнение может быть решено при помощи преобразования Фурье. Положим

$$\begin{aligned} \tilde{G}(r) &= \int \tilde{g}(x) e^{ixr} d^3x, \\ G_0(r) &= \int g_0(x) e^{ixr} d^3x, \\ Q(r) &= \int q(x) e^{ixr} d^3x. \end{aligned} \quad (23)$$

Найдем интеграл в правой части (22):

$$\begin{aligned} \iint G_0(r_1 - \rho_1) Q(\rho_1 - \rho_2) \tilde{G}(\rho_2 - r_2) d^3\rho_1 d^3\rho_2 &= \\ = \iiint e^{i[\kappa_1(r_1 - \rho_1) + \kappa_2(\rho_1 - \rho_2) + \kappa_3(\rho_2 - r_2)]} g_0(x_1) q(x_2) \tilde{g}(x_3) \times \\ \times d^3\rho_1 d^3\rho_2 d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 &= (8\pi^3)^2 \iiint \delta(x_2 - x_1) \delta(x_3 - x_2) \times \\ \times e^{i(x_1 r_1 - x_3 r_2)} g_0(x_1) q(x_2) \tilde{g}(x_3) d^3x_1 d^3x_2 d^3x_3 &= \\ = (8\pi^3)^2 \int g_0(x) q(x) \tilde{g}(x) e^{ix(r_1 - r_2)} d^3x. \end{aligned} \quad (24)$$

Подставляя (23) и (24) в уравнение (22), получим

$$\tilde{g}(x) = g_0(x) + (8\pi^3)^2 g_0(x) q(x) \tilde{g}(x), \quad (25)$$

откуда

$$\tilde{g}(x) = \frac{g_0(x)}{1 - (2\pi)^6 g_0(x) q(x)}. \quad (26)$$

Подставляя (26) в (23), имеем

$$\tilde{G}(r) = \int \frac{g_0(x) e^{ixr} d^3x}{1 - (2\pi)^6 g_0(x) q(x)}. \quad (27)$$

Функция $g_0(x)$ имеет вид


$$g_0(x) = \frac{1}{8\pi^3 (k^2 - x^2)} \quad (28)$$

(проще всего (28) можно получить, решая уравнение $\Delta G_0 + k^2 G_0 = \delta(r)$ при помощи преобразования Фурье). Величину k в (28) следует считать комплексной ($\text{Im } k > 0$), чем определяются правила обхода полюсов в (23) и обеспечиваются условия излучения. Следовательно,

$$\tilde{G}(r) = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{e^{ixr} d^3x}{k^2 - x^2 - 8\pi^3 q(x)} = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{e^{ixr} d^3x}{k^2 - x^2 - \int Q(\rho) e^{-i\rho r} d^3\rho}. \quad (29)$$

Мы, таким образом, получили вид решения для \tilde{G} . Однако в него входит неизвестная функция Q , определенная лишь в виде бесконечного ряда. Если в выражении для Q мы ограничимся

лишь первым членом разложения, т. е. заменим  на

 , то получаемое таким образом решение $G_1(r)$ пред-

ставится графиком (получаемым из предыдущего графика указанной заменой)

$$G_1 = \text{---} + \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} + \dots$$

Таким образом, даже учет лишь одного члена разложения для Q приводит к тому, что получаемое из (29) при $Q(r) \approx \approx Q_1(r) = k^4 G_0(r) B_2(r)$ приближенное решение суммирует бесконечную подпоследовательность ряда теории возмущений. Учитывая в Q следующий член разложения, т. е. полагая

$$\text{circle} \approx \text{arc} + \text{arc-arc},$$

получим

$$G_2 = \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \text{---} + \dots,$$

т. е. более обширную совокупность диаграмм. Используя формулу (29), можно получать явные выражения для функций G_1, G_2, \dots . Более подробно свойства функций G_1, G_2 и т. д. будут рассмотрены ниже, а сейчас обратимся к корреляционной функции

$$\langle \psi(\mathbf{r}_1) \psi^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \langle \psi(\mathbf{r}_1) \rangle \langle \psi^*(\mathbf{r}_2) \rangle + \langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi^*(\mathbf{r}_2) \rangle.$$

Произведение средних значений в данном случае нас не интересует, и мы рассмотрим лишь $\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi^*(\mathbf{r}_2) \rangle$. Усредняя (5) и вычитая усредненную формулу из неусредненной, найдем

$$\varphi(\mathbf{r}_1) = \{-k^2 M_0 \varepsilon_1 M_0 + k^4 [M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 - \langle M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \rangle] - \\ - k^6 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 + \dots\} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0), \quad (30)$$

$$\varphi^*(\mathbf{r}_2) = \{-k^{*2} M_0^* \varepsilon_1 M_0^* + k^{*4} [M_0^* \varepsilon_1 M_0^* \varepsilon_1 M_0^* - \langle M_0^* \varepsilon_1 M_0^* \varepsilon_1 M_0^* \rangle] - \\ - k^{*6} M_0^* \varepsilon_1 M_0^* \varepsilon_1 M_0^* \varepsilon_1 M_0^* + \dots\} \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0). \quad (31)$$

Перемножим уравнения (30) и (31) и усредним:

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \{|k|^4 \langle (M_0 \varepsilon_1 M_0) (M_0^* \varepsilon_1 M_0^*) \rangle + \\ + k^2 k^{*6} \langle (M_0 \varepsilon_1 M_0) (M_0^* \varepsilon_1 M_0^* \varepsilon_1 M_0^*) \rangle + \\ + |k|^8 \langle (M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0) (M_0^* \varepsilon_1 M_0^* \varepsilon_1 M_0^*) \rangle - \\ - |k|^8 \langle (M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0) \rangle \langle (M_0^* \varepsilon_1 M_0^* \varepsilon_1 M_0^*) \rangle + \\ + k^6 k^{*8} \langle (M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0 \varepsilon_1 M_0) (M_0^* \varepsilon_1 M_0^*) \rangle + \dots\} \delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0) \delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0). \quad (32)$$

В формуле (32) группа операторов, заключенных в круглые скобки, не действует на функции ε_1 , стоящие в другой круглой скобке. Группы операторов M_0 действуют на $\delta(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_0)$, а операторы M_0^* — на $\delta(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_0)$. Сопоставим формуле (32) диаграмму, на которой верхние линии и вершины изображают функции G_0 и множители k^2 , а нижние — функции G_0^* и k^{*2} . Тогда (32)

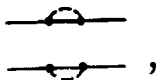
изобразится графиком (пунктирная линия по-прежнему изображает $B_z(r_1, r_2)$)

$$\begin{aligned}
 W(r_1, r_2; \rho_0, \rho'_0) &\equiv \frac{r_1}{r_2} \frac{\rho_0}{\rho'_0} = \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \\
 &+ \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \\
 &+ \text{diagram 7} + \text{diagram 8} + \text{diagram 9} + \dots, \quad (33)
 \end{aligned}$$

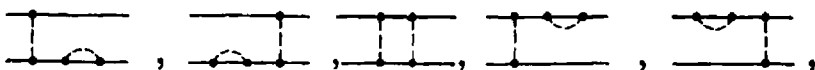
причем

$$\begin{aligned}
 \langle \varphi(r_1) \varphi^*(r_2) \rangle &= \iint W(r_1, r_2; \rho_0, \rho'_0) \delta(\rho_0 - r_0) \delta(\rho'_0 - r_0) d^3\rho_0 d^3\rho'_0 = \\
 &= W(r_1, r_2; r_0, r_0).
 \end{aligned}$$

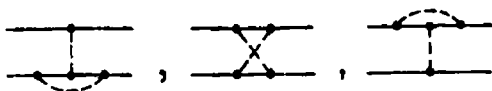
В результате выделения среднего значения $\langle \psi \rangle$ из этой совокупности диаграмм выпадают так называемые несвязные диаграммы типа



содержащие отдельные, не соединенные друг с другом части. Из графика, представляющего $\langle \varphi(r_1) \varphi^*(r_2) \rangle$ ясен закон построения высших членов разложения. Для построения диаграмм $2n$ -го порядка следует расположить одну вершину на верхней прямой, $(2n - 1)$ — на нижней и соединить их всеми возможными способами; затем берутся две вершины на верхней прямой, $(2n - 2)$ — на нижней и т. д.; всегда учитываются лишь связные диаграммы. Для диаграмм, представляющих $\langle \varphi(r_1) \varphi^*(r_2) \rangle$, также можно ввести понятия сильно и слабо связных. Диаграмма называется слабо связной, если ее можно разрывом двух сплошных линий (G_0 и G_0^*) разделить на две части, каждая из которых имеет, по крайней мере, две вершины. Остальные диаграммы будем называть сильно связными. Из диаграмм четвертого порядка слабо связными являются диаграммы



а сильно связными — диаграммы



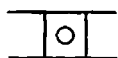
Выделим из W подпоследовательность сильно связных диаграмм

$$\begin{aligned}
 \omega(r_1, r_2; \rho_0, \rho'_0) &= \frac{r_1}{r_2} \square \circ \frac{\rho_0}{\rho'_0} = \text{[Diagram 1]} + \text{[Diagram 2]} + \text{[Diagram 3]} + \\
 &+ \text{[Diagram 4]} + \text{[Diagram 5]} + \text{[Diagram 6]} + \text{[Diagram 7]} + \text{[Diagram 8]} + \\
 &+ \text{[Diagram 9]} + \text{[Diagram 10]} + \text{[Diagram 11]} + \text{[Diagram 12]} + \text{[Diagram 13]} + \\
 &+ \text{[Diagram 14]} + \text{[Diagram 15]} + \dots
 \end{aligned} \tag{34}$$

(часть сильно связных диаграмм шестого порядка можно получить из приведенных здесь поворотом плоскости чертежа на 180° вокруг горизонтальной или вертикальной оси).

Слабо связанные диаграммы можно получить из сильно связанных одним из следующих способов.

1. Заменой одной из внешних линий функции



на


линию усредненной функции Грина --- . Например, диаграмма



является одним из элементов совокупности диаграмм



если в выбирается элемент , а в --- — эле-

мент  . Все слабо связанные диаграммы, содержащие лишь один сильно связный элемент, могут быть представлены как один из членов совокупности диаграмм



2. Диаграммы, содержащие лишь два сильно связных элемента, являются одним из членов совокупности диаграмм



Например, диаграмма  получается в случае, если из








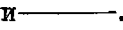
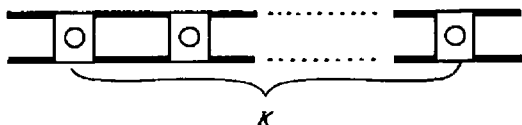
 выбирается  , а из  — линия .

Диаграмма  будет получена, если в качестве элемента в верхней средней линии  будет взята диаграмма

 , а в остальных случаях — простые линии .

3. Аналогично, если диаграмма содержит k сильно связных элементов, то она принадлежит совокупности диаграмм



Из проведенных рассуждений следует разложение

$$\boxed{\times} = \boxed{\circ} + \boxed{\circ \square \circ} + \boxed{\circ \square \square \circ} + \dots (35)$$

Из разложения (35) легко получить уравнение, аналогичное уравнению Дайсона:

$$\boxed{\times} = \boxed{\circ} + \boxed{\circ \times} \quad (36)$$

Действительно, решая (36) последовательными итерациями, мы получим

$$\begin{aligned} \boxed{\times} &= \boxed{\circ} + \boxed{\circ \circ} + \boxed{\circ \circ \times} = \dots = \\ &= \boxed{\circ} + \boxed{\circ \circ} + \boxed{\circ \circ \circ} + \dots, \end{aligned}$$

т. е. равенство (35).

Перепишем уравнение (36) в аналитической форме. Для этого

введем функцию $\boxed{\circ}$, которая уже употреблялась при выводе уравнения (36). Если

$$\boxed{\circ} = P(\rho_1, \rho_2; \rho_3, \rho_4), \quad (37)$$

то P определяется из равенства

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \rho_0, \rho'_0) &= \iiint G_0(\mathbf{r}_1, \rho_1) G_0^*(\mathbf{r}_2, \rho_2) P(\rho_1, \rho_2; \rho_3, \rho_4) \times \\ &\quad \times G_0(\rho_3, \rho_0) G_0^*(\rho_4, \rho'_0) d^3\rho_1 d^3\rho_2 d^3\rho_3 d^3\rho_4. \end{aligned}$$

Так как согласно определению (34)

$$\begin{aligned} u(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \rho_0, \rho'_0) &= \\ &= |k|^4 \iiint G_0(\mathbf{r}_1, \rho_1) G_0^*(\mathbf{r}_2, \rho_2) B_\varepsilon(\rho_1, \rho_2) G_0(\rho_1, \rho_0) G_0^*(\rho_2, \rho'_0) d^3\rho_1 d^3\rho_2 + \\ &+ k^6 k^2 \iiint G_0(\mathbf{r}_1, \rho_1) G_0^*(\mathbf{r}_2, \rho_2) G_0^*(\rho_2, \rho_3) G_0^*(\rho_3, \rho_4) G_0^*(\rho_4, \rho'_0) \times \\ &\quad \times G_0(\rho_1, \rho_0) B_\varepsilon(\rho_1, \rho_3) B_\varepsilon(\rho_2, \rho_4) d^3\rho_1 d^3\rho_2 d^3\rho_3 d^3\rho_4 + \dots, \quad (34a) \end{aligned}$$

то

$$P(r_1, r_2; r_3, r_4) = |k|^4 \delta(r_1 - r_3) \delta(r_2 - r_4) B_\epsilon(r_1, r_2) + \quad (37a)$$

$$+ k^2 k'^6 \int \delta(r_1 - r_3) G_0^*(r_2, \rho) G_0^*(r_4, \rho) B_\epsilon(r_1, \rho) B_\epsilon(r_2, r_4) d^3 \rho + \dots$$

Используя функцию (37), запишем уравнение (36) в аналитической форме

$$W(r_1, r_2; \rho_0, \rho'_0) = \iiint \tilde{G}(r_1, \rho_1) \tilde{G}^*(r_2, \rho_2) P(\rho_1, \rho_2; \rho_3, \rho_4) \times$$

$$\times \tilde{G}(\rho_3, \rho_0) \tilde{G}^*(\rho_4, \rho'_0) d^3 \rho_1 d^3 \rho_2 d^3 \rho_3 d^3 \rho_4 + \quad (36a)$$

$$+ \iiint \tilde{G}(r_1, \rho_1) \tilde{G}^*(r_2, \rho_2) P(\rho_1, \rho_2; \rho_3, \rho_4) W(\rho_3, \rho_4; \rho_0, \rho'_0) d^3 \rho_1 \dots d^3 \rho_4.$$

Это уравнение является аналогом уравнения Бете — Солитера квантовой теории поля.

В отличие от аналогичного уравнения (22) уравнение (36a) в общем случае не решается в аналитическом виде. Как уравнение (22), так и (36a), по существу, не являются замкнутыми, так как содержат функцию, определенную в виде бесконечного ряда (Q или P). Если бы, подобно тому как это было сделано при решении уравнения Дайсона, удалось выразить решение уравнения (36a) W через заданную функцию P , то даже использование первого члена ряда для P эквивалентно суммированию некоторой бесконечной подпоследовательности из (33). Если, например, в (36a) положить

$$P(\rho_1, \rho_2; \rho_3, \rho_4) \approx P_1(\rho_1, \rho_2; \rho_3, \rho_4) =$$

$$= |k|^4 \delta(\rho_1 - \rho_3) \delta(\rho_2 - \rho_4) B_\epsilon(\rho_1 - \rho_2)$$

(первый член ряда (37a)), то (36a) принимает вид

$$W_1(r_1, r_2; \rho_0, \rho'_0) = \quad (38)$$

$$= |k|^4 \iint \tilde{G}(r_1, \rho_1) \tilde{G}^*(r_2, \rho_2) B_\epsilon(\rho_1 - \rho_2) \tilde{G}(\rho_1, \rho_0) \tilde{G}^*(\rho_2, \rho'_0) d^3 \rho_1 d^3 \rho_2 +$$

$$+ |k|^4 \iint \tilde{G}(r_1, \rho_1) \tilde{G}^*(r_2, \rho_2) B_\epsilon(\rho_1 - \rho_2) W_1(\rho_1, \rho_2; \rho_0, \rho'_0) d^3 \rho_1 d^3 \rho_2.$$

Графически оно имеет вид

$$W_1 \sim \text{---} \parallel \parallel \text{---} ,$$

$$\text{---} \parallel \parallel \text{---} = \text{---} \bullet \text{---} + \text{---} \bullet \parallel \parallel \text{---} . \quad (38a)$$

Решая (38а) графически при помощи итераций, получаем

$$\text{---} \parallel \text{---} = \text{---} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{|}} \text{---} + \text{---} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{|}} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{|}} \text{---} + \text{---} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{|}} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{|}} \overset{\cdot}{\underset{\cdot}{|}} \text{---} + \dots \quad (39)$$

Таким образом, решение уравнения (38) суммирует диаграммы «лестничного» приближения уравнения Бете — Солпитера. Уравнение (38) будет решено ниже для специального вида функции $B_c(r)$.

§ 61. Уравнения в вариационных производных для средней функции Грина и корреляционной функции. Вершинная функция

Проведенный в предыдущем параграфе анализ относится к частному случаю, когда закон распределения вероятностей для ε_1 был гауссовским. Сейчас мы рассмотрим более общий случай и установим его связь с развитым выше методом.

Случайная функция $\varepsilon_1(r)$ полностью определена, если задан ее характеристический функционал

$$\Phi[v(\rho)] = \langle \exp i \int v(\rho) \varepsilon_1(\rho) d^3\rho \rangle. \quad (1)$$

Все моменты случайного поля $\varepsilon_1(\rho)$ могут быть получены из (1) как вариационные производные*) при $v=0$:

$$\langle \varepsilon_1(r) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta \Phi[v(\rho)]}{\delta v(r)} \Big|_{v=0}, \quad \langle \varepsilon_1(r_1) \varepsilon_1(r_2) \rangle = \frac{1}{i^2} \frac{\delta^2 \Phi[v(\rho)]}{\delta v(r_1) \delta v(r_2)} \Big|_{v=0}.$$

Рассмотрим функционал

$$G[v; r] \equiv \langle \psi(r) e^{i \int v(\rho) \varepsilon_1(\rho) d^3\rho} \rangle. \quad (2)$$

Функция $\psi(r)$, являющаяся решением уравнения (1.60), в которое входит $\varepsilon_1(r)$, статистически связана с ε_1 и поэтому не может быть вынесена из-под знака усреднения в (2). Среднее значение $\langle \psi(r) \rangle$ может быть определено на основании (2) как $G[0; r]$.

Умножим уравнение

$$L_0(r) \psi = -k^2 \varepsilon_1(r) \psi(r) + \delta(r - r_0)$$

на $\exp \left\{ i \int v(\rho) \varepsilon_1(\rho) d^3\rho \right\}$ и усредним:

$$L_0(r) G[v; r] = -k^2 \langle \varepsilon_1(r) e^{i \int v(\rho) \varepsilon_1(\rho) d^3\rho} \psi(r) \rangle + \delta(r - r_0) \Phi[v]. \quad (3)$$

*) Определение и некоторые основные правила действий с вариационными производными приведены в приложении в конце главы.

Дифференцируя (2), получим соотношение

$$\frac{1}{i} \frac{\delta G[v; r]}{\delta v(r)} = \langle \varepsilon_1(r) \psi(r) e^{i \int v \varepsilon_1 d^3\rho} \rangle. \quad (4)$$

Подставляя (4) в (3), получаем уравнение

$$L_0(r) G[v; r] = ik^2 \frac{\delta G[v; r]}{\delta v(r)} + \delta(r - r_0) \Phi[v] \quad (5)$$

для функционала $G[v; r]$.

Положим

$$G[v; r] = g[v; r] \Phi[v], \quad G[0; r] = g[0; r] = \langle \psi(r) \rangle. \quad (6)$$

Учитывая равенства

$$\begin{aligned} L_0(r) G[v; r] &= \Phi[v] L_0(r) g[v; r], \\ \frac{\delta \Phi g[v; r]}{\delta v(r)} &= \Phi \frac{\delta g[v; r]}{\delta v(r)} + g[v; r] \frac{\delta \Phi}{\delta v(r)}, \\ \frac{1}{\Phi} \frac{\delta \Phi[v]}{\delta v(r)} &= \frac{\delta \ln \Phi}{\delta v(r)}, \end{aligned}$$

получим, после деления (5) на Φ :

$$ik^2 \frac{\delta g[v; r]}{\delta v(r)} + ik^2 g[v; r] \frac{\delta \ln \Phi}{\delta v(r)} - L_0(r) g[v; r] + \delta(r - r_0) = 0. \quad (7)$$

Уравнение (7) является аналогом уравнения Швингера. В отличие от уравнений предыдущего параграфа (7) является замкнутым уравнением, содержащим лишь один неизвестный функционал.

Аналогичным образом можно вывести уравнение для корреляционной функции. Для этого введем функционал

$$H[v; r_1, r_2] = \langle \psi(r_1) \psi^*(r_2) e^{i \int v \varepsilon_1 d^3\rho} \rangle. \quad (8)$$

Дифференцируя (8), найдем

$$\frac{1}{i} \frac{\delta H[v; r_1, r_2]}{\delta v(r)} = \langle \varepsilon_1(r) \psi(r) \psi^*(r_2) e^{i \int v \varepsilon_1 d^3\rho} \rangle. \quad (9)$$

Умножая уравнение для $\psi(r)$ на

$$\psi^*(r') e^{i \int v(\rho) \varepsilon_1(\rho) d^3\rho},$$

усредняя и учитывая (8) и (9), получим

$$\begin{aligned} L_0(r) H[v; r, r'] &= \\ &= ik^2 \frac{\delta H[v; r, r']}{\delta v(r)} + \delta(r - r_0) \langle \psi^*(r') e^{i \int v(\rho) \varepsilon_1(\rho) d^3\rho} \rangle. \quad (10) \end{aligned}$$

Но согласно (2)

$$G^*[-v; r'] = \langle \psi^*(r') e^{\dagger \int v(\rho) \varepsilon_1(\rho) d^3\rho} \rangle.$$

Поэтому уравнение (10) можно записать в виде

$$ik^2 \frac{\delta H[v; r, r']}{\delta v(r)} - L_0(r) H[v; r, r'] + \delta(r - r_0) G^*[-v; r'] = 0. \quad (11)$$

Положим

$$\begin{aligned} H[v; r, r'] &= \Phi[v] \cdot h[v; r, r']; \\ H[0; r, r'] &= h[0; r, r'] = \langle \psi(r) \psi^*(r') \rangle. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставим (12) в (11). Учитывая, что

$$G^*[-v; r'] = g^*[-v; r'] \Phi^*[-v] = g^*[-v; r'] \Phi[v],$$

после деления на Φ получим

$$\begin{aligned} ik^2 \frac{\delta h[v; r, r']}{\delta v(r)} + ik^2 h[v; r, r'] \frac{\delta \ln \Phi}{\delta v(r)} - \\ - L_0(r) h[v; r, r'] + \delta(r - r_0) g^*[-v; r'] = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

В уравнениях (7) и (13) характеристический функционал фигурирует только в виде логарифмической производной. Это является одним из существенных преимуществ уравнений (7) и (13) перед уравнениями (5) и (11). Действительно, из определения (1) следует, что $|\Phi| \leq 1$, поскольку усредняется равная по модулю единице величина. Поэтому разложение Φ в ряд по степеням v всегда должно содержать бесконечное число членов, так как полином конечной степени всегда неограничен при $v \rightarrow \infty$. В то же время условие ограниченности не накладывает на $\ln \Phi$.

Рассмотрим в качестве примера случай гауссовского случайного поля $\varepsilon_1(\rho)$. В этом случае и

$$z = i \int \varepsilon_1(\rho) v(\rho) d^3\rho$$

является гауссовской случайной величиной. Найдем теперь $\langle \exp z \rangle$. Для любой гауссовской случайной величины z со средним значением, равным нулю, имеет место формула $\langle \exp z \rangle = \exp\left(\frac{1}{2} \langle z^2 \rangle\right)$. Но

$$\begin{aligned} \langle z^2 \rangle &= - \iint v(\rho_1) v(\rho_2) \langle \varepsilon_1(\rho_1) \varepsilon_1(\rho_2) \rangle d^3\rho_1 d^3\rho_2 = \\ &= - \iint B_\varepsilon(\rho_1, \rho_2) v(\rho_1) v(\rho_2) d^3\rho_1 d^3\rho_2. \end{aligned} \quad (14)$$

Следовательно, для гауссовского случайного поля

$$\Phi[v] = e^{-\frac{1}{2} \iint B_{\varepsilon}(\rho_1, \rho_2) v(\rho_1) v(\rho_2) d^3\rho_1 d^3\rho_2}, \quad (15)$$

$$\ln \Phi[v] = -\frac{1}{2} \iint B_{\varepsilon}(\rho_1, \rho_2) v(\rho_1) v(\rho_2) d^3\rho_1 d^3\rho_2. \quad (16)$$

В случае, если случайное поле ε_1 не является гауссовским, $\ln \Phi$ может содержать, помимо квадратичного члена, более высокие степени v (разложение по кумулянтам).

Рассмотрим приближенные методы решения уравнения (7). Наиболее простой метод решения (7) — метод последовательных итераций. Для его осуществления следует применить к (7) оператор M_0 :

$$g[v; \mathbf{r}] = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + ik^2 \int G_0(\mathbf{r}, \rho) \left\{ g[v, \rho] \frac{\delta \ln \Phi}{\delta v(\rho)} + \frac{\delta g[v; \rho]}{\delta v(\rho)} \right\} d^3\rho. \quad (17)$$

Решение уравнения (17) методом последовательных итераций эквивалентно обычной теории возмущений, однако в отличие от предыдущего параграфа здесь легко можно рассмотреть случаи негауссовского поля ε_1 .

Рассмотрим другой приближенный метод, основанный на разложении искомого функционала $g[v; \mathbf{r}]$ в ряд:

$$g[v; \mathbf{r}] = g_0(\mathbf{r}) + \int g_1(\mathbf{r}, \rho) v(\rho) d^3\rho + \iint g_2(\mathbf{r}; \rho_1, \rho_2) v(\rho_1) v(\rho_2) d^3\rho_1 d^3\rho_2 + \dots \quad (18)$$

В разложении $\delta \ln \Phi / \delta v(\mathbf{r})$, помимо члена, даваемого формулой (16) для гауссовского поля, учтем и следующие члены разложения, используя корреляционную функцию третьего (F) и более высокого порядков:

$$\frac{\delta \ln \Phi}{\delta v(\mathbf{r})} = - \int B_{\varepsilon}(\mathbf{r}, \rho) v(\rho) d^3\rho + \iint F(\mathbf{r}, \rho_1, \rho_2) v(\rho_1) v(\rho_2) d^3\rho_1 d^3\rho_2 + \dots \quad (19)$$

Подставим разложения (18) и (19) в уравнение (7), а затем, пользуясь произвольностью функции v , приравняем нулю группы членов при одинаковых степенях (в высших членах разложения следует учитывать лишь симметричную по всем переменным, входящим в множители $v(\rho_i)$, часть подынтегральной функции). Таким образом, можно получить систему уравнений для

функций g_i :

$$L_0(r) g_0(r) = \delta(r - r_0) + ik^2 g_1(r, r), \quad (20)$$

$$L_0(r) g_1(r, \rho) = -ik^2 B_\varepsilon(r, \rho) g_0(r) + 2ik^2 g_2(r; r, \rho), \quad (21)$$

$$L_0(r) g_2(r; \rho_1, \rho_2) = -ik^2 [B_\varepsilon(r, \rho_1) g_1(r, \rho_2) + B_\varepsilon(r, \rho_2) g_1(r, \rho_1)] + \\ + 3ik^2 g_3(r; r, \rho_1, \rho_2) - k^2 g_0(r) F(r, \rho_1, \rho_2), \quad (22)$$

В уравнение (20) для g_0 входит функция g_1 , в уравнение (21) для g_1 входит g_2 и т. д. Таким образом, мы получили бесконечную цепочку связанных уравнений. Простейший прием приближенного решения заключается в том, что мы искусственно положим равной нулю одну из функций g_k . Чем больше номер k , тем более точное приближение мы получаем. Заметим, что так как имеет место разложение

$$G[v; r] = \left[g_0(r) + \int g_1(r, \rho) v(\rho) d^3\rho + \dots \right] \Phi[v],$$

то, полагая $g_k = 0$, мы не считаем равной нулю корреляцию $\langle e_1^k(r) \psi(r) \rangle$ и корреляции более высокого порядка, а накладываем на них некоторое дополнительное условие.

Полагая $g_1 = 0$, из (20) сразу же получаем $g_0 = G_0(r, r_0)$, т. е. решение для среды без флуктуаций. Полагая $g_2 = 0$, получим систему уравнений

$$L_0(r) g_0(r) = \delta(r - r_0) + ik^2 g_1(r, r), \quad (20a)$$

$$L_0(r) g_1(r, \rho) = -ik^2 B_\varepsilon(r, \rho) g_0(r). \quad (21a)$$

Из (21a) имеем

$$g_1(r, \rho) = -ik^2 \int G_0(r, \rho') B_\varepsilon(\rho', \rho) g_0(\rho') d^3\rho',$$

$$g_1(\rho, \rho) = -ik^2 \int G_0(\rho, \rho') B_\varepsilon(\rho', \rho) g_0(\rho') d^3\rho'. \quad (23)$$

Запишем (20a) в интегральной форме (применив оператор M_0):

$$g_0(r) = G_0(r - r_0) + ik^2 \int G_0(r, \rho) g_1(\rho, \rho) d^3\rho. \quad (24)$$

Подставляя (23) в (24), получим

$$g_0(r, r_0) = G_0(r - r_0) + k^4 \int \int G_0(r, \rho) G_0(\rho, \rho') B_\varepsilon(\rho', \rho) \times \\ \times g_0(\rho', r_0) d^3\rho d^3\rho'. \quad (25)$$

Здесь мы ввели в аргумент функции $g_0(r)$ также r_0 , поскольку ясно, что g_0 зависит и от r_0 . Изобразим уравнение (25) графически,

полагая $g_0(r, r_0) \sim$ ,

$$\text{Diagram of a chain of seven connected semi-circles} = \text{Diagram of a straight line} + \text{Diagram of a semi-circle on top of a straight line} + \dots \quad (25a)$$

Решая (25a) последовательными итерациями, получим

$$\text{Diagram of a chain of seven connected semi-circles} = \text{Diagram of a straight line} + \text{Diagram of a semi-circle on top of a straight line} + \text{Diagram of two semi-circles on top of a straight line} + \dots \quad (26)$$

Сравнивая этот график с графическим представлением функции G_1 на стр. 458, мы видим, что $g_0 = G_1$, т. е.

$$g_0(r, r_0) = G_1(r - r_0) = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{e^{ik(r-r_0)} d^3k}{k^2 - k^2 - k^4 \int G_0(\rho) B_\epsilon(\rho) e^{-ik\rho} d^3\rho}. \quad (26a)$$

(Разумеется, (26a) можно получить и как решение уравнения (25).)

Таким образом, положив $g_2 = 0$, мы пришли к тому же приближению, что и в предыдущем параграфе при $Q = k^4 G_0 B_\epsilon$. Отметим, однако, что следующее приближение, получающееся при предположении $g_3 = 0$, уже не эквивалентно учету еще одного члена в массовом операторе Q , но приводит к суммированию более обширной совокупности диаграмм и, вообще говоря, учитывает отклонение от гауссовского закона распределения, так как решение будет зависеть от F .

Необходимо отметить еще одно обстоятельство. При выводе выражения (26a) нам не потребовалось предполагать, что случайное поле e_1 является гауссовским, поскольку отличие e_1 от гауссовского поля, описываемое функцией $F(r, \rho_1, \rho_2)$, никак не сказалось на решении. Однако условия применимости решения (26), которые будут исследованы ниже, зависят от того, насколько закон распределения e_1 близок к гауссовскому.

Таким же способом, т. е. разложением $\hbar[v; r, r']$ в ряд по v можно решать и уравнение (13). Положив $h_2 = 0$, можно получить систему уравнений, которая решается при помощи преобразования Фурье. Однако получающееся таким образом решение не удовлетворяет очевидному условию

$$H^*[v; r_1, r_2] = H[-v; r_2, r_1]$$

и нуждается поэтому в дополнительном уточнении. Корреляция поля будет рассмотрена ниже в «лестничном» приближении уравнения Бете — Солпитера.

В заключение настоящего параграфа приведем вывод формулы, связывающей массовый оператор с так называемой вершинной функцией. Для этого введем в уравнении (17) вместо функционального аргумента $v(\rho)$ новый аргумент $u(\rho)$ согласно равенству

$$u(\rho) = \frac{1}{i} \frac{\delta \ln \Phi [v]}{\delta v(\rho)}. \quad (27)$$

Заметим, что из равенства $\langle \epsilon_1(\rho) \rangle = 0$ следует, что $u(\rho) = 0$ при $v(\rho) = 0$. В случае гауссовского распределения связь между u и v является линейной:

$$u(\rho) = i \int B_\epsilon(\rho, \rho') v(\rho') d^3\rho'. \quad (28)$$

В более общем случае $u(\rho)$ — нелинейный функционал от v .

Преобразуем входящую в уравнение (17) вариационную производную по аргументу v в производную по аргументу u . Воспользовавшись общей формулой

$$\frac{\delta g[v; \rho, r_0]}{\delta v(\rho)} = \int \frac{\delta g[u; \rho, r_0]}{\delta u(\rho')} \frac{\delta u[v; \rho']}{\delta v(\rho)} d^3\rho'$$

и подставляя в нее выражение (27), получим

$$\frac{\delta g[v; \rho, r_0]}{\delta v(\rho)} = \frac{1}{i} \int \frac{\delta^2 \ln \Phi [v]}{\delta v(\rho) \delta v(\rho')} \frac{\delta g[u; \rho, r_0]}{\delta u(\rho')} d^3\rho'. \quad (29)$$

Входящий сюда функционал $\delta^2 \ln \Phi / \delta v(\rho) \delta v(\rho')$ обозначим через

$$- \frac{\delta^2 \ln \Phi [v]}{\delta v(\rho) \delta v(\rho')} = B_1[v; \rho, \rho'].$$

При $v = 0$ он превращается в корреляционную функцию $B_\epsilon(\rho, \rho')$ случайного поля $\epsilon_1(\rho)$. В случае гауссовского распределения $B_1[v; \rho, \rho']$ является просто корреляционной функцией и не зависит от v . Если, используя соотношение (27), перейти в $B_1[v; \rho, \rho']$ к аргументу u , то получающийся при этом функционал мы обозначим через $B[u; \rho, \rho']$. Так же как и $B_1[v; \rho, \rho']$, при $u = 0$ он превращается в корреляционную функцию $B_\epsilon(\rho, \rho')$. После перехода к новому аргументу уравнение (17) принимает вид

$$g[u; r, r_0] = G_0(r, r_0) - k^2 \int G_0(r, \rho) g[u; \rho, r_0] u(\rho) d^3\rho - k^2 \iint G_0(r, \rho) \frac{\delta g[u; \rho, r_0]}{\delta u(\rho')} B[u; \rho, \rho'] d^3\rho d^3\rho'. \quad (30)$$

Пусть $g^{-1}[u; \rho, r_0]$ — функционал, обратный к $g[u; r, \rho]$, т. е.

$$\int g[u; r, \rho] g^{-1}[u; \rho, r_0] d^3\rho = \delta(r - r_0). \quad (3i)$$

Пусть, кроме того,

$$\int g'^{-1}[u; r, \rho'] g[u; \rho', \rho] d^3\rho' = \delta(r - \rho).$$

Умножая последнее соотношение на $g^{-1}[u; \rho, r_1]$, интегрируя по ρ и учитывая (3i), получим

$$g^{-1}[u; r_1, r_2] = g'^{-1}[u; r_1, r_2],$$

откуда следует

$$\int g^{-1}[u; r, \rho'] g[u; \rho', \rho] d^3\rho' = \delta(r - \rho). \quad (3ia)$$

Дифференцируя равенство (3i), получим

$$\int \frac{\delta g[u; r, \rho]}{\delta u(\rho')} g^{-1}[u; \rho, r_0] d^3\rho = - \int g[u; r, \rho] \frac{\delta g^{-1}[u; \rho, r_0]}{\delta u(\rho')} d^3\rho.$$

Умножим это соотношение на $g[u; r_0, r_1]$ и проинтегрируем по r_0 . Учитывая (3ia), получаем для $\delta g[u; \rho, r_0] / \delta u(\rho')$ выражение

$$\frac{\delta g[u; \rho, r_0]}{\delta u(\rho')} = - \int \int g[u; \rho, r'] \frac{\delta g^{-1}[u; r', \rho'']}{\delta u(\rho')} g[u; \rho'', r_0] d^3r' d^3\rho''. \quad (32)$$

Определим вершинный оператор $\Gamma[u; r', \rho''; \rho']$ соотношением

$$\Gamma[u; r', \rho''; \rho'] = \frac{\delta g^{-1}[u; r', \rho'']}{\delta u(\rho')}. \quad (33)$$

Тогда, подставляя (32) и (33) в (30), получим уравнение

$$g[u; r, r_0] = G_0(r, r_0) - k^2 \int G_0(r, \rho) u(\rho) g[u; \rho, r_0] d^3\rho + \\ + k^2 \int \int \int G_0(r, \rho) g[u; \rho, \rho_1] \Gamma[u; \rho_1, \rho''; \rho'] g[u; \rho'', r_0] \times \\ \times B[u; \rho, \rho'] d^3\rho d^3\rho' d^3\rho_1 d^3\rho''. \quad (34)$$

Полагая в этом уравнении $u = 0$, получаем соотношение

$$\tilde{G}(r, r_0) = G_0(r, r_0) + k^2 \int \int \int G_0(r, \rho) \tilde{G}(\rho, \rho_1) \times \\ \times \Gamma[0; \rho_1, \rho; \rho'] \tilde{G}(\rho'', r_0) B_z(\rho, \rho') d^3\rho d^3\rho' d^3\rho_1 d^3\rho''. \quad (35)$$

Вершинный оператор (33) при равном нулю функциональному аргументе будем называть вершинной функцией и введем для нее

обозначение

$$\Gamma(r_1, r_2; r_3) = \Gamma[0; r_1, r_2; r_3].$$

Сравнивая уравнение (35) с уравнением (22.60), которое было получено выше графическим путем, можно получить связь между массовым оператором $Q(\rho_1, \rho_2)$ и вершинной функцией $\Gamma(r_1, r_2; r_3)$:

$$Q(\rho_1, \rho_2) = k^2 \iint \tilde{G}(\rho_1, \rho') \Gamma(\rho', \rho_2; \rho'') B_\varepsilon(\rho_1, \rho'') d^3\rho' d^3\rho''. \quad (36)$$

Целесообразно ввести массовый оператор и при не равном нулю функциональном аргументе u . Для этого представим уравнение (34) в виде, аналогичном (22.60), но при $u \neq 0$

$$g[u; r, r_0] = G_0(r, r_0) + \iint G_0(r, \rho) q[u; \rho, \rho'] g[u; \rho', r_0] d^3\rho d^3\rho'. \quad (37)$$

Сравнивая (37) с (34), получим для $q[u; r, r_1]$:

$$\begin{aligned} q[u; r, r_1] &= \\ &= k^2 \iint g[u; r, \rho] \Gamma[u; \rho, r_1; \rho'] B[u; r, \rho'] d^3\rho d^3\rho' - k^2 u(r_1) \delta(r - r_1). \end{aligned} \quad (38)$$

Умножим теперь уравнение (37) на $g^{-1}[u; r_0, r_1]$ и проинтегрируем по r_0 ; учитывая (31), получим

$$\delta(r - r_1) = \int G_0(r, r_0) g^{-1}[u; r_0, r_1] d^3r_0 + \int G_0(r, \rho) q[u; \rho, r_1] d^3\rho.$$

Поддействуем на это уравнение оператором $L_0(r) = \Delta(r) + k^2$; учитывая, что $L_0(r) G_0(r, r') = \delta(r - r')$, получим

$$L_0(r) \delta(r - r_1) = g^{-1}[u; r, r_1] + q[u; r, r_1]. \quad (39)$$

Это соотношение между $g^{-1}[u; r, r_1]$ и $q[u; r, r_1]$ является обобщением формулы (19.60). Дифференцируя (39) и подставляя в (33), получим еще одно выражение для вершинного оператора:

$$\Gamma[u; r_1, r_2; r_3] = - \frac{\delta q[u; r_1, r_2]}{\delta u(r_3)}. \quad (40)$$

Выражение (40) позволяет получить простую связь между графиками для вершинной функции и массового оператора в случае гауссовского распределения диэлектрической проницаемости. Чтобы получить ее, построим выражение для $g[u; r, r_0]$ в виде ряда теории возмущений. Воспользовавшись формулой

(5.60), запишем выражение для неусредненной функции Грина (мы будем обозначать ее здесь не как $\psi(\mathbf{r})$, а как $G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$):

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-k^2)^n \int \dots \int G_0(\mathbf{r}, \rho_1) G_0(\rho_1, \rho_2) \dots \dots G_0(\rho_{n-1}, \rho_n) G_0(\rho_n, \mathbf{r}_0) \varepsilon_1(\rho_1) \dots \varepsilon_1(\rho_n) d^3\rho_1 \dots d^3\rho_n. \quad (41)$$

Умножим (41) на $\exp\{i \int \varepsilon_1(\rho) v(\rho) d^3\rho\}$ и усредним. В результате получаем выражение в виде ряда для $G[v; \mathbf{r}, \mathbf{r}_0]$. Воспользовавшись также формулой

$$\langle \varepsilon_1(\rho_1) \dots \varepsilon_1(\rho_n) \exp\{i \int \varepsilon_1(\rho) v(\rho) d^3\rho\} \rangle = \frac{1}{i^n} \frac{\delta^n \Phi[v]}{\delta v(\rho_1) \dots \delta v(\rho_n)},$$

получим

$$G[v; \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) \Phi[v] + \sum_{n=1}^{\infty} (ik^2)^n \int \dots \int G_0(\mathbf{r}, \rho_1) \dots G_0(\rho_n, \mathbf{r}_0) \times \times \frac{\delta^n \Phi}{\delta v(\rho_1) \dots \delta v(\rho_n)} d^3\rho_1 \dots d^3\rho_n.$$

Разделив это выражение на $\Phi[v]$, получим $g[v; \mathbf{r}, \mathbf{r}_0]$:

$$g[v; \mathbf{r}, \mathbf{r}_0] = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (ik^2)^n \int \dots \int G_0(\mathbf{r}, \rho_1) \dots G_0(\rho_n, \mathbf{r}_0) \frac{1}{\Phi} \frac{\delta^n \Phi}{\delta v(\rho_1) \dots \delta v(\rho_n)} d^3\rho_1 \dots d^3\rho_n \quad (42)$$

Теперь, воспользовавшись соотношением (28), мы должны перейти в (42) к новому аргументу $u(\rho)$. Проще всего это можно сделать, если обратить соотношение (28). Предположим, что существует функция $S(\mathbf{r}, \rho)$, удовлетворяющая уравнению

$$\int S(\mathbf{r}, \rho) B_\varepsilon(\rho, \mathbf{r}') d^3\rho = \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}'). \quad (43)$$

Сразу же отметим, что эта функция не входит в окончательную формулу и поэтому вопрос о ее существовании и фактическом нахождении не является существенным. Из симметрии корреляционной функции следует, что функция $S(\mathbf{r}, \rho)$ также симметрична и поэтому является обратной к $B_\varepsilon(\rho, \mathbf{r}')$ не только слева, но и справа. Умножая (28) на $S(\mathbf{r}, \rho)$ и интегрируя, с учетом (43) получим

$$v(\mathbf{r}) = -i \int S(\mathbf{r}, \rho) u(\rho) d^3\rho. \quad (44)$$

Подставляя (44) в выражение (15) для характеристического функционала, получим после выполнения интегрирования

$$\Phi[v[u]] = \Phi_1[u] = \exp \left[\frac{1}{2} \iint S(\rho_1, \rho_2) u(\rho_1) u(\rho_2) d^3\rho_1 d^3\rho_2 \right]. \quad (45)$$

Снова используя равенство (29) в форме

$$\frac{\delta}{\delta v(\rho_k)} = i \int d^3\rho'_k B_\epsilon(\rho_k, \rho'_k) \frac{\delta}{\delta u(\rho'_k)},$$

перейдем от дифференцирования по v к дифференцированию по u . В результате получаем следующее выражение для $g[u; r, r_0]$:

$$g[u; r, r_0] = G_0(r, r_0) + \sum_{n=1}^{\infty} (-k^2)^n \int \dots \int G_0(r, \rho_1) G_\epsilon(\rho_1, \rho_2) \dots \\ \dots G_0(\rho_n, r_0) B_\epsilon(\rho_1, \rho'_1) B_\epsilon(\rho_2, \rho'_2) \dots B_\epsilon(\rho_n, \rho'_n) \times \\ \times \frac{1}{\Phi_1[u]} \frac{\delta^n \Phi_1[u]}{\delta u(\rho'_1) \dots \delta u(\rho'_n)} d^3\rho_1 \dots d^3\rho_n d^3\rho'_1 \dots d^3\rho'_n. \quad (46)$$

n -й член ряда (46) представляет собой полилинейный функционал n -й степени и содержит как не зависящие от u слагаемые, так и линейные по u члены и т. д. Поэтому, если разложить $g[u; r, r_0]$ в ряд по степенным функционалам, то все коэффициенты этого ряда (аналогичные функциям g_0, g_1, g_2, \dots в (18)) будут представлять собой бесконечные ряды. Мы будем интересоваться только не зависящим от u и линейным по u членами ряда (46). Для того чтобы выписать эти члены в явном виде, необходимо выполнить дифференцирование в (46) и собрать вместе все члены, не содержащие u и линейные по u . В результате дифференцирования экспоненты в Φ_1 в выражении (46) будут появляться функции $S(\rho'_i, \rho'_k)$. Используя равенство (43), мы каждый раз сможем выполнить соответствующие интегрирования, так что функции $S(r, \rho)$ не будут фигурировать в окончательном выражении. Для того чтобы представить функционал $g[u; r, r_0]$ в обозримом виде, снова воспользуемся диаграммами Фейнмана. Сплошная линия по-прежнему соответствует функции $G_0(\rho_i, \rho_j)$, пунктирная — функции $B_\epsilon(\rho_i, \rho_j)$, точка соответствует множителю k^2 . Множитель $u(\rho)$ мы будем изображать крестиком, помещенным в вершину с соответствующим аргументом. Тогда функционалу $g[u; r, r_0]$ будет соответствовать сумма графиков, представленных следующей графической формулой:

$$\begin{aligned}
 q[u; r, r_0] = & \text{---} \times \text{---} + \text{---} \times \times \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 & \text{---} \times \times \times \text{---} - \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} + \\
 & + \text{---} \times \times \times \times \text{---} + \text{---} \times \times \times \text{---} \text{---} + \text{---} \times \text{---} \times \text{---} \text{---} + \text{---} \times \text{---} \text{---} \times \text{---} + \\
 & + \text{---} \text{---} \times \times \times \text{---} + \text{---} \text{---} \times \times \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \times \times \times \text{---} + \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} + \\
 & + \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} + \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 & - \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 & - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 & - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 & - \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \times \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \dots
 \end{aligned}
 \tag{46a}$$

Знак перед диаграммой равен $(-1)^n$, где n — число вершин. Здесь полностью выписаны все члены до четвертого порядка включительно; из членов пятого порядка приведены лишь линейные по u . Из рисунка ясен закон построения диаграмм любого порядка. Одна диаграмма содержит n множителей u (ρ). Затем два каких-либо множителя u (ρ_i), u (ρ_j) заменяются пунктирной линией, соединяющей соответствующие вершины, и берется сумма всех возможных диаграмм такого типа. Затем еще одна пара из оставшихся множителей u (ρ_i), u (ρ_j) заменяется на пунктирную линию и т. д. В диаграммах четного порядка мы в конце этого процесса получим графики, содержащие лишь пунктирные линии, в диаграммах нечетного порядка — графики, содержащие один множитель u (ρ).

Обратимся теперь к уравнению (37). Сравнивая его решение, полученное путем последовательных итераций, с выражением (46а), легко убедиться в том, что подпоследовательность сильно связанных диаграмм соответствует члену

$$\iint G_0(r, \rho) q[u; \rho, \rho'] G_0(\rho', r_0) d^3\rho d^3\rho'$$

ряда итераций. Поэтому графики, соответствующие $q[u; \rho, \rho']$, можно получить из (46а), взяв совокупность сильно связанных диаграмм с отброшенными слева и справа сплошными линиями. В дальнейшем нам потребуются только первые два члена разложения $q[u; \rho, \rho']$ в ряд по степеням u , представленных

следующей графической формулой:

$$\begin{aligned}
 q[u; \rho, \rho'] = & -\chi + \text{diagram 1} - \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \\
 & + \text{diagram 4} - \text{diagram 5} - \text{diagram 6} - \text{diagram 7} - \\
 & - \text{diagram 8} - \text{diagram 9} - \text{diagram 10} + \dots \quad (47)
 \end{aligned}$$

В аналитической форме это выражение имеет вид

$$\begin{aligned}
 q[u; \rho, \rho'] = & Q(\rho, \rho') - k^2 \delta(\rho - \rho') u(\rho) - \\
 & - k^8 B_\varepsilon(\rho, \rho') \int G_0(\rho, \rho_1) u(\rho_1) G_0(\rho_1, \rho') d^3 \rho_1 - \\
 & - k^{10} \iiint G_0(\rho, \rho_1) G_0(\rho_1, \rho_2) G_0(\rho_2, \rho_3) G_0(\rho_3, \rho') \times \\
 & \times B_\varepsilon(\rho, \rho_3) B_\varepsilon(\rho_2, \rho') u(\rho_1) d^3 \rho_1 d^3 \rho_2 d^3 \rho_3 + \dots, \quad (47a)
 \end{aligned}$$

где сумма всех членов, не зависящих от u , обозначена, как и выше, через $Q(\rho, \rho')$. Подставим выражение (47a) в формулу (40), определяющую вершинный оператор, и после дифференцирования положим $u(\rho) = 0$. В результате мы получим вершинную функцию $\Gamma(r_1, r_2; r_3)$. Ясно, что, полагая $u = 0$, мы обращаем в нуль вклад от всех диаграмм, содержащих более одного множителя $u(\rho)$. Графически процесс дифференцирования сводится к тому, что внутренняя вершина графика, помеченная крестиком, становится внешней (без крестика) вершиной с аргументом, соответствующим аргументу дифференциального оператора. Что касается второго слагаемого в (47a), то оно после дифференцирования и смены знака дает в вершинную функцию вклад $k^2 \delta(r_1 - r_3) \delta(r_2 - r_3)$. Таким образом, мы получаем для вершинной функции разложение

$$\begin{aligned}
 \Gamma(r_1, r_2; r_3) = & k^2 \delta(r_1 - r_3) \delta(r_2 - r_3) + k^8 B_\varepsilon(r_1, r_2) G_0(r_1, r_3) G_0(r_2, r_3) + \\
 & + k^{10} \iint G_0(r_1, r_3) G_0(r_3, \rho_1) G_0(\rho_1, \rho_2) G_0(\rho_2, r_2) B_\varepsilon(r_1, \rho_2) \times \\
 & \times B_\varepsilon(\rho_1, r_2) d^3 \rho_1 d^3 \rho_2 + \dots, \quad (48)
 \end{aligned}$$

Графически оно представлено формулой

$$\begin{aligned}
 \triangle = & \bullet + \triangle + \text{diagram 1} + \text{diagram 2} + \text{diagram 3} + \text{diagram 4} + \\
 & + \text{diagram 5} + \text{diagram 6} + \dots \quad (48a)
 \end{aligned}$$

Установим теперь связь между графиками для массового оператора $Q(\rho, \rho')$ и вершинной функции $\Gamma(\rho, \rho'; r)$. Ясно, что графики, представляющие линейные по u члены разложения $g(u, r, r_0)$, отличаются от графиков, представляющих $Q(r, r_0)$ добавлением одной помеченной крестиком вершины на каждую из сплошных линий, входящих в графики для $Q(r, r_0)$. Это следует из анализа формулы (46а). Так как процесс дифференцирования графически сводится к замене отмеченной крестиком внутренней вершины на внешнюю вершину, то все графики для вершинной функции, за исключением первого из (48а), можно получить из графиков, представляющих массовый оператор $Q(r, r_0)$, добавляя новую вершину на каждую из линий, соответствующую функции $G_0(\rho_i, \rho_j)$. Так, диаграмма № 2 в (48а) получается из диаграммы № 2 из (47), диаграммы №№ 3, 5, 7 из (48а) порождаются диаграммой № 4 из (47), диаграммы №№ 4, 6, 8 из (48а) — диаграммой № 5 из (47) и т. д.

Возвратимся теперь к формуле (36), связывающей массовый оператор с вершинной функцией и с усредненной функцией Грина. Графически это соотношение может быть представлено в виде


(36a)

Выше была получена формула, выражающая усредненную функцию Грина через массовый оператор. Заменяя массовый оператор его первым членом разложения в ряд, мы получили функцию $G_1(R)$. Условия, при которых можно ограничиться этим приближением для G , связаны с возможностью пренебрежения последующими членами ряда для Q (более подробно эти условия будут проанализированы в следующем параграфе). В случае, если пренебрегать следующим членом разложения в ряде для Q уже нельзя, возникает необходимость частично просуммировать этот ряд. Эта задача и решается наиболее удобно при помощи уравнения (36). Действительно, если даже ограничиться первым членом в разложении (48) и подставить в диаграмму (36а) вместо вершинной функции $\Gamma(r_1, r_2; r_3)$ простую вершину $k^2 \delta(r_1 - r_3) \times \delta(r_2 - r_3)$, для массового оператора мы получаем вместо первого члена разложения сумму бесконечного ряда. В действительности мы не можем сделать этого, так как в выражение для массового оператора снова входит искомая функция $\tilde{G}(r, r_0)$. Поэтому для получения замкнутой системы уравнений мы должны подставить (36) в уравнение Дайсона, т. е. фактически воспользоваться уравнением (35). Графически оно выглядит

следующим образом:

$$\text{thick line} = \text{thin line} + \text{thin line with dashed arc and shaded triangle} \quad (35a)$$

Если даже в уравнении (35) мы используем первый член разложения (48), т. е. будем рассматривать уравнение

$$G_I(r, r_0) = G_0(r, r_0) + k^4 \iint G_0(r, \rho) G_I(\rho, \rho') G_I(\rho', r_0) \times \\ \times B_\epsilon(\rho, \rho') d^3\rho d^3\rho', \quad (35b)$$

то оно является уже нелинейным; однако решение уравнения (35b) суммирует уже гораздо более обширную совокупность диаграмм, чем функция $G_1(r, r_0)$.

Дальнейшее уточнение решений заключается в построении уравнения для $\Gamma(r_1, r_2; r_3)$. Однако в отличие от (36a) оно не является замкнутым и имеет вид

$$\text{shaded triangle} = \bullet + \text{triangle with dashed arc} + \text{triangle with dashed line} + \dots \quad (49)$$

Уравнения (35a), (49) образуют весьма сложную систему нелинейных интегральных уравнений, которую очень трудно использовать для практических расчетов.

Необходимо сделать еще одно замечание относительно уравнения (35). Приведенный в настоящем параграфе вывод этого уравнения не опирается на предположение о гауссовском распределении для флуктуаций ϵ_1 . От закона распределения зависит лишь конкретный вид вершинной функции. В частности, представление массового оператора через усредненную функцию Грина и вершинный оператор универсально (не зависит от закона распределения), но связь между диаграммами для вершинной функции и массового оператора, вытекающая из общего соотношения (40), которая была сформулирована выше в виде правила построения диаграмм вершинной функции, зависит от закона распределения вероятностей. Из этого замечания следует, что в том случае, когда условия применимости приближенной теории допускают замену вершинной функции на простую вершину, результаты не зависят от конкретного вида закона распределения вероятностей флуктуаций диэлектрической проницаемости.

§ 62. Распространение волн в среде с мелкомасштабными флуктуациями

Вернемся к формуле (29.60) для усредненной функции Грина $\tilde{G}(R)$:

$$\tilde{G}(R) = \frac{1}{8\pi^3} \int \frac{e^{i\mathbf{x}R} d^3\mathbf{x}}{k^2 - \kappa^2 - \int Q(\rho) e^{-i\mathbf{x}\rho} d^3\rho}. \quad (1)$$

Рассмотрим случай, когда радиус корреляции флуктуаций мал по сравнению с длиной волны λ , т. е.

$$ka \ll 1. \quad (2)$$

В этом случае в функции Q можно ограничиться первым членом разложения, равным $Q_1 = k^4 B_\kappa(\rho) G_0(\rho)$, так как ряд, представляющий Q , расположен по степеням малого параметра k (уточнение условий, при которых можно ограничиваться первым членом в Q , будет проведено ниже). Произведем вычисления для корреляционной функции $B_\kappa(\rho) = \sigma^2 e^{-\alpha\rho}$, где $\sigma^2 = \langle \varepsilon_1^2 \rangle$ и α^{-1} — радиус корреляции флуктуаций.

Вычисляя интеграл в знаменателе (1), после несложных выкладок получим формулу

$$\int Q_1(\rho) e^{-i\mathbf{x}\rho} d^3\rho = - \frac{k^4 \sigma^2}{(\alpha - ik)^2 + \kappa^2}. \quad (3)$$

Подставим (3) в (1), введем сферические координаты по \mathbf{x} и выполним интегрирование по угловым переменным. В результате получаем формулу

$$\begin{aligned} \tilde{G}(R) &\approx G_1(R) = \frac{1}{2\pi^2 R} \int_0^\infty \frac{\kappa \sin \kappa R}{k^2 - \kappa^2 + \frac{k^4 \sigma^2}{(\alpha - ik)^2 + \kappa^2}} d\kappa = \\ &= - \frac{1}{8\pi^2 i R} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa e^{i\mathbf{x}R} d\kappa}{k^2 - \kappa^2 + \frac{k^4 \sigma^2}{(\alpha - ik)^2 + \kappa^2}} - \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\kappa e^{-i\mathbf{x}R} d\kappa}{k^2 - \kappa^2 + \frac{k^4 \sigma^2}{(\alpha - ik)^2 + \kappa^2}} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

Полюсы подынтегрального выражения совпадают с корнями уравнения

$$(k^2 - \kappa^2) [(\alpha - ik)^2 + \kappa^2] + k^4 \sigma^2 = 0 \quad (5)$$

и равны

$$\kappa_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{k^2 - (\alpha - ik)^2 \pm \sqrt{\alpha^2 (\alpha - 2ik)^2 + 4k^4 \sigma^2}}, \quad (6)$$

$$\kappa_{3,4} = -\kappa_{1,2}.$$

Замыкая контур интегрирования в первом интеграле вверх, а во втором — вниз и вычисляя вычеты в полюсах (6) (при этом учитывается, что $\text{Im}k > 0$), после несложных, но громоздких вычислений получаем

$$G_1(R) = C_1 \frac{e^{ix_1 R}}{R} + C_2 \frac{e^{ix_2 R}}{R}, \quad (7)$$

$$C_{1,2} = -\frac{1}{8\pi} \left[1 \pm \left(1 + \frac{4k^4 \sigma^2}{\alpha^2 (\alpha - 2ik)^2} \right)^{-\frac{1}{2}} \right].$$

Учитывая, что в силу (2) $\alpha \gg k$, можно записать выражение для x_2 в виде

$$x_2 \approx i\alpha \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \frac{4k^4 \sigma^2}{\alpha^4}}}{2}}. \quad (8)$$

Из этого выражения видно, что второй член в (7) мал уже при $R \sim \frac{1}{\alpha} \sim a$. Поэтому, если мы интересуемся областью $R \gg a$, его можно не учитывать. Другими словами, если нас интересует область $R \gg a$, то можно не учитывать появление новых полюсов в (4), а учесть лишь сдвиг старых полюсов $k = \pm k$. Это эквивалентно тому, что величина $\frac{k^4 \sigma^2}{(\alpha - ik)^2 + k^2}$ в знаменателе (4) заменяется просто на $\frac{k^4 \sigma^2}{(\alpha - ik)^2}$. В более общем случае произвольной корреляционной функции ее поведение в области больших $R \gg a$ также определяется асимптотикой спектра при малых k , причем, как и в рассмотренном примере, не следует учитывать появление новых полюсов подынтегрального выражения (1). Полагая в (1) $e^{-ix\rho} = 1$, мы получаем таким образом асимптотику функции $\tilde{G}(R)$ при $R \gg a$:

$$\tilde{G}(R) \approx \frac{1}{8\pi^2} \int \frac{e^{ixR} d^3x}{[k^2 - \int Q(\rho) d^3\rho] - k^2}. \quad (9)$$

Обозначим

$$k_1^2 = k^2 - \int Q(\rho) d^3\rho. \quad (10)$$

Выражение (9) отличается от спектрального разложения функции $G_0(R)$ лишь заменой k на k_1 . Следовательно, асимптотика функции $\tilde{G}(R)$ при $R \gg a$ имеет вид

$$\tilde{G}(R) \approx -\frac{e^{ik_1 R}}{4\pi R}. \quad (11)$$

Подставляя выражение (15.60) для Q и учитывая, что в силу равенства $Q(\rho_1, \rho_2) = Q(\rho_1 - \rho_2)$ интегрирование по $\rho_1 - \rho_2$ эквивалентно интегрированию по ρ_1 , получим

$$k_1^2 - k^2 = -k^4 \int G_0(\rho) B_\varepsilon(\rho) d^3\rho - \\ - k^8 \iiint G_0(\rho_1 - \rho_2) G_0(\rho_2 - \rho_3) G_0(\rho_3 - \rho_4) [B_\varepsilon(\rho_1 - \rho_3) \times \\ \times B_\varepsilon(\rho_2 - \rho_4) + B_\varepsilon(\rho_1 - \rho_4) B_\varepsilon(\rho_2 - \rho_3)] d^3\rho_1 d^3\rho_2 d^3\rho_3 - \dots \quad (12)$$

Вычислим входящие сюда интегралы при условии $ka \ll 1$:

$$\int G_0(\rho) B_\varepsilon(\rho) d^3\rho = 4\pi \int_0^\infty G_0(\rho) B_\varepsilon(\rho) \rho^2 d\rho = - \int_0^\infty e^{-ik\rho} B_\varepsilon(\rho) \rho d\rho = \\ = - \int_0^\infty [1 + ik\rho + \dots] B_\varepsilon(\rho) \rho d\rho = - \int_0^\infty \rho B_\varepsilon(\rho) d\rho - ik \int_0^\infty B_\varepsilon(\rho) \rho^2 d\rho + \dots \quad (13)$$

Введем интегральный масштаб корреляции a согласно определению

$$\int B_\varepsilon(\rho) d^3\rho = \sigma^2 a^3. \quad (14)$$

Тогда

$$\int_0^\infty B_\varepsilon(\rho) \rho^2 d\rho = \frac{\sigma^2 a^3}{4\pi}.$$

Для первого интеграла в правой части (13) можно записать

$$\int_0^\infty B_\varepsilon(\rho) \rho d\rho = \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 a^2, \quad (15)$$

где μ — числовая постоянная, зависящая от вида корреляционной функции

$$\int G_0(\rho) B_\varepsilon(\rho) d^3\rho = - \frac{\mu \sigma^2 a^2}{4\pi} - \frac{ik \sigma^2 a^3}{4\pi} + \dots \quad (16)$$

Ряд (16) расположен по степеням малой величины ka , и поэтому в нем можно ограничиться его первыми членами.

Оценим теперь следующие члены ряда (12). Рассмотрим сначала интеграл

$$I = \iiint G_0(\rho_1 - \rho_2) G_0(\rho_2 - \rho_3) G_0(\rho_3 - \rho_4) B_\varepsilon(\rho_2 - \rho_3) B_\varepsilon(\rho_1 - \rho_4) \times \\ \times d^3\rho_1 d^3\rho_2 d^3\rho_3 = \iiint G_0(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) G_0(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) G_0(\mathbf{r}_3) B_\varepsilon(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_3) \times \\ \times B_\varepsilon(\mathbf{r}_1) d^3r_1 d^3r_2 d^3r_3. \quad (17)$$

В силу условия $ka \ll 1$ функции $B_\varepsilon(\rho)$ под знаком интегралов можно представить как $B_\varepsilon(\rho) = \sigma^2 a^3 \delta_a(\rho)$, где $\delta_a(\rho)$ — «размазанная» на область порядка a δ -функция. В тех случаях, когда при интегрировании с «неразмазанной» δ -функцией не возникает расходимостей, ее можно заменить на обычную δ -функцию; в остальных же случаях (при возникновении расходимостей) следует пользоваться правилом

$$\int f(r) \delta_a(r) d^3r \sim f(a).$$

В применении к (17) это правило дает

$$\int G_0(r_2 - r_3) \delta_a(r_2 - r_3) d^3r_3 \sim G_0(a),$$

$$I \sim (\sigma^2 a^3)^2 G_0(a) \int G_0^2(r_2) d^3r_2 \sim \frac{\sigma^4 a^5}{k}$$

мы учли, что при $ka \ll 1$ $G_0(a) \sim a^{-1}$, а интеграл вычисляется и имеет порядок $\int G_0^2(r) d^3r \sim k^{-1}$.

Аналогичным образом оценим интеграл

$$\mathcal{Y} = \iiint G_0(r_1 - r_2) G_0(r_2 - r_3) G_0(r_3) B_\varepsilon(r_1 - r_3) B_\varepsilon(r_2) d^3r_1 d^3r_2 \times$$

$$\times d^3r_3 \sim (\sigma^2 a^3)^2 \int_{|r_i| > a} [G_0(r_1)]^3 d^3r_1$$

(мы учли, что аргументы после интегрирования с $\delta_a(r)$ совпадают лишь с точностью до a и поэтому особенности функций $G_0(r)$ не сливаются). Учитывая, что

$$\int_{|r_i| > a} [G_0(r)]^3 d^3r \sim \ln \frac{1}{ka},$$

имеем

$$\mathcal{Y} \sim \sigma^4 a^6 \ln \frac{1}{ka}.$$

Подставляя найденные значения в формулу (12), получаем

$$k_1^2 = k^2 \left[1 + \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 k^2 a^2 + \frac{i}{4\pi} \sigma^2 k^3 a^3 + \text{const} \cdot \sigma^4 k^5 a^5 + \right.$$

$$\left. + \text{const} \cdot \sigma^4 k^6 a^6 \ln \frac{1}{ka} + \dots \right]. \quad (18)$$

Следующий, не выписанный здесь член разложения в квадратных скобках имеет порядок $\sigma^6 (ka)^8$ (он связан с членом



оператора Q).

Заметим, прежде всего, что $ka \ln \frac{1}{ka} \ll 1$ при $ka \ll 1$, так что последнее слагаемое в (18) мало по сравнению с $\sigma^4 k^5 a^5$. Условие, при котором в разложении функции Q в ряд можно ограничиться первым членом, можно получить из (18):

$$\sigma^4 k^5 a^5 \ll 1 + \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 k^2 a^2 \quad (19)$$

(член $\sigma^2 k^3 a^3$ всегда мал по сравнению с $\sigma^2 k^2 a^2$). В случае, если $\sigma^2 k^2 a^2 \ll 1$ условие (19) выполняется всегда. Если же $\sigma^2 k^2 a^2 \gg 1$, то из (19) мы получаем ограничение

$$\sigma^2 (ka)^3 \ll 1. \quad (20)$$

При выполнении этого условия малы и следующие члены разложения, так как отношение последующих членов ряда (18) к предыдущим имеет порядок $\sigma^2 (ka)^3$.

Так как $ka \ll 1$, то условие (20) накладывает на величину $\sigma^2 k^3 a^3$ слабое ограничение

$$\sigma^2 k^2 a^2 \ll \frac{1}{ka}, \quad (20a)$$

из которого следует, что $\sigma^2 k^2 a^2$ может быть большой величиной. Учитывая условие (20), запишем k_1 в виде

$$k_1 = k \sqrt{1 + \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 k^2 a^2} \times \left[1 + \frac{i\sigma^2 k^3 a^3}{8\pi \left(1 + \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 k^2 a^2\right)} + \text{const.} \cdot \frac{\sigma^4 k^5 a^5}{1 + \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 k^2 a^2} + \dots \right]. \quad (21)$$

Величина k_1 входит в (11) в экспоненту $\exp(ik_1 R)$. Поэтому последним членом в (21) можно пренебрегать лишь при условии

$$kR \frac{\sigma^4 k^5 a^5}{\sqrt{1 + \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 k^2 a^2}} \ll 1. \quad (22)$$

Если $\sigma^2 k^2 a^2 \ll 1$, то (22) дает

$$kR \ll \frac{1}{\sigma^4 k^5 a^5} \quad (\sigma^2 k^2 a^2 \ll 1). \quad (22a)$$

Если же $\sigma^2 k^2 a^2 \gg 1$, то мы получаем

$$kR \ll \frac{1}{\sigma^2 k^4 a^4} \quad (\sigma^2 k^2 a^2 \gg 1). \quad (22b)$$

Для того чтобы при выполнении условия (22б) можно было рассматривать большие значения kR , необходимо выполнение неравенства $\sigma^3 k^4 a^4 \ll 1$, что эквивалентно условию

$$\sigma^2 k^2 a^2 \ll \frac{1}{(ka)^{3/2}}. \quad (23)$$

Условие (23) является более жестким, чем (20а), но и оно не накладывает на $\sigma^2 k^2 a^2$ условия малости.

Итак, при выполнении условий (19) и (22) мы имеем следующее выражение для k_1 :

$$k_1 = k \sqrt{1 + \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 k^2 a^2} \left[1 + i \frac{\sigma^2 k^3 a^3}{8\pi \left(1 + \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 k^2 a^2\right)} \right]. \quad (24)$$

Постоянная распространения k_1 может значительно отличаться от k , если средний квадрат флуктуаций σ^2 достаточно велик.

Пусть $k = p_0 + i\gamma_0$, причем $\gamma_0 \ll p_0$. Положим $k_1 = n_0 p_0 + i\gamma'$, где n_0 — эффективный показатель преломления, γ' — коэффициент ослабления. Тогда, пренебрегая влиянием γ_0 на n_0 и выписывая γ' лишь с точностью до линейных по γ_0 членов, получим

$$n_0 = \sqrt{1 + \frac{\mu}{4\pi} \sigma^2 a^2 p_0^2}, \quad (25)$$

$$\gamma' = \frac{2n_0^2 - 1}{n_0} \gamma_0 + \frac{1}{n_0} \frac{\sigma^2 p_0^4 a^3}{8\pi}. \quad (26)$$

Из (25) следует, что эффективный показатель преломления $n_0 \geq 1$, причем возможен случай $n_0 \gg 1$. Возрастание n_0 описывает среднее увеличение оптического пути за счет многократного рассеяния на флуктуациях. Коэффициент ослабления состоит из двух слагаемых. Первое из них пропорционально поглощению γ_0 , но отличается от него на множитель $(2n_0^2 - 1)/n_0$.

В случае, когда $n_0 \gg 1$ этот множитель может быть весьма значительным. Возрастание поглощения в флуктуирующей среде также является следствием увеличения оптического пути за счет многократного рассеяния.

Второе слагаемое в (26) связано с обратным рассеянием на флуктуациях. Действительно, эффективный поперечник однократного рассеяния из единицы объема в телесный угол $d\Omega$

равен (см. гл. 2)

$$d\sigma = \frac{\pi}{2} p_0^4 \Phi_\epsilon \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right) d\Omega,$$

где $\Phi_\epsilon(x)$ — спектральная плотность ϵ_1 . В случае $ka \ll 1$ при всех θ

$$\Phi_\epsilon \left(2k \sin \frac{\theta}{2} \right) \approx \Phi_\epsilon(0) = (2\pi)^{-3} \int B_\epsilon(\mathbf{r}) d^3r = (2\pi)^{-3} \sigma^2 a^3.$$

Следовательно,

$$d\sigma(\theta) = \frac{\sigma^2 a^3 p_0^4}{16\pi^2} d\Omega.$$

Эффективный поперечник рассеяния из единицы объема в заднюю полусферу α равен

$$\alpha = \frac{\sigma^2 p_0^4 a^3}{8\pi}.$$

Следовательно, (26) можно записать в виде

$$\gamma' = \frac{2n_a^2 - 1}{n_a} \gamma_0 + \frac{\alpha}{n_a}. \quad (26a)$$

Вычисляя ослабление за счет рассеяния в первом приближении метода возмущений мы получили бы величину α . Таким образом, учет многократного рассеяния приводит к уменьшению ослабления. Это вполне естественно, так как за счет многократного рассеяния часть рассеянной энергии возвращается в первоначальном направлении.

В заключение настоящего параграфа мы кратко обсудим возможные способы улучшения полученного решения, которые должны ослабить неравенства (19) и (22).

Прежде всего ясно, что учет нескольких следующих членов разложения функции Q не может существенно улучшить положение, так как при нарушении условия (19) отношения последующих членов ряда к предыдущим будут не малыми для целого ряда диаграмм высших порядков. Поэтому заметного улучшения результатов можно добиться лишь в том случае, если просуммировать наиболее существенные диаграммы, входящие в массовый оператор Q . Для этого мы располагаем уравнением (36a.61).

В настоящем параграфе мы использовали наиболее простой график из совокупности (36a.61), который получается при замене усредненной функции Грина на $G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ и вершинной функ-

ции на простую вершину. Выше мы оценивали поправки к первому приближению массового оператора, обусловленные следующими членами его разложения в ряд. При этом оказалось, что поправка $I \sim \sigma^4 a^5 k^{-1}$, связанная с заменой усредненной функции Грина на G_0 , намного превосходит поправку $\mathcal{J} \sim \sigma^4 a^6 \ln \frac{1}{ka}$ (их отношение $\mathcal{J}/I \sim ka \ln \frac{1}{ka}$), связанную с заменой вершинной функции на простую вершину. Поэтому, желая улучшить найденное выше приближение, мы прежде всего должны учесть поправки в массовом операторе, обусловленные отличием \tilde{G} от G_0 , и можем вначале пренебречь поправками, связанными с вершинной функцией. Мы, таким образом, приходим к уравнению (356.61):

$$G_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) = G_0(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0) + k^4 \iint G_0(\mathbf{r}, \boldsymbol{\rho}) G_I(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') G_I(\boldsymbol{\rho}', \mathbf{r}_0) B_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}, \boldsymbol{\rho}') d^3\rho d^3\rho'. \quad (27)$$

Решение этого уравнения — достаточно сложная задача, и мы здесь не будем пытаться решить ее строго. Однако можно попытаться оценить, к каким изменениям в эффективном волновом числе приведет уравнение (27). Для этого воспользуемся формулой (10), подставив вместо Q выражение, даваемое формулой (36.61) при замене вершинной функции простой вершиной, а вместо неизвестной функции $G_I(\mathbf{r}, \mathbf{r}_0)$ подставим ее асимптотику в области больших $|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|$, т. е. $-(4\pi|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)^{-1} \exp(ik_1|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|)$. Оценку произведем для корреляционной функции экспоненциального вида $B_\varepsilon(\boldsymbol{\rho}) = \sigma^2 \exp(-\alpha\rho)$. В этом случае входящий в (10) интеграл легко вычисляется и мы получаем для k_1 уравнение четвертой степени:

$$\left(\frac{k_1}{k}\right)^2 = 1 + \frac{\sigma^2 v^2}{\left(1 - iv \frac{k_1}{k}\right)^2}, \quad v = \frac{k}{\alpha} \ll 1. \quad (28)$$

Если $|v \frac{k_1}{k}| \ll 1$, то это уравнение совпадает с прежним выражением для k_1 . В то же время, если это условие нарушено, то элементарный анализ решения уравнения (28) показывает, что зависимость k_1 от σ , v уже не выражается прежней формулой и имеет вид

$$k_1 \sim k\sqrt{\sigma}.$$

Мы не будем, однако, заниматься более подробным исследованием этого решения.

§ 63. Корреляционная функция для случая мелкомасштабных неоднородностей

Для нахождения корреляционной функции в случае $ka \ll 1$ мы воспользуемся уравнением Бете — Солпитера в «лестничном» приближении (38.60):

$$W_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \rho_0, \rho'_0) = |k^4| \int \int \tilde{G}(\mathbf{r}_1, \rho_1) \tilde{G}^*(\mathbf{r}_2, \rho_2) B_z(\rho_1 - \rho_2) \tilde{G}(\rho_1, \rho_0) \times \\ \times \tilde{G}^*(\rho_2, \rho'_0) d^3\rho_1 d^3\rho_2 + |k^4| \int \int \tilde{G}(\mathbf{r}_1, \rho_1) \tilde{G}^*(\mathbf{r}_2, \rho_2) \times \\ \times B_z(\rho_1 - \rho_2) W_1(\rho_1, \rho_2; \rho_0, \rho'_0) d^3\rho_1 d^3\rho_2. \quad (1)$$

Точное решение этого уравнения для произвольной функции $B_z(\rho)$ получить не удастся, и мы воспользуемся поэтому приближением, существенно использующим условие $ka \ll 1$.

Прежде всего заметим, что $W_1(\mathbf{r}_1 + \mathbf{a}, \mathbf{r}_2 + \mathbf{a}; \rho_0 + \mathbf{a}, \rho'_0 + \mathbf{a})$ удовлетворяет тому же уравнению, что $W_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \rho_0, \rho'_0)$, в чем легко убедиться непосредственно. Поэтому W_1 зависит фактически лишь от трех переменных. Положим

$$\xi = \mathbf{r}_1 - \rho_0, \quad \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \rho'_0, \quad \zeta = \frac{\mathbf{r}_1 + \rho_0 - \mathbf{r}_2 - \rho'_0}{2}, \\ \mathbf{x} = \frac{\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \rho_0 + \rho'_0}{2}. \quad (2)$$

Тогда

$$\mathbf{r}_1 = \frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\xi + \zeta}{2}, \quad \mathbf{r}_2 = \frac{\mathbf{x}}{2} + \frac{\mathbf{r} - \zeta}{2}, \\ \rho_0 = \frac{\mathbf{x}}{2} - \frac{\xi - \zeta}{2}, \quad \rho'_0 = \frac{\mathbf{x}}{2} - \frac{\mathbf{r} + \zeta}{2}. \quad (2a)$$

Функция W_1 фактически не зависит от координаты $\frac{\mathbf{x}}{2}$, входящей аддитивно во все аргументы. Положим

$$W_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \rho_0, \rho'_0) = \\ = W_1\left(\frac{\xi + \zeta}{2}, \frac{\mathbf{r} - \zeta}{2}; -\frac{\xi - \zeta}{2}, -\frac{\mathbf{r} + \zeta}{2}\right) = F(\xi, \mathbf{r}, \zeta), \quad (3)$$

откуда вытекает обратное соотношение

$$W_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \rho_0, \rho'_0) = F\left(\mathbf{r}_1 - \rho_0, \mathbf{r}_2 - \rho'_0, \frac{\mathbf{r}_1 + \rho_0 - \mathbf{r}_2 - \rho'_0}{2}\right). \quad (3a)$$

Подставим (3a) в уравнение (1); производя в интегралах замену переменных

$$\mathbf{u} = \frac{\xi + \zeta}{2} - \rho_1, \quad \mathbf{v} = \frac{\mathbf{r} - \zeta}{2} - \rho_2,$$

получим уравнение

$$F(\xi, r, \zeta) = |k^4| \iint \tilde{G}(u) \tilde{G}^*(v) B_\epsilon \left(v - u + \zeta + \frac{\xi - r}{2} \right) \left[\tilde{G}(\xi - u) \times \right. \\ \left. \times \tilde{G}^*(r - v) + F\left(\xi - u, r - v, \frac{v - u}{2} + \zeta\right) \right] d^3u d^3v. \quad (4)$$

В уравнении (4) удобно перейти к спектральным плотностям. Положим

$$\tilde{G}(r) = \int \tilde{g}(r) e^{i\kappa r} d^3\kappa, \quad (5)$$

$$F(\xi, \eta, \zeta) = \iiint f(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) e^{i(\kappa_1 \xi + \kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)} d^3\kappa_1 d^3\kappa_2 d^3\kappa_3, \quad (6)$$

$$B_\epsilon(r) = \int \Phi_\epsilon(\kappa) e^{i\kappa r} d^3\kappa. \quad (7)$$

Подставляя (5), (6), (7) в (4), после несложных преобразований получим уравнение

$$f(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = (2\pi)^6 |k^4| \tilde{g}\left(\kappa_1 + \frac{\kappa_3}{2}\right) \tilde{g}\left(\kappa_1 - \frac{\kappa_3}{2}\right) \tilde{g}^*\left(-\kappa_2 + \frac{\kappa_3}{2}\right) \times \\ \times \tilde{g}^*\left(-\kappa_2 - \frac{\kappa_3}{2}\right) \Phi_\epsilon(\kappa_3) + (2\pi)^6 |k^4| \tilde{g}\left(\kappa_1 + \frac{\kappa_3}{2}\right) \times \\ \times \tilde{g}^*\left(-\kappa_2 + \frac{\kappa_3}{2}\right) \int \Phi_\epsilon(\kappa) f\left(\kappa_1 - \frac{\kappa}{2}, \kappa_2 + \frac{\kappa}{2}, \kappa_3 - \kappa\right) d^3\kappa. \quad (8)$$

В случае $ka \ll 1$ функция $\Phi_\epsilon(\kappa)$ мало меняется на расстояниях, соответствующих характерному масштабу изменения функций \tilde{g} и f . Воспользовавшись этим, получим приближенное решение уравнения (8). Для этого запишем (8) для точки $\kappa_1 \rightarrow \kappa_1 - \frac{\kappa'}{2}$, $\kappa_2 \rightarrow \kappa_2 + \frac{\kappa'}{2}$, $\kappa_3 \rightarrow \kappa_3 - \kappa'$, умножим его на $\Phi_\epsilon(\kappa')$ (чтобы образовать в левой части такой же интеграл, как и справа) и проинтегрируем по κ' :

$$\int \Phi_\epsilon(\kappa') f\left(\kappa_1 - \frac{\kappa'}{2}, \kappa_2 + \frac{\kappa'}{2}, \kappa_3 - \kappa'\right) d^3\kappa' = Q(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \\ = (2\pi)^6 |k^4| \int \tilde{g}\left(\kappa_1 + \frac{\kappa_3}{2} - \kappa'\right) \tilde{g}^*\left(-\kappa_2 + \frac{\kappa_3}{2} - \kappa'\right) \Phi_\epsilon(\kappa_3 - \kappa') \times \\ \times \Phi_\epsilon(\kappa') d^3\kappa' \cdot \tilde{g}\left(\kappa_1 - \frac{\kappa_3}{2}\right) \tilde{g}^*\left(-\kappa_2 - \frac{\kappa_3}{2}\right) + \\ + (2\pi)^6 |k^4| \int \tilde{g}\left(\kappa_1 + \frac{\kappa_3}{2} - \kappa'\right) \tilde{g}^*\left(-\kappa_2 + \frac{\kappa_3}{2} - \kappa'\right) \times \\ \times \Phi_\epsilon(\kappa') d^3\kappa' \int \Phi_\epsilon(\kappa) f\left(\kappa_1 - \frac{\kappa + \kappa'}{2}, \kappa_2 + \frac{\kappa + \kappa'}{2}, \kappa_3 - \kappa - \kappa'\right) d^3\kappa. \quad (9)$$

Во внутреннем интеграле справа произведем замену переменных, положив $\mathbf{x} + \mathbf{x}' = \mathbf{x}''$. Тогда внутренний интеграл примет вид

$$\int \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}') f\left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}''}{2}, \mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}''}{2}, \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}''\right) d^3\mathbf{x}'' \quad (10)$$

Область изменения \mathbf{x}' определяется функциями \tilde{g} во внешнем интеграле и имеет порядок k' . Если выполнено условие $k'a \ll 1$, то в (10) можно пренебречь разницей между $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}'' - \mathbf{x}')$ и $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}'')$, так как при изменении своего аргумента на величину порядка k функция Φ_{ε} почти не меняется. Поэтому вместо (10) можно записать $Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3)$, и мы получаем уравнение

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = & (2\pi)^6 |k|^4 \tilde{g}\left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_3}{2}\right) \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_3}{2}\right) \times \\ & \times \int \tilde{g}\left(\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}') \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' + \\ & + Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) (2\pi)^6 |k|^4 \int \tilde{g}\left(\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \times \\ & \times \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}', \end{aligned}$$

решая которое, находим

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = & (2\pi)^6 |k|^4 \tilde{g}\left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_3}{2}\right) \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_3}{2}\right) \int \tilde{g}\left(\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \times \\ & \times \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}') \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \times \\ & \times \left[1 - (2\pi)^6 |k|^4 \int \tilde{g}\left(\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}' \right]^{-1}. \quad (11) \end{aligned}$$

Подставляя (11) в правую часть уравнения (8), получим

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = & (2\pi)^6 |k|^4 \tilde{g}\left(\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_3}{2}\right) \tilde{g}\left(\mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_3}{2}\right) \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2}\right) \times \\ & \times \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_3}{2}\right) \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}_3) + (2\pi)^6 |k|^4 \times \\ & \times \frac{\int \tilde{g}\left(\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}') \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'}{1 - (2\pi)^6 |k|^4 \int \tilde{g}\left(\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \tilde{g}^*\left(-\mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}'\right) \Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'}. \quad (12) \end{aligned}$$

Снова воспользуемся плавностью функции $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x})$ и вынесем за знак интеграла в числителе (12) множитель $\Phi_{\varepsilon}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}')$ при $\mathbf{x}' = 0$. В результате, после приведения подобных членов,

получаем

$$f(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3) = \frac{(2\pi)^6 |k|^4 \tilde{g}(\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_3}{2}) \tilde{g}(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_3}{2}) \tilde{g}^*(-\mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2}) \tilde{g}^*(-\mathbf{x}_2 - \frac{\mathbf{x}_3}{2}) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_3)}{1 - (2\pi)^6 |k|^4 \int \tilde{g}(\mathbf{x}_1 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}') \tilde{g}^*(-\mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2} - \mathbf{x}') \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'}. \quad (13)$$

Это выражение является приближенным решением уравнения (8) при $ka \ll 1$ (оно превращается в точное решение этого уравнения в случае $\Phi_\varepsilon = \text{const}$). В случае слабых флуктуаций, когда знаменатель в (13) можно положить равным единице, (13) переходит в решение, получаемое методом возмущений, что непосредственно видно из уравнения (8), в котором в этом случае можно пренебречь вторым членом в правой части. Корреляционная функция $\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi^*(\mathbf{r}_2) \rangle$ связана с W_1 соотношением $\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi^*(\mathbf{r}_2) \rangle = W_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; \rho_0, \rho_0)$. Помещая начало координат в точку ρ_0 , получим

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi^*(\mathbf{r}_2) \rangle = W_1(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2; 0, 0) = F\left(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{2}\right) \quad (14)$$

(мы воспользовались формулой (3а)). Подставляя в (14) спектральное разложение (6), найдем

$$\langle \varphi(\mathbf{r}_1) \varphi^*(\mathbf{r}_2) \rangle = \iint e^{i(\mathbf{x}_1 \mathbf{r}_1 + \mathbf{x}_2 \mathbf{r}_2)} a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2, \quad (15)$$

где

$$a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int f\left(\mathbf{x}_1 - \frac{\mathbf{x}_3}{2}, \mathbf{x}_2 + \frac{\mathbf{x}_3}{2}, \mathbf{x}_3\right) d^3\mathbf{x}_3. \quad (16)$$

Подставляя сюда (13), будем иметь

$$a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = (2\pi)^6 |k|^4 \tilde{g}(\mathbf{x}_1) \tilde{g}^*(-\mathbf{x}_2) \times \frac{\int \tilde{g}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \tilde{g}^*(-\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_3) d^3\mathbf{x}_3}{1 - (2\pi)^6 |k|^4 \int \tilde{g}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}') \tilde{g}^*(-\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}') \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'}. \quad (17)$$

Выражение (17) представляет собой спектральную плотность корреляционной функции $\langle \varphi_1 \varphi_2^* \rangle$.

Рассмотрим интеграл

$$I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) = \int \tilde{g}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) \tilde{g}^*(-\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_3) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_3) d^3\mathbf{x}_3 = \int \tilde{g}(\mathbf{x}) \tilde{g}^*(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)) \Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (18)$$

Используя опять плавность функции Φ_ε , можно приближенно заменить $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x})$ на $\Phi_\varepsilon(-\mathbf{x}) = \Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ (заметим, что считать

функцию Φ_ϵ просто константой нельзя, так как это в итоге приводит к расходимости). В этом случае

$$I(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \approx I(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) = \int \tilde{g}(\mathbf{x}) \tilde{g}^*(\mathbf{x} - (\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2)) \Phi_\epsilon(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}, \quad (19)$$

т. е. I зависит лишь от $\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$. Найдем средний квадрат флуктуаций

$$\begin{aligned} \langle \varphi \varphi^* \rangle &= \iint e^{i(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{r}} a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) d^3\mathbf{x}_1 d^3\mathbf{x}_2 = \\ &= \int e^{i\mathbf{x} \cdot \mathbf{r}} d^3\mathbf{x} \int a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1) d^3\mathbf{x}_1. \end{aligned} \quad (20)$$

Он определяется преобразованием Фурье от

$$b(\mathbf{x}) = \int a(\mathbf{x}_1, \mathbf{x} - \mathbf{x}_1) d^3\mathbf{x}_1. \quad (21)$$

Подставляя сюда (17), (18) и (19), получим

$$b(\mathbf{x}) = \frac{(2\pi)^6 |k|^4 I(\mathbf{x})}{1 - (2\pi)^6 |k|^4 I(\mathbf{x})} \cdot \int \tilde{g}(\mathbf{x}_1) \tilde{g}^*(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}) d^3\mathbf{x}_1. \quad (22)$$

Входящий сюда интеграл легко вычисляется, если мы учтем, что

$$g(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \int \tilde{G}(\mathbf{R}) e^{-i\mathbf{x} \cdot \mathbf{R}} d^3\mathbf{R},$$

и подставим вместо \tilde{G} ее асимптотическое выражение $\tilde{G}(\mathbf{R}) \approx -e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{R}} / 4\pi R$. В результате получим

$$\int \tilde{g}(\mathbf{x}_1) \tilde{g}^*(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1) d^3\mathbf{x}_1 = \frac{1}{64\pi^3 \mathbf{x}},$$

так что (22) принимает вид

$$b(\mathbf{x}) = \frac{\pi^3 |k|^4 I(\mathbf{x})}{\mathbf{x} [1 - (2\pi)^6 |k|^4 I(\mathbf{x})]}. \quad (23)$$

Вычислим теперь $I(\mathbf{x})$ для случая, когда $B_\epsilon(r) = \sigma^2 \cdot \exp(-ar)$. Этой корреляционной функции соответствует спектральная плотность

$$\Phi_\epsilon(\mathbf{x}) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi^2} \frac{1}{(\alpha^2 + \mathbf{x}^2)^2}. \quad (24)$$

Подставляя (24) в (19) и выполняя интегрирование по угловым переменным в сферических координатах, получим (мы учли,

что $\hat{g}(x) = (2\pi)^{-3} (k_1^2 - x^2)^{-1}$

$$(2\pi)^6 I(x) = \frac{\sigma^2 \alpha}{\pi x} \int_0^{\infty} \frac{x'}{(k_1^2 - x'^2)(\alpha^2 + x'^2)^2} \ln \frac{k_1^2 - (x' - x)^2}{k_1^2 - (x' + x)^2} dx'. \quad (25)$$

Из (25) видно, что при $x \rightarrow \infty$ $I(x)$ убывает быстрее, чем x^{-1} . При $x \rightarrow 0$ (25) стремится к конечному пределу

$$(2\pi)^6 I(0) = \frac{2\sigma^2 \alpha}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x'^2 dx'}{(k_1^2 - x'^2)(k_1^2 + x'^2)(\alpha^2 + x'^2)} \quad (26)$$

Интеграл легко вычисляется, если учесть, что k_1 лежит в верхней полуплоскости и k_1^* — в нижней. В результате несложных вычислений можно получить формулу

$$(2\pi)^6 I(0) = \frac{i\sigma^2}{(k_1^2 - k_1^{*2})(k_1^2 + \alpha^2)^2(k_1^{*2} + \alpha^2)^2} \{2\alpha k_1(k_1^{*2} + \alpha^2)^2 + \\ + 2\alpha k_1^*(k_1^2 + \alpha^2)^2 - i(k_1^2 - k_1^{*2})[3|k_1|^4 + \alpha^2(k_1^2 + k_1^{*2}) - \alpha^4]\}. \quad (27)$$

Для k_1 мы используем полученную выше формулу (24.62). Легко убедиться в том, что при $ka \ll 1$ и $k^2 a^2 \sigma \ll 1$ (эти условия выполняются при условиях применимости (24.62)) $|k_1 a| \ll 1$, т. е. $|k_1| \ll \alpha$. Поэтому в (27) можно оставить лишь главный (по α) член:

$$(2\pi)^6 I(0) \approx \frac{2i\sigma^2}{\alpha^2(k_1 - k_1^*)} = \frac{\sigma^2}{\alpha^2 \gamma'}, \quad (27a)$$

где γ' определяется формулой (26.62).

Обратимся к вычислению $\langle \Phi \Phi^* \rangle$. Подставляя (23) в (20), получим, учитывая, что $I(x) = I(x)$:

$$\langle \Phi \Phi^* \rangle = 4\pi \int_0^{\infty} \frac{\sin xr}{xr} b(x) x^2 dx = \\ = \frac{4\pi^4 |k|^4}{r} \int_0^{\infty} \sin xr \frac{I(x) dx}{1 - (2\pi)^6 |k|^4 I(x)}. \quad (28)$$

Интеграл (28) сходится, так как $I(x)$ убывает при $x \rightarrow \infty$. При больших r , которые нас будут интересовать, поведение этого интеграла определяется поведением спектра в области малых x . Однако если просто положить в (28) $I(x) = I(0)$, то в

результате мы получаем несуществующий интеграл $\int_0^{\infty} \sin kr \, dk$.

Если, однако, учесть хотя бы сколь угодно слабое убывание второго сомножителя при $k \rightarrow \infty$, то интеграл сразу же приобретает смысл. Проще всего его найти как

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-\delta k} \sin kr \, dk = \frac{1}{r}.$$

В результате в области больших r получаем

$$\begin{aligned} \langle \Phi \Phi^* \rangle &= \frac{4\pi^4 |k|^4}{r^2} \frac{I(0)}{1 - (2\pi)^6 |k|^4 I(0)} = \\ &= \frac{1}{16\pi^2 r^2} \cdot \frac{|k|^4 \sigma^2 a^3}{8\pi\gamma'} \cdot \frac{1}{1 - \frac{|k|^4 \sigma^2 a^3}{8\pi\gamma'}} \end{aligned} \quad (29)$$

причем мы подставили $\alpha^3 = 8\pi a^{-3}$, где a — введенный ранее интегральный масштаб корреляции.

В процессе решения уравнения (8) мы существенно использовали условие малости $ka \ll 1$. Из самой структуры формулы (29) видно, какие ограничения необходимо наложить на этот параметр. Действительно, величина $|k|^4 \sigma^2 a^3 [8\pi\gamma']^{-1}$ должна быть малой по сравнению с единицей, ибо в противном случае мы можем получить отрицательные значения $\langle \Phi \Phi^* \rangle$. Рассмотрим это условие подробнее. Для γ' мы получили выше формулу

$$\gamma' = \gamma'_0 + \gamma'_1,$$

где γ'_0 — коэффициент поглощения и γ'_1 — коэффициент рассеяния:

$$\gamma'_0 = \frac{2n_0^2 - 1}{n_0} \gamma_0, \quad \gamma'_1 = \frac{|k|^4 \sigma^2 a^3}{8\pi n_0} \quad (30)$$

(мы пренебрегли здесь разницей между $|k|$ и p_0). Таким образом, условие $\frac{|k|^4 \sigma^2 a^3}{8\pi\gamma'} \ll 1$ фактически устанавливает соотношение

между γ'_0 и γ'_1 : $\frac{\gamma'_1}{\gamma'_0 + \gamma'_1} \ll 1$, т. е.

$$\gamma'_1 \ll \gamma'_0. \quad (13)$$

Подставляя (30), получаем

$$\frac{|k|^4 \sigma^2 a^3}{8\pi (2n_0^2 - 1) \gamma_0} \ll 1. \quad (31a)$$

Рассмотрим отдельно случаи $(2n_0^2 - 1) \approx 1$ и $(2n_0^2 - 1) \gg 1$. В первом случае $|k|^2 \sigma^2 a^2 \ll 1$ и условие (31a) дает

$$ka \ll \frac{\gamma_0}{k} \cdot \frac{1}{\sigma^2 k^2 a^2} \quad (\sigma^2 k^2 a^2 \ll 1). \quad (32)$$

Это ограничение не слишком жесткое, ибо в правой части в знаменателе стоит малая величина. Во втором, случае $\sigma^2 k^2 a^2 \gg 1$, откуда следует, что $(2n_0^2 - 1) \sim \sigma^2 k^2 a^2$, и условие (31a) дает

$$ka \ll \frac{\gamma_0}{k}. \quad (33)$$

При выполнении этих условий можно (29) записать в виде

$$\frac{\langle \Phi \Phi^* \rangle}{|\langle \Psi \rangle|^2} = \frac{|k|^4 \sigma^2 a^3}{8\pi \gamma'}, \quad (34)$$

где мы учли, что $|\langle \Psi \rangle|^2 = (16 \pi^2 r^2)^{-1}$.

Проанализируем формулу (34). Прежде всего обращает на себя внимание появление в знаменателе поглощения γ . В случае среды без поглощения мы получили бы бесконечные флуктуации поля. Это объясняется тем, что мы рассматриваем поле стационарного источника в бесконечном пространстве, где «радиус действия» рассеянных волн определяется именно поглощением. При этом оказывается существенным истинное поглощение в отличие от ослабления, так как условие (31) требует, чтобы коэффициент поглощения был велик по сравнению с коэффициентом рассеяния.

Подставим в (34) $\gamma' = \frac{2n_0^2 - 1}{n_0} \gamma_0$ (в силу условия (31) вторым слагаемым в γ' можно пренебречь):

$$\frac{\langle \Phi \Phi^* \rangle}{|\langle \Psi \rangle|^2} = \frac{|k|^4 \sigma^2 a^3}{8\pi \gamma_0} \frac{n_0}{2n_0^2 - 1}. \quad (34a)$$

Первый множитель в (34a) представляет собой относительное значение среднего квадрата флуктуаций при $n_0 = 1$, т. е. в приближении однократного рассеяния. Множитель $\frac{n_0}{2n_0^2 - 1}$ всегда меньше единицы, т. е. при учете многократного рассеяния

средний квадрат флуктуаций меньше. Это объясняется уменьшением «радиуса действия» рассеянного поля за счет увеличения поглощения при многократном рассеянии. В случае $n_0 \gg 1$

$$\frac{n_0}{2n_0^2 - 1} \approx \frac{1}{2n_0} = \frac{1}{2 \sqrt{\frac{\mu}{4\pi} \sigma |k| a}}$$

и из (34а) мы получаем

$$\frac{\langle \Phi \Phi^* \rangle}{|\langle \Phi \rangle|^2} = \frac{1}{8 \sqrt{\frac{\mu}{4\pi}}} \frac{|k|^3 a^2 \sigma}{\gamma_0}, \tag{34б}$$

т. е. в данном случае флуктуации пропорциональны кубу частоты и лишь первой степени σ .

Условие применимости (31) для формулы (34) можно записать в виде

$$\frac{\langle \Phi \Phi^* \rangle}{|\langle \Phi \rangle|^2} \ll 1. \tag{31б}$$

Оно сводится к малости относительной величины флуктуаций поля. При этом, однако, не накладываются условия малости на флуктуации показателя преломления, а рост σ (при соблюдении (33)) приводит к уменьшению флуктуаций поля.

В заключение настоящего параграфа поясним смысл введенного ограничения (31), которое позволило отбросить последний множитель в (29). Отбрасывание этого множителя эквивалентно тому, что в уравнении



мы оставляем лишь первый член в правой части. Он отличается от первого члена ряда теории возмущений



лишь заменой G_0 на G , т. е. фактически заменой k на k_1 . Таким образом, можно сформулировать следующее правило для вычисления различных эффектов: их нужно сначала рассмотреть в первом приближении метода возмущений, а затем произвести замену k на k_1 в окончательных результатах.

§ 64. Некоторые заключительные замечания

Развитые выше методы решения волнового уравнения в среде со случайными неоднородностями, несомненно, требуют дальнейшей разработки. К рассматриваемой задаче они были применены сравнительно недавно в работах [155—159]*). Можно указать на целый ряд вопросов, требующих дальнейшего рассмотрения.

Во-первых, изложенная теория может быть обобщена на систему уравнений Максвелла. Некоторые трудности при этом возникают в связи с тем, что в отличие от скалярного волнового уравнения функция Грина для системы уравнений Максвелла сингулярна [175]. Поэтому при обобщении изложенной теории на случай электромагнитного поля приходится пользоваться специальными приемами для исключения особенностей (см. [175, 176]). Развитые выше методы начинают находить применения при решении различных конкретных задач. Так в [176] рассчитана пространственная дисперсия неоднородной среды, в работе [177] вычислен тензор эффективной диэлектрической проницаемости сильнонеоднородной анизотропной среды.

Вместе с тем имеется ряд вопросов принципиального характера, требующих дальнейшего рассмотрения. Что касается области $ka \ll 1$, то здесь улучшение метода требует перехода к нелинейным уравнениям, что в результате должно ослабить ограничения на σ^2 , R , ka . Сюда же относится и более аккуратное решение уравнения Бете — Солпитера для корреляционной функции. В области коротких волн $ka \gg 1$ вычисления среднего поля производились в работах [159, 179, 180], причем в последней работе подробно исследуется связь метода плавных возмущений с теорией возмущений в массовом операторе. Наконец, следует подробнее рассмотреть случай негауссовских флуктуаций показателя преломления, где уже невозможно использование диаграммной техники и необходимо рассматривать непосредственно уравнения с вариационными производными.

Решение перечисленных вопросов требует еще большой работы и выходит за рамки настоящей книги.

В разделе Б этой главы мы рассмотрим случай распространения коротких волн, исходя из приближения геометрической оптики. В отличие от раздела А изложение последующего материала ведется менее строго, однако это, в конце концов, позволяет получить более конкретные результаты.

*) Отметим, что в опубликованных ранее работах [160—162] среднее поле в среде со случайными неоднородностями вычислялось методом возмущений при более жестких ограничениях.

Б. СИЛЬНЫЕ ФЛУКТУАЦИИ АМПЛИТУДЫ ПЛОСКОЙ ВОЛНЫ, РАСПРОСТРАНЯЮЩЕЙСЯ В СЛАБО НЕОДНОРОДНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СРЕДЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Расчет флуктуаций амплитуды методом возмущений в приближении геометрической оптики был приведен в разделе А гл. 3. Здесь мы приведем расчет, пригодный и в случае сильных амплитудных флуктуаций [181].

Содержание этого раздела непосредственно примыкает к материалу, изложенному в разделе А гл. 3. Однако, так как привлекаемый математический аппарат ближе к используемому в настоящей главе, излагаемый ниже материал помещен именно здесь, хотя это и повлекло за собой необходимость некоторых повторений.

§ 65. Приближение малых углов

Рассмотрим плоскую волну, падающую на турбулентную среду, занимающую область $x > 0$.

Уравнения распространения волн в приближении геометрической оптики имеют вид

$$(\nabla\theta)^2 = n^2(\mathbf{r}) = 1 + \varepsilon_1(\mathbf{r}), \quad (1)$$

$$\operatorname{div}(A^2\nabla\theta) = 0. \quad (2)$$

Здесь θ — эйконал, A — амплитуда, n — показатель преломления, ε_1 — флуктуирующая часть диэлектрической проницаемости. Уравнение (2а) можно также записать в эквивалентной форме

$$2\nabla\theta\nabla\chi + \Delta\theta = 0, \quad (2a)$$

где $\chi = \ln(A/A_0)$ и A_0 — амплитуда невозмущенной волны. Введем единичный вектор

$$\mathbf{l} = \frac{\nabla\theta}{|\nabla\theta|} = \frac{\nabla\theta(\mathbf{r})}{n(\mathbf{r})},$$

направленный вдоль луча, проходящего через точку \mathbf{r} . Тогда

$$\nabla\theta\nabla\chi = n\mathbf{l}\nabla\chi = n \frac{d\chi}{ds},$$

где $\frac{d}{ds}$ — производная вдоль луча (s — длина, отсчитываемая по лучу). Уравнение (2а) может быть записано в виде

$$\frac{d\chi}{ds} = -\frac{1}{2n} \Delta\theta,$$

и его интегрирование приводит к соотношению

$$\chi(s) = -\frac{1}{2} \int_0^s \frac{\Delta\theta(s)}{n(s)} ds, \quad (3)$$

выражающему логарифм амплитуды через криволинейный интеграл.

В гл. 3 при вычислении интеграла (3) было использовано приближение, в котором луч заменялся на прямолинейный. Теперь мы откажемся от этого упрощения и выполним интегрирование вдоль истинного луча, что позволит получить результат, справедливый и в области сильных флуктуаций амплитуды.

Для того чтобы осуществить такое интегрирование, нам понадобится иметь в явной форме уравнение луча. Его можно получить, предполагая малость флуктуаций направления луча. Запишем уравнение (1) в виде

$$\left(\frac{\partial\theta}{\partial x}\right)^2 = n^2(r) - (\nabla_{\perp}\theta)^2, \quad \nabla_{\perp} = \left\{ \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}. \quad (1a)$$

Величина

$$\frac{|\nabla_{\perp}\theta|}{\left|\frac{\partial\theta}{\partial x}\right|} = \frac{|l_{\perp}|}{|l_x|} = \operatorname{tg} \alpha,$$

где α — угол, который составляет луч с осью x . Если считать, что $|\alpha| \ll 1$, то величину $(\nabla_{\perp}\theta)^2$ можно считать малой. В этом случае уравнение (1a) можно решать путем последовательных итераций, полагая

$$\left(\frac{\partial\theta_k}{\partial x}\right)^2 = n^2(r) - (\nabla_{\perp}\theta_{k-1})^2.$$

В качестве исходного приближения возьмем $\nabla_{\perp}\theta_0 = 0$. Тогда

$$\left(\frac{\partial\theta_1}{\partial x}\right)^2 = n^2(r), \quad \theta_1(x, \rho) = \int_0^x n(\xi, \rho) d\xi, \quad (4)$$

$$\frac{\partial\theta_2}{\partial x} = \sqrt{n^2(r) - (\nabla_{\perp}\theta_1)^2} \quad (5)$$

и т. д. Считая, что $(\nabla_{\perp}\theta_1)^2 \ll 1$, мы можем ограничиться выражением (4) для θ^* . Более того, если $|\epsilon_1| \ll 1$, то можно

* В условиях реальной атмосферы максимальные значения $\langle \alpha^2 \rangle$ имеют порядок от 10^{-12} до 10^{-10} .

использовать и более простое выражение:

$$\theta(x, \rho) = \int_0^x \left[1 + \frac{1}{2} \varepsilon_1(\xi, \rho) \right] d\xi, \quad (6)$$

справедливое с точностью до величин порядка ε_1^2 , α^2 . Перейдем теперь к нахождению уравнения луча. Его дифференциальное уравнение имеет вид

$$\frac{dr}{ds} = l = \frac{\nabla\theta}{n}. \quad (7)$$

Взяв x -компоненту этого уравнения, найдем

$$\frac{dx}{ds} = \frac{1}{n} \frac{\partial\theta}{\partial x} = 1. \quad (7a)$$

Таким образом, в рассматриваемом приближении можно считать $s = x$ (так как различие между x и s сказывается лишь во втором порядке малости по α). Обозначив $\rho(s) = \{y(s), z(s)\}$, получим из (7), заменяя ds на dx :

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{1}{n} \nabla_{\perp} \theta(x, \rho(x)). \quad (8)$$

Согласно (6)

$$\nabla_{\perp} \theta(x, \rho(x)) = \frac{1}{2} \int_0^x \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho(x)) d\xi, \quad (9)$$

т. е. $\nabla_{\perp} \theta$ является величиной первого порядка малости по ε_1 . Поэтому с той же точностью мы должны полагать $n = 1$ в знаменателе (8). Тогда

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{1}{2} \int_0^x \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho(x)) d\xi. \quad (10)$$

Уравнение (10) содержит ρ под знаком интеграла в аргументе случайной функции ε_1 . Поэтому (10) представляет собой нелинейное интегро-дифференциальное уравнение, решить которое точно не представляется возможным. Приближенное решение уравнения (10) можно получить, заменяя под знаком интеграла $\rho(x)$ на 0. В этом случае мы получаем

$$\frac{d\rho(x)}{dx} = \frac{1}{2} \int_0^x \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi. \quad (10a)$$

Именно это уравнение использовалось нами в гл. 3 при оценках границ применимости первого приближения геометрической оптики. Исходя из уравнения, совпадающего с (10а), там было получено выражение для среднего квадрата величины $\rho(x)$ в турбулентной среде:

$$\langle \rho^2(x) \rangle \sim C_m^2 \kappa_m^{1/2} x^3. \quad (11)$$

Чтобы оценить границы применимости уравнения (10а), можно воспользоваться выражением для $\langle \rho^2(x) \rangle$, полученным Л. А. Черновым с использованием уравнения Эйнштейна — Фоккера — Планка для «диффузии» луча [92]. Выражение (11) оказывается справедливым в случае, когда

$$\frac{\langle \rho^2(x) \rangle}{x^2} \sim \langle \alpha^2 \rangle \ll 1. \quad (12)$$

При нарушении же условия (12) закон (11) заменяется характерным для диффузии законом $\langle \rho^2(x) \rangle \sim x$. Таким образом, выражение для $\langle \rho^2(x) \rangle$, получаемое при помощи уравнения (10а), оказывается справедливым в той же области $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$, которую мы здесь рассматриваем.

Используя (10а), найдем уравнение луча, проходящего через точку наблюдения $(L, 0, 0)$, т. е. луча, для которого выполняется условие

$$\rho(L) = 0.$$

Второе граничное условие $\frac{d\rho(0)}{dx} = 0$ уже использовано нами при написании пределов интегрирования в (10а).

Интегрируя (10а) по x и заменяя порядок интегрирования по ξ и x , получим

$$\rho(x) = \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi + \text{const.}$$

Значение const определяем из условия $\rho(L) = 0$, откуда

$$\text{const} = -\frac{1}{2} \int_0^L (L - \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi,$$

$$\begin{aligned} \rho(x) &= \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^L (L - \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x (x - \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi - \frac{1}{2} \int_0^x (L - \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{1}{2} \int_x^L (L - \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi = \\
 & = - \frac{1}{2} \left[\int_0^x (L - x) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi + \int_x^L (L - \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi \right].
 \end{aligned}$$

Пусть $\vartheta(x) = 0$ при $x < 0$, $\vartheta(x) = 1$ при $x > 0$. Введем функцию

$$M(L, x, \xi) = \vartheta(x - \xi)(L - x) + \vartheta(\xi - x)(L - \xi). \quad (13)$$

Тогда выражение для $\rho(x)$ можно записать в виде

$$\rho(x) = - \frac{1}{2} \int_0^L M(L, x, \xi) \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi, 0) d\xi. \quad (14)$$

Выражения (3), (6) и (14) позволяют вычислить величину $\chi(L) = \ln \frac{A(L)}{A_0}$ в приближении малых углов. Заметим, что так как в этом приближении $ds = dx$, то (3) можно записать в виде

$$\chi = - \frac{1}{2} \int_0^L \frac{\Delta\theta}{n} dx.$$

Величина $\Delta\theta$ согласно (6) имеет порядок малости ε_1 . Поэтому в знаменателе в последней формуле можно считать $n = 1$. Записывая

$$\Delta\theta = \frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \Delta_{\perp}\theta,$$

можно выполнить интегрирование первого слагаемого, что приводит к величине

$$- \frac{1}{2} \left[\frac{\partial\theta(L, 0)}{\partial x} - \frac{\partial\theta(0, \rho(0))}{\partial x} \right].$$

Как мы убедились в гл. 3, этот «локальный» член дает незначительный вклад в средний квадрат флуктуаций $\ln A$ и им можно пренебрегать. Поэтому мы будем использовать в дальнейшем формулу

$$\chi(L) = \ln \frac{A(L)}{A_0} = - \frac{1}{2} \int_0^L \Delta_{\perp}\theta(x, \rho(x)) dx. \quad (15)$$

Прежде чем переходить к расчету среднего квадрата флуктуаций $\ln A$, установим еще одно полезное соотношение, справедливое в приближении малых флуктуаций направления луча.

Усредним уравнение (2а), в котором подставим $\nabla\theta = n\mathbf{l}$:

$$\operatorname{div}(\langle A^2 n \mathbf{l} \rangle) = 0. \quad (16)$$

В случае, если статистические характеристики флуктуаций показателя преломления не зависят от y, z (однородность в плоскости $x = \text{const}$) и падающая волна плоская, из соображений симметрии ясно, что $\langle A^2 n \mathbf{l} \rangle$ зависит только от координаты x . В этом случае (16) принимает вид

$$\frac{d}{dx} \langle A^2 n l_x \rangle = 0. \quad (16a)$$

Но, как следует из (8), $l_x = 1$ (с точностью до членов порядка α^2). Подставим $n = 1 + \frac{1}{2} \epsilon_1$. Тогда

$$\langle A^2 n \rangle = \langle A^2 \rangle + \frac{1}{2} \langle A^2 \epsilon_1 \rangle.$$

Второе слагаемое имеет порядок $\langle A^2 \rangle \sigma_{\epsilon}$, где σ_{ϵ} — среднеквадратичное значение флуктуаций ϵ_1 . Поэтому с точностью до членов порядка σ_{ϵ} , $\langle \alpha^2 \rangle$ имеет место соотношение

$$\langle A^2 \rangle = A_0^2. \quad (17)$$

Подставляя $\frac{A}{A_0} = e^{\chi}$, получим

$$\langle e^{2\chi} \rangle = 1. \quad (18)$$

Но согласно (3) величина χ представляет собой интеграл (криволинейный) от случайной величины $\Delta\theta/n$. В случае, если радиус корреляции этой величины, имеющий порядок l_0 , мал по сравнению с L , χ распределено по нормальному закону в силу предельной теоремы теории вероятностей. Но для гауссовской случайной величины ξ имеет место формула

$$\langle e^{\xi} \rangle = e^{\langle \xi \rangle + \frac{1}{2} [\langle \xi^2 \rangle - \langle \xi \rangle^2]}.$$

Подставляя $\xi = 2\chi$, получаем из (18)

$$\exp[2(\langle \chi \rangle + \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2)] = 1,$$

откуда

$$\sigma_x^2 \equiv \langle \chi^2 \rangle - \langle \chi \rangle^2 = - \langle \chi \rangle. \quad (19)$$

На основании этого соотношения мы можем для определения σ_x^2 найти величину $\langle \chi \rangle$, что значительно проще, чем вычисление $\langle \chi^2 \rangle$.

§ 66. Вычисление среднего квадрата флуктуаций логарифма амплитуды

Согласно формуле (15.65) $\langle \chi \rangle$ определяется интегралом от $\langle \Delta_{\perp} \theta(x, \rho(x)) \rangle \equiv F(x)$. Применяв к (6.65) оператор Δ_{\perp} и подставляя затем $\rho = \rho(x)$, получим

$$F(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho(x)) \rangle d\xi. \quad (1)$$

Согласно (14.65) $\rho(x)$ является функционалом от ε_1 . Поэтому при нахождении величины

$$\Phi(x, \xi) \equiv \langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho(x)) \rangle \quad (2)$$

необходимо учитывать корреляцию случайной функции ε_1 с ее случайным аргументом $\rho(x)$.

Чтобы найти, выражение (2), используем равенство

$$\begin{aligned} \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho(x)) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \delta(\rho - \rho(x)) \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho) d^2\rho = \\ &= \frac{1}{4\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa[\rho - \rho(x)]} \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho) d^2\rho d^2\kappa. \end{aligned}$$

После усреднения получим

$$\Phi(x, \xi) = \frac{1}{4\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\rho} \langle e^{-i\kappa\rho(x)} \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho) \rangle d^2\rho d^2\kappa. \quad (3)$$

Рассмотрим функционал

$$\Phi[\mathbf{a}] \equiv \left\langle \exp \left\{ i \int_0^L d\xi' \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \mathbf{a}(\xi', \rho') \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi', \rho') \right\} \right\rangle, \quad (4)$$

где $\mathbf{a} = \{a_2, a_3\}$ — плоский вектор. Если в качестве \mathbf{a} взять выражение

$$a_0(\xi', \rho') = \frac{1}{2} \kappa M(L, x, \xi') \delta(\rho'), \quad (5)$$

то значение функционала (4) с учетом (14.65) будет равно

$$\Phi [a_0] = \left\langle \exp \left\{ i\kappa \cdot \frac{1}{2} \int_0^L M(L, x, \xi') \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi', 0) d\xi' \right\} \right\rangle = \langle e^{-i\kappa \rho(x)} \rangle. \quad (6)$$

Возьмем теперь вариационную производную от (4) в точке ξ, ρ :

$$\frac{\delta \Phi [a]}{\delta a_k(\xi, \rho)} = \left\langle i \frac{\partial \varepsilon_1(\xi, \rho)}{\partial \rho_k} \exp \left\{ i \int_0^L d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' a(\xi', \rho') \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi', \rho') \right\} \right\rangle. \quad (7)$$

(В дальнейшем k, l, n пробегает значения 2, 3.)

Применив к (7) оператор $-i \frac{\partial}{\partial \rho_k}$, получим

$$-i \frac{\partial}{\partial \rho_k} \frac{\delta \Phi [a]}{\delta a_k(\xi, \rho)} = \left\langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho) \exp \left\{ i \int_0^L d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' a(\xi', \rho') \nabla_{\perp} \varepsilon_1(\xi', \rho') \right\} \right\rangle. \quad (8)$$

Если в (8) в качестве аргумента a взять функцию (5), то мы получим выражение

$$\langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho) e^{-i\kappa \rho(x)} \rangle = -i \frac{\partial}{\partial \rho_k} \frac{\delta \Phi [a]}{\delta a_k(\xi, \rho)} \Big|_{a=a_0}, \quad (9)$$

которое согласно (3) определяет величину $\Phi(x, \xi)$.

Найдем теперь функционал $\Phi [a]$. Если поле ε_1 является гауссовским, то интеграл, входящий в (4), является гауссовской случайной величиной. Однако он будет близок к гауссовской случайной величине и в том случае, когда само случайное поле $\varepsilon_1(r)$ и не является гауссовским, так как в этом случае для функций a , близких к a_0 , опять можно привлечь предельную теорему. В частности, при $a = a_0$ гауссовской величиной будет $\rho(x)$. Используя справедливую для гауссовской случайной величины ξ (при $\langle \xi \rangle = 0$) формулу $\langle \exp(i\xi) \rangle = \exp(-\frac{1}{2} \langle \xi^2 \rangle)$, получим

$$\Phi [a] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^L d\xi' \int_0^L d\xi'' \int_{-\infty}^{\infty} d^2 \rho' d^2 \rho'' a_n(\xi', \rho') a_l(\xi'', \rho'') \times \right. \\ \left. \times \left\langle \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_n} \frac{\partial \varepsilon_1(\xi'', \rho'')}{\partial \rho''_l} \right\rangle \right\}. \quad (10)$$

Пусть ε_1 — однородное и изотропное случайное поле. Дифференцируя соотношение

$$\langle \varepsilon_1(\xi', \rho') \varepsilon_1(\xi'', \rho'') \rangle = B_\varepsilon(\xi' - \xi'', \rho' - \rho''),$$

получим

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{\partial \varepsilon_1(\xi', \rho')}{\partial \rho'_n} \frac{\partial \varepsilon_1(\xi'', \rho'')}{\partial \rho''_l} \right\rangle &= \frac{\partial^2 B_\varepsilon(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'')}{\partial \rho'_n \partial \rho''_l} = \\ &= - \frac{\partial^2 B_\varepsilon(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'')}{\partial \rho'_n \partial \rho'_l} = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_\varepsilon(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'')}{\partial \rho'_n \partial \rho'_l}, \end{aligned}$$

причем в последнем равенстве использовано соотношение $D_\varepsilon(\mathbf{r}) = 2B_\varepsilon(0) - 2B_\varepsilon(\mathbf{r})$ между корреляционной и структурной функциями. Таким образом,

$$\begin{aligned} \Phi[a] &= \exp \left\{ - \frac{1}{4} \int_0^L d\xi' \int_0^L d\xi'' \iiint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' d^2\rho'' \times \right. \\ &\quad \left. \times \frac{\partial^2 D_\varepsilon(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'')}{\partial \rho'_n \partial \rho'_l} a_n(\xi', \rho') a_l(\xi'', \rho'') \right\}. \quad (11) \end{aligned}$$

Вычислим теперь вариационную производную от (11) (основные правила вычисления см. в приложении):

$$\begin{aligned} \frac{\delta \Phi[a]}{\delta a_k(\xi, \rho)} &= \Phi[a] \left\{ - \frac{1}{4} \int_0^L d\xi' \int_0^L d\xi'' \iiint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' d^2\rho'' \frac{\partial^2 D_\varepsilon(\xi' - \xi'', \rho' - \rho'')}{\partial \rho'_n \partial \rho'_l} \times \right. \\ &\quad \left. \times [\delta_{kn} \delta(\xi' - \xi) \delta(\rho' - \rho) a_l(\xi'', \rho'') + a_n(\xi', \rho') \delta_{kl} \delta(\xi'' - \xi) \delta(\rho'' - \rho)] \right\} = \\ &= \Phi[a] \left\{ - \frac{1}{2} \int_0^L d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \frac{\partial^2 D_\varepsilon(\xi - \xi', \rho - \rho')}{\partial \rho_k \partial \rho_l} a_l(\xi', \rho') \right\}. \quad (12) \end{aligned}$$

Применяя согласно (9) оператор $-i \frac{\partial}{\partial \rho_k}$ к (12), получим

$$\begin{aligned} -i \frac{\partial}{\partial \rho_k} \frac{\delta \Phi[a]}{\delta a_k(\xi, \rho)} &= \\ &= \Phi[a] \left\{ \frac{i}{2} \int_0^L d\xi' \int_{-\infty}^{\infty} d^2\rho' \frac{\partial \Delta_\perp D_\varepsilon(\xi - \xi', \rho - \rho')}{\partial \rho_l} a_l(\xi', \rho') \right\}. \end{aligned}$$

Подставим теперь $a = a_0$ (см. (5)). Тогда получим

$$\begin{aligned} \langle \Delta_\perp \varepsilon_1(\xi, \rho) e^{-i\mathbf{x}\theta(\mathbf{x})} \rangle &= \\ &= \Phi[a_0] \left\{ \frac{i\kappa_l}{4} \int_0^L d\xi' M(L, x, \xi') \frac{\partial \Delta_\perp D_\varepsilon(\xi - \xi', \rho)}{\partial \rho_l} \right\}. \quad (13) \end{aligned}$$

Заметим, что согласно (6)

$$\Phi [a_0] = \langle e^{-i\kappa\rho(x)} \rangle = e^{-\frac{1}{2} \kappa_k \kappa_l \langle \rho_k(x) \rho_l(x) \rangle}.$$

Но в случае статистически изотропных флуктуаций ε_1 , очевидно, $\langle \rho_k(x) \rho_l(x) \rangle = \delta_{kl} \gamma(x)$ и, свертывая по k, l от 2 до 3, получим $2\gamma(x) = \langle \rho^2(x) \rangle$. Поэтому

$$\begin{aligned} \langle \rho_k(x) \rho_l(x) \rangle &= \frac{\delta_{kl}}{2} \langle \rho^2(x) \rangle, \\ \Phi [a_0] &= e^{-\frac{1}{4} \kappa^2 \langle \rho^2(x) \rangle}. \end{aligned} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13), имеем

$$\begin{aligned} \langle \Delta_{\perp} \varepsilon_1(\xi, \rho) e^{-i\kappa\rho(x)} \rangle &= \\ &= \frac{i\kappa_l}{4} e^{-\frac{\kappa^2}{4} \langle \rho^2(x) \rangle} \int_0^L \frac{\partial \Delta_{\perp} D_e(\xi - \xi', \rho)}{\partial \rho_l} M(L, x, \xi') d\xi'. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставим выражение (15) в (3):

$$\begin{aligned} \varphi(x, \xi) &= \frac{i}{16\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho \int_0^L d\xi' \frac{\partial \Delta_{\perp} D_e(\xi - \xi', \rho)}{\partial \rho_l} M(L, x, \xi') \times \\ &\times \iint_{-\infty}^{\infty} \kappa_l \exp\left\{i\kappa\rho - \frac{1}{4} \kappa^2 \langle \rho^2(x) \rangle\right\} d^2\kappa. \end{aligned} \quad (16)$$

Внутренний интеграл по κ легко вычисляется:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\rho - b\kappa^2} d^2\kappa &= \frac{\pi}{b} e^{-\frac{\rho^2}{4b}}; \quad b = \frac{1}{4} \langle \rho^2(x) \rangle; \\ \iint_{-\infty}^{\infty} \kappa_l e^{i\kappa\rho - b\kappa^2} d^2\kappa &= \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \rho_l} \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i\kappa\rho - b\kappa^2} d^2\kappa = -\frac{\pi\rho_l}{2ib^2} e^{-\frac{\rho^2}{4b}}. \end{aligned}$$

Подставляя последнее равенство в (16), получаем

$$\varphi(x, \xi) = -\frac{1}{2\pi \langle \rho^2(x) \rangle^2} \iint_{-\infty}^{\infty} d^2\rho \int_0^L d\xi' M(L, x, \xi') \frac{\partial \Delta_{\perp} D_e(\xi - \xi', \rho)}{\partial \rho_l} \rho_l e^{-\frac{\rho^2}{4\langle \rho^2(x) \rangle}}. \quad (17)$$

Формула (17) дает общее решение интересующей нас задачи

Дальнейшие вычисления удобно производить в спектральной форме. Используя двумерное спектральное разложение структурной функции диэлектрической проницаемости

$$D_{\epsilon}(\xi - \xi', \rho) - D_{\epsilon}(\xi - \xi', 0) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - \exp(i\mathbf{x}\rho)] F_{\epsilon}(\xi - \xi', \mathbf{x}) d^2\mathbf{x},$$

получим

$$\frac{\partial \Delta_{\perp} D_{\epsilon}(\xi - \xi', \rho)}{\partial \rho_i} = 2i \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^2 \mathbf{x}_i e^{i\mathbf{x}\rho} F_{\epsilon}(\xi - \xi', \mathbf{x}) d^2\mathbf{x}. \quad (18)$$

Подставим это разложение в (17) и выполним интегрирование по ρ , подобно тому как было выполнено интегрирование по \mathbf{x} при переходе от формулы (16) к (17); после простых вычислений получаем

$$\varphi(x, \xi) = \frac{1}{2} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{x}^4 e^{-\frac{1}{4} \mathbf{x}^2 \langle \rho^2(\mathbf{x}) \rangle} d^2\mathbf{x} \int_0^L M(L, x, \xi') F_{\epsilon}(\xi - \xi', \mathbf{x}) d\xi'. \quad (17a)$$

Формула (17a) эквивалентна (17), но записана в спектральном виде. Она более удобна для дальнейших вычислений, так как $F_{\epsilon}(\xi - \xi', \mathbf{x})$, как функция $(\xi - \xi')$, сосредоточена в узкой области $|\xi - \xi'| < \frac{1}{\mathbf{x}}$. За счет множителя \mathbf{x}^4 в интеграле по \mathbf{x} существенными являются наибольшие значения \mathbf{x} , при которых F_{ϵ} еще заметно отлична от нуля, т. е. $\mathbf{x} \sim \mathbf{x}_m \sim l_0^{-1}$. Поэтому F_{ϵ} , как функция $\xi - \xi'$, заметно отлична от нуля в области $|\xi - \xi'| \leq l_0$. Воспользовавшись этим обстоятельством, можно приближенно вычислить интеграл по ξ' в (17a). Подставляя выражение (13.65) для $M(L, x, \xi')$, получим

$$\begin{aligned} \int_0^L M(L, x, \xi') F_{\epsilon}(\xi - \xi', \mathbf{x}) d\xi' &= (L - x) \int_0^x F_{\epsilon}(\xi - \xi', \mathbf{x}) d\xi' + \\ &+ \int_x^L (L - \xi') F_{\epsilon}(\xi - \xi', \mathbf{x}) d\xi'. \quad (19) \end{aligned}$$

Согласно формуле (1) $0 < \xi < x$. Поэтому в первом интеграле аргумент $\xi - \xi'$ меняется в пределах $-(x - \xi) < \xi - \xi' < \xi$, т. е. пробегает всю область $|\xi - \xi'| < l_0$, в которой функция F_{ϵ} заметно отлична от нуля. Так как вне этой области $F_{\epsilon}(\xi - \xi', \mathbf{x})$

быстро стремится к нулю, то

$$\int_0^x F_\varepsilon(\xi - \xi', \kappa) d\xi' \approx \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\xi - \xi', \kappa) d\xi'.$$

Аргумент $\xi - \xi'$ функции F_ε во втором интеграле в (19) меняется в пределах $-(L - \xi) < \xi - \xi' < -(x - \xi)$, т. е. всегда остается отрицательным и не захватывает область $|\xi - \xi'| < l_0$. Поэтому второй интеграл в (19) пренебрежимо мал и мы имеем

$$\begin{aligned} \int_0^L M(L, x, \xi') F_\varepsilon(\xi - \xi', \kappa) d\xi' &\approx (L - x) \int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\xi - \xi', \kappa) d\xi' = \\ &= 2\pi(L - x) \Phi_\varepsilon(\kappa) \text{ при } \xi < x. \end{aligned} \quad (20)$$

В последнем равенстве мы воспользовались формулой (28.5)

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_\varepsilon(\xi, \kappa) d\xi = 2\pi\Phi_\varepsilon(\kappa),$$

связывающей двумерный спектр F_ε с трехмерным спектром $\Phi_\varepsilon(\kappa)$.

Воспользовавшись формулой (20), получим

$$\varphi(x, \xi) = \pi(L - x) \iint_{-\infty}^{\infty} \kappa^4 \Phi_\varepsilon(\kappa) \exp\left\{-\frac{1}{4} \kappa^2 \langle \rho^2(x) \rangle\right\} d^2\kappa.$$

Используя статистическую изотропность флуктуаций ε , введем в последнем интеграле полярные координаты и выполним интегрирование по угловой переменной:

$$\varphi(x, \xi) = 2\pi^2(L - x) \int_0^{\infty} \Phi_\varepsilon(\kappa) \exp\left\{-\frac{1}{4} \kappa^2 \langle \rho^2(x) \rangle\right\} \kappa^5 d\kappa. \quad (21)$$

Как следует из (21), $\varphi(x, \xi)$ не зависит от ξ . Поэтому, подставляя (21) в (1), можно выполнить интегрирование по ξ , что приводит к формуле

$$F(x) = \pi^2 x(L - x) \int_0^{\infty} \Phi_\varepsilon(\kappa) \exp\left\{-\frac{1}{4} \kappa^2 \langle \rho^2(x) \rangle\right\} \kappa^5 d\kappa. \quad (22)$$

Подставляя (22) в (15.65), получаем

$$\langle \chi(L) \rangle = -\frac{\pi^2}{2} \int_0^L x(L-x) dx \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) \exp \left\{ -\frac{1}{4} \kappa^2 \langle \rho^2(x) \rangle \right\} \kappa^5 d\kappa. \quad (23)$$

Согласно соотношению (19.65)

$$\sigma_x^2 = \frac{\pi^2}{2} \int_0^L x(L-x) dx \int_0^\infty \Phi_\varepsilon(\kappa) \exp \left\{ -\frac{1}{4} \kappa^2 \langle \rho^2(x) \rangle \right\} \kappa^5 d\kappa. \quad (24)$$

Обратимся теперь к вычислению $\langle \rho^2(x) \rangle$. Используя (14.65), имеем

$$\begin{aligned} \langle \rho^2(x) \rangle &= \\ &= \frac{1}{4} \int_0^{L_1} \int_0^{L_2} M(L, x, \xi_1) M(L, x, \xi_2) \langle \nabla_{\perp} e_1(\xi_1, 0) \nabla_{\perp} e_1(\xi_2, 0) \rangle d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (25)$$

Но (см. вывод формулы (11) из (10))

$$\begin{aligned} \langle \nabla_{\perp} e_1(\xi_1, 0) \nabla_{\perp} e_1(\xi_2, 0) \rangle &= \\ &= \frac{1}{2} \Delta_{\perp} D_\varepsilon(\xi_1 - \xi_2, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2 F_\varepsilon(\xi_1 - \xi_2, \kappa) d\kappa^2. \end{aligned}$$

Подставим это выражение в (25) и изменим порядок интегрирования по κ и (ξ_1, ξ_2) :

$$\begin{aligned} \langle \rho^2(x) \rangle &= \\ &= \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2 d^2\kappa \int_0^{LL} M(L, x, \xi_1) M(L, x, \xi_2) F_\varepsilon(\xi_1 - \xi_2, \kappa) d\xi_1 d\xi_2. \end{aligned} \quad (26)$$

Внутренний интеграл I по ξ_1, ξ_2 может быть легко найден после перехода к новым переменным интегрирования $u = \xi_1 - \xi_2$, $v = \frac{1}{2}(\xi_1 + \xi_2)$. Подставляя M из (13.65), мы получим для I сумму четырех интегралов, которые в переменных ξ_1, ξ_2 распространены по областям $(0 \div x, 0 \div x)$ $(x \div L, x \div L)$, $(0 \div x, x \div L)$ и $(x \div L, 0 \div x)$ соответственно. Два последних интеграла пренебрежимо малы, так как в их областях интегрирования всегда или $u > 0$ или $u < 0$, т. е. наиболее существенная область $|u| < l_0$, где функция $F_\varepsilon(u, \kappa)$ заметно отлична от нуля, не содержится. В первых же двух интегралах пределы интегрирования по u можно раздвинуть от минус до плюс

бесконечности, так как функция $F_z(u, x)$ очень быстро убывает с ростом $|u|$. Получающиеся при этом интегралы по u имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_z(u, x) du = 2\pi\Phi_z(x)$$

и

$$\int_{-\infty}^{\infty} u^2 F_z(u, x) du \approx 0$$

(за счет множителя u^2 , малого в наиболее существенной для интегрирования области). Таким образом, можно получить формулу

$$\begin{aligned} \int_0^L \int_0^L M(L, x, \xi_1) M(L, x, \xi_2) F_z(\xi_1 - \xi_2, x) d\xi_1 d\xi_2 &\approx \\ \approx 2\pi\Phi_z(x) \left[x(L-x)^2 + \frac{(L-x)^3}{3} \right] &= \frac{2}{3} \pi\Phi_z(x) (L^3 - 3Lx^2 + 2x^3), \end{aligned}$$

так что выражение для $\langle \rho^2(x) \rangle$ принимает вид

$$\begin{aligned} \langle \rho^2(x) \rangle &= \frac{\pi}{6} (L^3 - 3Lx^2 + 2x^3) \int_{-\infty}^{\infty} \kappa^2 \Phi_z(\kappa) d^2\kappa = \\ &= \frac{\pi^2}{3} (L^3 - 3Lx^2 + 2x^3) \int_0^{\infty} \kappa_1^3 \Phi_z(\kappa_1) d\kappa_1. \end{aligned} \quad (27)$$

В соответствии с граничным условием $\rho(L) = 0$ выражение (27) обращается в нуль при $x = L$. В формулу (24), определяющую σ_x^2 , входит выражение

$$\frac{1}{4} \kappa^2 \langle \rho^2(x) \rangle = \frac{\pi^2 L^3}{12} \kappa^2 \left(1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3} \right) Q,$$

где

$$Q = \int_0^{\infty} \kappa_1^3 \Phi_z(\kappa_1) d\kappa_1. \quad (28)$$

Введем в (24) вместо x новую переменную интегрирования

$$z = 1 - 3 \frac{x^2}{L^2} + 2 \frac{x^3}{L^3}, \quad dz = -\frac{6}{L^3} x(L-x) dx.$$

Тогда, меняя порядок интегрирования по z и κ , будем иметь

$$\sigma_x^2 = \int_0^1 \Phi_\varepsilon(\kappa) \kappa^5 d\kappa \frac{\pi^2 L^3}{12} \int_0^1 e^{-\frac{\pi^2 L^3}{12} Q \kappa^2 z} dz$$

и после вычисления интеграла получим окончательно

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{Q} \int_0^\infty \kappa^3 \Phi_\varepsilon(\kappa) \left[1 - \exp\left(-\frac{\pi^2 L^3}{12} Q \kappa^2\right) \right] d\kappa. \quad (29)$$

Формула (29) дает общее выражение для σ_x^2 в случае произвольного вида спектра $\Phi_\varepsilon(\kappa)$. Из выражения (29) видно, что в случае, когда $L^3 Q \kappa_m^2 \ll 1$ и экспоненту можно разложить в ряд, мы получим

$$\sigma_x^2 \approx \sigma_1^2 = \frac{\pi^2 L^3}{12} \int_0^\infty \kappa^5 \Phi_\varepsilon(\kappa) d\kappa. \quad (30)$$

В случае же, когда $QL^3 \kappa_m^2 \gg 1$, экспонента в (29) несущественна и

$$\sigma_x^2 \rightarrow 1 \text{ при } L \rightarrow \infty. \quad (31)$$

Рассмотрим в качестве примера случай турбулентных флуктуаций ε_1 , когда $\Phi_\varepsilon(\kappa)$ имеет вид

$$\begin{aligned} \Phi_\varepsilon(\kappa) &= AC_\varepsilon^2 \kappa^{-11/3} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}}, \\ A &= \frac{\Gamma\left(\frac{8}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3}}{4\pi^2} \approx 0,033. \end{aligned} \quad (32)$$

В этом случае интеграл (28), определяющий Q , вычисляется сведением к Γ -функции и оказывается равным

$$Q = AC_\varepsilon^2 \int_0^\infty \kappa^{-\frac{2}{3}} e^{-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}} d\kappa = \frac{1}{2} A \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) C_\varepsilon^2 \kappa_m^{\frac{1}{3}}. \quad (33)$$

Найдем также величину σ_1^2 , определяемую формулой (30) (σ_1^2 представляет собой значение σ_x^2 , соответствующее области малых флуктуаций, т. е. теории возмущений):

$$\sigma_1^2 = \frac{\pi^2 A \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)}{24} C_\varepsilon^2 L^3 \kappa_m^{\frac{7}{3}}. \quad (34)$$

При помощи выражений (33) и (34) показатель экспоненты в (29) можно записать в виде

$$\frac{\pi^2 L^3}{12} Q \kappa^3 = 6\sigma_1^2 \frac{\kappa^3}{\kappa_m^2},$$

и (29) для данного случая принимает вид

$$\sigma_x^2 = \frac{2\kappa_m^{-\frac{1}{3}}}{\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)} \int_0^\infty \kappa^{-\frac{2}{3}} \left[1 - e^{-6\sigma_1^2 \frac{\kappa^3}{\kappa_m^2}} \right] e^{-\frac{\kappa^3}{\kappa_m^2}} d\kappa.$$

Входящий сюда интеграл легко вычисляется, и мы получаем

$$\sigma_x^2 = 1 - \frac{1}{[1 + 6\sigma_1^2]^{1/6}}. \quad (35)$$

Таким образом, σ_x^2 является функцией от σ_1^2 , т. е. от величины σ_x^2 , вычисленной методом возмущений. При $\sigma_1^2 \ll 1$ $\sigma_x^2 \approx \sigma_1^2$, при $\sigma_1^2 \gg 1$ величина $\sigma_x^2 \rightarrow 1$ в соответствии с (31).

Если вид спектра $\Phi_\varepsilon(\kappa)$ отличается от (32), то зависимость $\sigma_x^2 = f(\sigma_1^2)$ будет, конечно, отличаться от (35), однако асимптоты при $\sigma_1^2 \rightarrow 0$ и $\sigma_1^2 \rightarrow \infty$ будут одни и те же для любых возможных спектральных плотностей $\Phi_\varepsilon(\kappa)$.

Приведенный здесь расчет основан на методе геометрической оптики в приближении малых флуктуаций направления луча. В случае турбулентных пульсаций диэлектрической проницаемости (11.42)

$$\langle \alpha^2 \rangle \sim C_\varepsilon^2 L \kappa_m^{\frac{1}{3}},$$

так что $\sigma_1^2 \sim \langle \alpha^2 \rangle (\kappa_m L)^2$. Условие $\langle \alpha^2 \rangle \ll 1$ применимости метода принимает вид $\sigma_1^2 (\kappa_m L)^{-2} \ll 1$ или

$$\sigma_1^2(L) \ll \left(\frac{L}{l_0}\right)^2. \quad (36)$$

Условие (36) является очень слабым и практически не мешает использовать формулу (35) в реальных условиях.

Попытаемся дать наглядное истолкование полученного результата. Как следует из принципа Ферма, истинная траектория луча стационарна. Отсюда следует, что если взять луч, входящий в точку $(L, \delta r)$, бесконечно близкую к точке наблюдения

($L, 0$) и находящуюся на той же поверхности $\theta = \text{const}$, то разность эйконалов в них будет порядка $\delta\rho^2$. Если же интегрирование производить не вдоль истинных лучей, а, например, вдоль прямых линий, проходящих через эти точки, как это делается в методе возмущений, то разность эйконалов будет порядка $\delta\rho$. Таким образом, для истинного луча поперечное изменение эйконала меньше, чем для произвольно выбранной линии, а поэтому и амплитудные флуктуации, определяемые поперечными изменениями эйконала, меньше, чем при расчете по методу возмущений.

Следует также сделать одно замечание к проделанному расчету. Принятое уравнение луча (10а.65) всегда имеет единственное решение, в отличие от точного уравнения (10.65). Это означает, что мы пренебрегаем возможностью попадания точки наблюдения в область вблизи каустики, где лучи могут пересекаться. Но учет этого эффекта нельзя провести в рамках геометрической оптики, которая вблизи каустики несправедлива. Однако согласие результатов проделанного расчета с данными эксперимента (см. ниже) дает основание предполагать, что этот эффект не играет определяющей роли и может, по-видимому, изменить результат не очень существенно.

В заключение мы попытаемся включить в рассмотренную схему дифракционные эффекты. Для этого сравним формулу, получаемую для σ_1^2 в приближении геометрической оптики:

$$\sigma_1^2 = \frac{\pi^2 L^3}{12} \int_0^\infty \kappa^5 \Phi_\epsilon(\kappa) d\kappa, \quad (30)$$

с формулой (36.46), определяющей эту величину в приближении метода плавных возмущений:

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{2} \pi^2 k^2 L \int_0^\infty \left[1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k} \right] \Phi_\epsilon(\kappa) \kappa d\kappa. \quad (37)$$

Формулу (37) можно трактовать как результат расчета флуктуаций амплитуды в приближении геометрической оптики для фиктивной среды, неоднородности диэлектрической проницаемости которой описываются спектром

$$\Phi_\epsilon^{(3)}(\kappa) = 6 \frac{1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k}}{\left(\frac{\kappa^2 L}{k} \right)^2} \Phi_\epsilon(\kappa). \quad (38)$$

Действительно, если подставить (38) в (30), то это приводит к формуле (37) метода плавных возмущений. Спектральная плотность $\Phi_{\varepsilon}^{(3)}(\kappa)$ отличается от $\Phi_{\varepsilon}^{\varepsilon}(\kappa)$ тем, что в ней подавлены мелкомасштабные компоненты с размерами, меньшими радиуса первой зоны Френеля, в области же больших масштабов $\Phi_{\varepsilon}^{(3)} \approx \Phi_{\varepsilon}$. Можно предположить, — хотя это, конечно, требует дополнительного серьезного обоснования для области сильных флуктуаций, — что, подставляя в формулы (28), (29) спектральную плотность (38), мы учтем дифракционные эффекты. Если произвести таким образом расчет, исходя из спектральной плотности (32), то в случае $\frac{\kappa_m^2 L}{k} \gg 1$ (т. е. в случае, когда геометрическая оптика уже неприменима из-за дифракционных эффектов) можно легко получить формулу

$$\sigma_{\varepsilon}^2 = 1 - \frac{17}{6} \sec \frac{\pi}{12} d^{-1/2} \left[1 - (1 + d^2)^{1/2} \frac{\sin \left(\frac{17}{6} \arctg d \right)}{\frac{17}{6} d} \right], \quad (39)$$

где $d = \frac{17}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \frac{1}{\sigma_1^2}$ и σ_1 определяется выражением

$$\sigma_1^2 = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{11} \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12} AC_{\varepsilon}^2 k^{1/2} L^{1/2}, \quad (39a)$$

полученным в гл. 3 методом плавных возмущений.

Функция $\sigma_{\varepsilon}^2 = f(\sigma_1^2)$, определяемая формулой (39), по своему виду значительно отличается от функции, задаваемой формулой (35), однако их численное сравнение показывает, что расхождение между ними очень мало и не превышает нескольких процентов. Поэтому (35) можно рассматривать в данном случае как аппроксимацию формулы (39).

На рис. 96 приведено сравнение полученных М. Е. Грачевой и А. С. Гурвичем [170] экспериментальных данных с функцией (35). Можно сделать заключение о том, что они удовлетворительно согласуются друг с другом.

Сделаем также еще одно замечание о возможной интерпретации полученных формул. Выражение (29) можно рассматривать как спектральное разложение величины σ_{ε}^2 . В этом случае двумерная спектральная плотность $F_{\varepsilon}(L, \kappa)$ будет иметь вид

$$F_{\varepsilon}(L, \kappa) = \frac{1}{2\pi Q} \kappa^2 \left[1 - e^{-\frac{\pi^2 L^3}{12} Q \kappa^2} \right] \Phi_{\varepsilon}(\kappa) \quad (40)$$

в соответствии с общей формулой

$$\sigma_x^2 = 2\pi \int_0^{\infty} F_x(L, \kappa) \kappa d\kappa.$$

Корреляционная функция $B_x(\rho)$ определяется выражением

$$\begin{aligned} B_x(\rho) &= 2\pi \int_0^{\infty} J_0(\kappa\rho) F_x(L, \kappa) \kappa d\kappa = \\ &= \frac{1}{Q} \int_0^{\infty} J_0(\kappa\rho) \left[1 - e^{-\frac{\pi^2 L^2}{12} Q \kappa^2} \right] \Phi_x(\kappa) \kappa^3 d\kappa. \end{aligned} \quad (41)$$

При $\sigma_1^2 \rightarrow 0$ выражение (41) переходит в полученное в гл. 3 спектральное разложение корреляционной функции флуктуаций

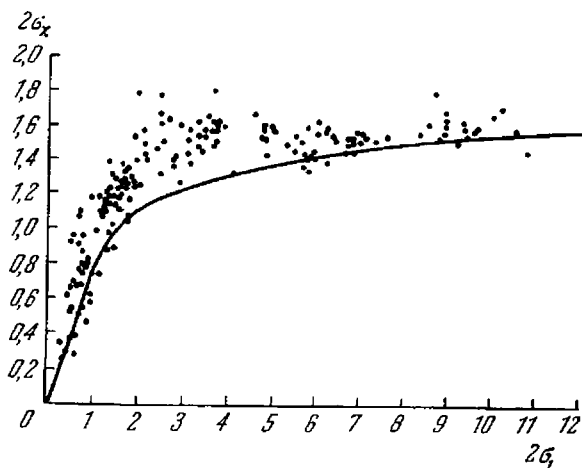


Рис. 96. Эмпирическая и теоретическая зависимость σ_x от σ_1 .

амплитуды. В случае же сильных флуктуаций выражение (41), конечно, требует более серьезного обоснования. Однако выводы, которые можно сделать из формулы (41), имеют ясный физический смысл. В случае, когда $\sigma_1^2 \gg 1$, дополнительный по сравнению со случаем $\sigma_1^2 \ll 1$ множитель

$$u(\kappa) = \frac{1 - e^{-\frac{\pi^2 L^2}{12} Q \kappa^2}}{\frac{\pi^2 L^2}{12} Q \kappa^2},$$

возникающий в спектральной плотности $F_x(L, \kappa)$, подавляет спектральные компоненты, для которых

$$\frac{\pi^2 L^3}{12} Q \kappa^2 \gg 1, \text{ т. е. } \kappa^2 \gg \kappa_0^2 = \frac{12}{\pi^2 L^3 Q}.$$

Но, как следует из формул (27), (28),

$$\langle \rho^2(0) \rangle = \frac{1}{3} \pi^2 L^3 Q,$$

так что $\kappa_0^2 \sim \langle \rho^2(0) \rangle^{-1}$. Таким образом, при $\sigma_1 \gg 1$ радиус корреляции флуктуаций амплитуды имеет порядок $\sqrt{\langle \rho^2(0) \rangle}$, т. е. определяется размером той области, в которой может находиться луч за счет случайных блужданий. Этот вывод представляется физически оправданным.

Наконец, в случае учета дифракционных эффектов в формулы (41) и (28), определяющие $B_x(\rho)$, следует подставлять спектральную плотность (38). Для случая, когда $\Phi_x(\kappa)$ задается формулой (32) и выполняются условия $\frac{\kappa_m^2 L}{k} \gg 1, \kappa_m \rho \gg 1$, в (32) можно опустить множитель $\exp\left(-\frac{\kappa^2}{\kappa_m^2}\right)$. В этом случае

$$B_x(\rho) = \frac{1}{Q} \int_0^\infty J_0(\kappa \rho) \kappa^2 \left[1 - e^{-\frac{\pi^2 L^3}{12} Q \kappa^2}\right] 6 \frac{1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k}}{\left(\frac{\kappa^2 L}{k}\right)^2} AC_e^2 \kappa^{-1/2} d\kappa,$$

$$Q = \int_0^\infty \kappa^3 6 \frac{1 - \frac{k}{\kappa^2 L} \sin \frac{\kappa^2 L}{k}}{\left(\frac{\kappa^2 L}{k}\right)^2} AC_e^2 \kappa^{-1/2} d\kappa.$$

После вычисления интеграла, определяющего Q , можно получить формулу

$$\frac{\pi^2 L^3}{12} Q = \frac{6}{17} \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \frac{L}{k} \sigma_1^2,$$

где σ_1^2 определяется выражением (39а). Вводя новую переменную интегрирования $u^2 = \frac{\kappa^2 L}{k}$ и выражая Q через σ_1^2 , получим формулу

$$B_x(\rho) = P \int_0^\infty J_0(au) \left[1 - e^{-\frac{u^2}{d}}\right] \left[1 - \frac{\sin u^2}{u^2}\right] u^{-\frac{14}{3}} du, \quad (42)$$

где

$$P = \frac{2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 17}{6^3 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) \cos \frac{\pi}{12}}, \quad d = \frac{17}{6} \operatorname{tg} \frac{\pi}{12} \frac{1}{\sigma_1^2}, \quad a = \rho \sqrt{\frac{k}{L}}.$$

Из (42) следует, что $B(\rho)$ зависит от двух безразмерных параметров: $a = \sqrt{2\pi} \frac{\rho}{\sqrt{\lambda L}}$ и σ_1^2 .

Интеграл, входящий в (42), может быть сведен к комбинации табличных интегралов [117, (6.631.4)] (при этом вместо множителя $u^{-14/3}$ в (42) вводится множитель u^{14} и используется принцип аналитического продолжения по μ). В результате получим

$$B_x(\rho) = \frac{17}{3 \cos \frac{\pi}{12}} \left\{ \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^{11/3}}{2\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} \left[1 - \Gamma\left(\frac{17}{6}\right) \left(\frac{a^2 d}{4}\right)^{-11/3} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{a^2 d}{4}\right) \right] - \right. \\ \left. - \frac{3}{17} \operatorname{Im} e^{-\frac{17}{12} i\pi} \left[\left(1 + \frac{i}{d}\right)^{11/3} {}_1F_1\left(-\frac{17}{6}, 1, -\frac{a^2 d}{4(1-id)}\right) - \right. \right. \\ \left. \left. - {}_1F_1\left(-\frac{17}{6}, 1, -\frac{ia^2}{4}\right) \right] \right\}, \quad (43)$$

При $\sigma_1^2 \ll 1$ функция (43) переходит в формулу для $B(\rho)$, полученную в гл. 3 методом плавных возмущений. При $\sigma_1^2 \gg 1$ радиус корреляции флуктуаций логарифма амплитуды, определяемый соотношением $B_x(\rho_0) = 0$, увеличивается пропорционально $\sigma_1^{6/7}$:

$$\rho_0 \sim \sigma_1^{6/7} \sqrt{\lambda L}.$$

В области $a^2 \gg 1$, $a^2 \gg \sigma_1^2$, асимптотический вид функции (43) определяется равенством

$$B_x(\rho) \cong -N \sigma_1^2 \left(\rho \sqrt{\frac{k}{L}}\right)^{-1/3}, \quad N = \frac{55}{54} \frac{\cos \frac{\pi}{12} \Gamma\left(\frac{7}{6}\right)^3 \sqrt{2}}{3\pi} \approx 0,12.$$

Функция

$$b_x(\rho) = \frac{B_x(\rho)}{B_x(\rho_0)} \quad (44)$$

для значений $\sigma_1^2 = 25$ и $\sigma_1^2 \rightarrow 0$, построенная по формулам (43), (44), приведена на рис. 97. Отметим, что увеличение радиуса корреляции флуктуаций амплитуды при $\sigma_1^2 \gg 1$ по сравнению с его значением в области слабых флуктуаций отмечается в работе М. Е. Грачевой [182] (см. также рис. 59, а, б, где непосредствен-

но видно увеличение временного масштаба флуктуаций с ростом σ_1 .

Приведенный в настоящем разделе расчет сильных флуктуаций амплитуды в области применимости геометрической оптики

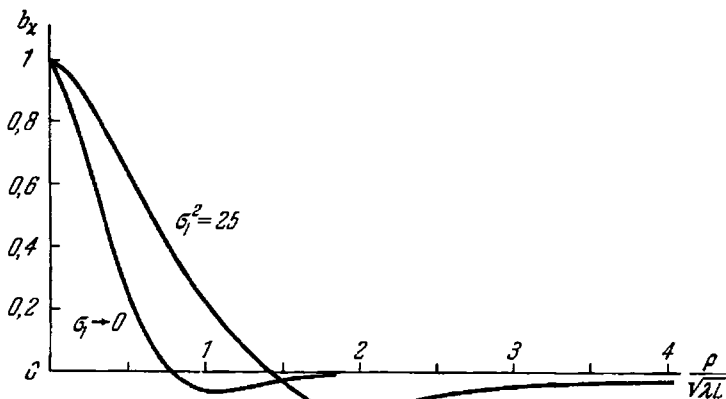


Рис. 97. Корреляционные функции флуктуаций логарифма амплитуды при различных значениях параметра σ_1 .

является, по-видимому, значительно более корректным, чем расчет сильных флуктуаций в § 51 гл. 3.

Аналогичный расчет для области, где существенны дифракционные эффекты, может быть выполнен и на основе метода плавных возмущений. Для этого вместо эйконала θ в уравнение $\text{div}(A^2 \nabla \theta) = 0$ следует подставить фазу S , найденную с учетом дифракционных эффектов (мнимая часть выражения (30.45)). Последующие вычисления аналогичны проделанным выше и приводят к результату, хотя и не совпадающему буквенно с выражением (39), но очень близкому к нему численно.

Однако полученные таким образом результаты, по-видимому, нельзя считать окончательными и они еще нуждаются в дальнейшем уточнении.

I. ВАРИАЦИОННЫЕ ПРОИЗВОДНЫЕ

В настоящем приложении даются понятие и некоторые правила вычисления с вариационными производными. За более подробными и строгими сведениями по затрагиваемым здесь вопросам необходимо обратиться к специальной литературе по функциональному анализу.

Мы говорим, что задан функционал $\Phi [f(\xi)]$, если каждой функции $f(\xi)$, принадлежащей некоторой области, поставлено в соответствие число Φ , зависящее от этой функции.

Например,

$$\Phi [f(\xi)] = \int_a^b f(\xi) a_1(\xi) d\xi, \quad (1)$$

где функция $a(\xi)$ фиксирована, представляет собой линейный функционал, определенный для тех функций $f(\xi)$, для которых интеграл (1) сходится. Примером нелинейного функционала является билинейный функционал

$$\Phi [f(\xi)] = \int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta, \quad (2)$$

или функционал вида

$$\Phi [f(\xi)] = \int_a^b F(f(\xi)) d\xi, \quad (3)$$

где $F(x)$ — заданная функция и $F(f(\xi))$ — функция от функции.

Пусть задан функционал $\Phi [f(\xi)]$. Рассмотрим его значение на функции $f(\xi) + \delta f(\xi)$, где $\delta f(\xi)$ равна нулю всюду, кроме окрестности $\Delta(x)$ некоторой точки x из интервала (a, b) . Значение $\Phi [f(\xi) + \delta f(\xi)]$ отличается от $\Phi [f(\xi)]$ на вариацию функционала

$$\delta\Phi = \{\Phi [f(\xi) + \delta f(\xi)] - \Phi [f(\xi)]\}, \quad (4)$$

причем скобки $\{ \}$ означают, что берется линейная по δf часть этой разности. $\delta\Phi$ обращается в нуль вместе с $\delta f(\xi)$. Рассмотрим

отношение

$$\frac{\delta\Phi}{\int_{\Delta(x)} \delta f(\xi) d\xi} \quad (5)$$

и устремим $\Delta(x)$ к нулю, стягивая этот интервал к точке x . Если предел выражения (5) при этом существует, он называется вариационной производной от $\Phi[f(\xi)]$ в точке x и обозначается

$$\frac{\delta\Phi[f(\xi)]}{\delta f(x)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\{\Phi[f(\xi) + \delta f(\xi)] - \Phi[f(\xi)]\}}{\int_{\Delta(x)} \delta f(\xi) d\xi}. \quad (6)$$

В качестве примера найдем вариационную производную от функционала (1)

$$\begin{aligned} \Phi[f(\xi) + \delta f(\xi)] &= \int_a^b [f(\xi) + \delta f(\xi)] a(\xi) d\xi = \\ &= \int_a^b f(\xi) a(\xi) d\xi + \int_a^b \delta f(\xi) a(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

$$\Phi[f(\xi) + \delta f(\xi)] - \Phi[f(\xi)] = \int_a^b \delta f(\xi) a(\xi) d\xi = \int_{\Delta(x)} \delta f(\xi) a(\xi) d\xi,$$

причем в последнем равенстве мы учли, что $\delta f(\xi)$ отлична от нуля лишь на интервале $\Delta(x)$. В данном случае $\Phi[f(\xi) + \delta f(\xi)] - \Phi[f(\xi)]$ линейно по δf , так что

$$\frac{\delta\Phi[f(\xi)]}{\delta f(x)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \frac{\int_{\Delta(x)} \delta f(\xi) a(\xi) d\xi}{\int_{\Delta(x)} \delta f(\xi) d\xi}.$$

Если $a(\xi)$ непрерывна в точке x , то интеграл в числителе по теореме о среднем равен

$$a(x') \int_{\Delta(x)} \delta f(\xi) d\xi,$$

где $x' \in \Delta(x)$, так что

$$\frac{\delta\Phi[f(\xi)]}{\delta f(x)} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} a(x') = a(x),$$

так как при $\Delta \rightarrow 0$ $x' \rightarrow x$. Таким образом,

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \left[\int_a^b f(\xi) a(\xi) d\xi \right] = a(x). \quad (7)$$

В качестве второго примера найдем производную от функционала (2):

$$\begin{aligned} \Phi [f(\xi) + \delta f(\xi)] &= \int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) [f(\xi) + \delta f(\xi)] [f(\eta) + \delta f(\eta)] d\xi d\eta = \\ &= \int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta + \int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) [f(\xi) \delta f(\eta) + \\ &\quad + f(\eta) \delta f(\xi)] d\xi d\eta + \int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) \delta f(\xi) \delta f(\eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое в этом выражении квадратично по δf и его следует отбросить при вычислении $\delta\Phi$:

$$\begin{aligned} \delta\Phi &= \int_a^b d\xi \int_{\Delta(x)} d\eta A(\xi, \eta) f(\xi) \delta f(\eta) + \int_a^b d\eta \int_{\Delta(x)} d\xi A(\xi, \eta) f(\eta) \delta f(\xi) = \\ &= \int_a^b d\xi \int_{\Delta(x)} d\eta [A(\xi, \eta) + A(\eta, \xi)] f(\xi) \delta f(\eta) \end{aligned}$$

(в последнем равенстве была использована замена переменных интегрирования $\xi \leftrightarrow \eta$). Вычисляя интеграл по η при помощи теоремы о среднем, получим

$$\delta\Phi = \int_a^b f(\xi) [A(\xi, x') + A(x', \xi)] d\xi \int_{\Delta(x)} \delta f(\eta) d\eta,$$

так что

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta = \int_a^b [A(\xi, x) + A(x, \xi)] f(\xi) d\xi.$$

Заметим, что $A(\xi, \eta)$ всегда можно считать симметричной функцией. Действительно,

$$A(\xi, \eta) = \frac{A(\xi, \eta) + A(\eta, \xi)}{2} + \frac{A(\xi, \eta) - A(\eta, \xi)}{2}.$$

Подставляя это выражение в (2), легко убедиться в том, что интегрирование второго слагаемого дает нуль:

$$\frac{1}{2} \int_a^b \int_a^b [A(\xi, \eta) - A(\eta, \xi)] f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta = 0 \quad (*)$$

(для этого достаточно в одном из интегралов в (*) произвести замену $\xi \leftrightarrow \eta$).

Поэтому в функционале (2) можно считать $A(\xi, \eta) = A(\eta, \xi)$. В этом случае

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \left[\int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta \right] = 2 \int_a^b A(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Аналогично, если $A_n(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ — симметричная функция всех аргументов, то

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(x)} \left[\int_a^b \dots \int_a^b A_n(\xi_1, \dots, \xi_n) f(\xi_1) \dots f(\xi_n) d\xi_1 \dots d\xi_n \right] = \\ = n \int_a^b \dots \int_a^b A_n(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, x) f(\xi_1) \dots f(\xi_{n-1}) d\xi_1 \dots d\xi_{n-1}. \quad (8) \end{aligned}$$

Эта формула является аналогом формулы

$$\frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}.$$

Важным частным случаем формулы (7) является

$$\frac{\delta f(x_0)}{\delta f(x)} = \delta(x - x_0). \quad (9)$$

Эту формулу можно получить из (7), если положить

$$a(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\frac{\xi^2}{2\sigma^2}},$$

перейти к пределу при $\sigma \rightarrow 0$ и учесть, что $\lim_{\sigma \rightarrow 0} a(\xi) = \delta(\xi)$.

Формула (9) позволяет упростить дифференцирование многих функционалов.

Легко установить формулу

$$\frac{\delta\Phi_1[f(\xi)] \Phi_2[f(\xi)]}{\delta f(x)} = \Phi_1[f(\xi)] \frac{\delta\Phi_2[f(\xi)]}{\delta f(x)} + \Phi_2[f(\xi)] \frac{\delta\Phi_1[f(\xi)]}{\delta f(x)}. \quad (10)$$

В качестве иллюстрации применения формул (9) и (10) еще раз вычислим производную от (2):

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\delta f(x)} \left[\int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta \right] &= \int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) \frac{\delta [f(\xi) f(\eta)]}{\delta f(x)} d\xi d\eta = \\ &= \int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) \left[\frac{\delta f(\xi)}{\delta f(x)} f(\eta) + f(\xi) \frac{\delta f(\eta)}{\delta f(x)} \right] d\xi d\eta = \\ &= \int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) [\delta(\xi - x) f(\eta) + f(\xi) \delta(\eta - x)] d\xi d\eta = \\ &= \int_a^b A(x, \eta) f(\eta) d\eta + \int_a^b A(\xi, x) f(\xi) d\xi = 2 \int_a^b A(\xi, x) f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Выведем важную формулу

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \{F(\Phi[f(\xi)])\} = F'(\Phi[f(\xi)]) \frac{\delta \Phi[f(\xi)]}{\delta f(x)} \quad (11)$$

для дифференцирования функции от функционала. Пусть

$$\Psi[f(\xi)] = F(\Phi[f(\xi)]).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Psi[f(\xi) + \delta f(\xi)] &= F(\Phi[f(\xi) + \delta f(\xi)]) = F(\Phi[f(\xi)] + \delta \Phi) = \\ &= F(\Phi[f(\xi)]) + F'(\Phi[f(\xi)]) \delta \Phi + \dots, \\ \delta \Psi &= F'(\Phi[f(\xi)]) \delta \Phi. \end{aligned}$$

Подставляя это выражение в определение (6), получим формулу (11). Пример:

$$\frac{\delta}{\delta f(x)} \left\{ e^{\int_a^b f(\xi) \alpha(\xi) d\xi} \right\} = \alpha(x) e^{\int_a^b f(\xi) \alpha(\xi) d\xi}$$

Как мы убедились на примерах, $\delta \Phi[f(\xi)]/\delta f(x)$ снова является функционалом, но зависит еще и от точки x , т. е. является обычной функцией x .

Можно рассматривать вторые и т. д. производные:

$$\frac{\delta^2 \Phi[f(\xi)]}{\delta f(x_1) \delta f(x_2)}, \quad \frac{\delta^3 \Phi[f(\xi)]}{\delta f(x_1) \delta f(x_2) \delta f(x_3)}.$$

Они являются функциями точек x_1, x_2, \dots . Например,

$$\frac{\delta^2}{\delta f(x_1) \delta f(x_2)} \left[\int_a^b \int_a^b A(\xi, \eta) f(\xi) f(\eta) d\xi d\eta \right] = 2A(x_1, x_2).$$

Для функционалов можно вывести формулу, аналогичную ряду Тейлора:

$$\begin{aligned} \Phi[f(\xi)] &= \Phi[f_0(\xi)] + \int_a^b \frac{\delta\Phi[f(\xi)]}{\delta f(x)} \Big|_{f=f_0} [f(x) - f_0(x)] dx + \\ &+ \frac{1}{2!} \int_a^b \int_a^b \frac{\delta^2\Phi[f(\xi)]}{\delta f(x_1) \delta f(x_2)} \Big|_{f=f_0} [f(x_1) - f_0(x_1)] [f(x_2) - f_0(x_2)] dx_1 dx_2 + \dots \end{aligned} \quad (12)$$

Эту формулу легче всего получить, рассматривая значение функционала $\Phi[f(x)]$ на ступенчатой функции

$$f_n(x) = \begin{cases} f_0 & \text{при } a \leq \xi < h = \frac{b-a}{n}, \\ f_1 & \text{при } h \leq \xi < 2h, \\ \dots & \dots \\ f_{n-1} & \text{при } (n-1)h \leq \xi \leq nh = b. \end{cases} \quad (13)$$

В этом случае

$$\Phi[f_n(x)] = F(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}),$$

т. е. Φ превращается в функцию n переменных f_0, \dots, f_{n-1} . При этом имеет место формула

$$\frac{\delta\Phi[f(\xi)]}{\delta f(x)} = \frac{1}{h} \frac{\partial F(f_0, \dots, f_{n-1})}{\partial f_k}, \quad (14)$$

где $f_k = f_n(x_k)$ (см. (13)). Для $F(f_0, \dots, f_{n-1})$ имеет место формула Тейлора

$$\begin{aligned} F(f_0, f_1, \dots, f_{n-1}) &= F(f_0^0, f_1^0, \dots, f_{n-1}^0) + \\ &+ \sum_k \frac{\partial F(f_0^0, f_1^0, \dots, f_{n-1}^0)}{\partial f_k} (f_k - f_k^0) + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_k \sum_l \frac{\partial^2 F(f_0^0, f_1^0, \dots, f_{n-1}^0)}{\partial f_k \partial f_l} (f_k - f_k^0)(f_l - f_l^0) + \dots \end{aligned}$$

Подставляя сюда (14) и аналогичные формулы для высших производных, получим

$$\Phi [f_n(x)] = \Phi [f_n^0(x)] + \sum_k \frac{\delta\Phi [f_n(\xi)]}{\delta f_n(x_k)} h + \dots$$

Переходя к пределу при $n \rightarrow \infty$ ($h \rightarrow 0$), получим формулу (13).

Рассмотрим преобразование функциональных производных при замене переменных. Пусть вместо функции $f(x)$ вводятся новые функции $\varphi(x)$ согласно равенству

$$f(x) = \Psi [\varphi(\xi); x], \quad (15)$$

где Ψ — некоторый функционал функции $\varphi(\xi)$, зависящий так же и от x . Тогда функционал $\Phi [f(\xi)]$ является некоторым сложным функционалом от φ :

$$\Phi [f(\xi)] = \Phi [\Psi [\varphi(\eta); \xi]] \equiv \Phi_1 [\varphi(\xi)].$$

Используя (13) и (14), легко показать, что

$$\frac{\delta\Phi_1 [\varphi(\xi)]}{\delta\varphi(x)} = \int_a^b \frac{\delta\Phi [f(\xi)]}{\delta f(x')} \frac{\delta\Psi [\varphi(\eta); x']}{\delta\varphi(x)} dx'. \quad (16)$$

В качестве примера рассмотрим переход от функционального аргумента к его преобразованию Фурье. Пусть

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx} \varphi(k) dk = \Psi [\varphi(k); x].$$

Тогда

$$\frac{\delta\Psi [\varphi(k); x]}{\delta\varphi(k')} = e^{ik'x}$$

и согласно (16)

$$\frac{\delta\Phi [f(\xi); x]}{\delta\varphi(k')} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\delta\Phi [f(\xi)]}{\delta f(x')} e^{ik'x'} dx'.$$

В заключение приведем (без вывода) формулу, позволяющую восстанавливать функционал $\Phi [f(\xi)]$, если задана его вариационная производная

$$\frac{\delta\Phi [f(\xi)]}{\delta f(x)} = F [f(\xi), x],$$

являющаяся непрерывным функционалом [163]:

$$\Phi [f(\xi)] = \int [f(x) - f_0(x)] F [\theta(x - \xi) f_0(\xi) + \theta(\xi - x) f(\xi); x] dx + \Phi [f_0(\xi)]. \quad (17)$$

Здесь $\theta(x) = 0$, если $x < 0$, и $\theta(x) = 1$, если $x \geq 0$, так что аргументом функционала F под знаком интеграла в (17) является функция, равная $f_0(\xi)$ при $\xi < x$ и $f(\xi)$ при $\xi > x$. Функционал $F [f(\xi); x]$ должен удовлетворять условию

$$\frac{\delta F [f(\xi); x_1]}{\delta f(x_2)} = \frac{\delta F [f(\xi); x_2]}{\delta f(x_1)}, \quad (18)$$

вытекающему из очевидного равенства

$$\frac{\delta^2 \Phi [f(\xi)]}{\delta f(x_1) \delta f(x_2)} = \frac{\delta^2 \Phi [f(\xi)]}{\delta f(x_2) \delta f(x_1)}.$$

Рассмотрим пример. Пусть

$$F [f(\xi); x] = 2 \int_a^b A(x, \xi) f(\xi) d\xi.$$

Условие (18) требует, чтобы выполнялось равенство

$$A(x, \xi) = A(\xi, x),$$

$$F [\theta(x - \xi) f_0(\xi) + \theta(\xi - x) f(\xi); x] = \\ = 2 \int_a^x A(x, \xi) f_0(\xi) d\xi + 2 \int_x^b A(x, \xi) f(\xi) d\xi$$

и согласно (17)

$$\Phi [f(\xi)] = 2 \int_a^b [f(x) - f_0(x)] dx \left\{ \int_a^x A(x, \xi) f_0(\xi) d\xi + \right. \\ \left. + \int_x^b A(x, \xi) f(\xi) d\xi \right\} + \Phi [f_0(\xi)] = 2 \int_a^b dx \int_x^b d\xi A(x, \xi) f(x) f(\xi) - \\ - 2 \int_a^b dx \int_a^x d\xi A(x, \xi) f_0(x) f_0(\xi) + \Phi [f_0(\xi)] + \\ + 2 \int_a^b dx \int_a^x d\xi A(x, \xi) f(x) f_0(\xi) - 2 \int_a^b dx \int_x^b d\xi A(x, \xi) f(\xi) f_0(x).$$

Последние два интеграла взаимно уничтожаются после перемены порядка интегрирования и последующей замены

переменных $\xi \leftrightarrow x$ в одном из них. Аналогичным образом легко показать, что

$$2 \int_a^b dx \int_x^b d\xi A(x, \xi) f(x) f(\xi) = \int_a^b \int_a^b A(x, \xi) f(x) f(\xi) dx d\xi,$$

так что

$$\Phi[f(\xi)] = \int_a^b \int_a^b A(x, \xi) [f(x) f(\xi) - f_0(x) f_0(\xi)] dx d\xi + \Phi[f_0(x)].$$

Если $f_0(\xi) = 0$ и $\Phi[0] = 0$, то мы получаем функционал (2). Точно так же формулу (17) легко проиллюстрировать на функционалах n -й степени.

В теории случайных функций основную роль играет так называемый характеристический функционал, определяемый как

$$\Phi[f(\xi)] \equiv \left\langle \exp \left[i \int f(\xi) \varepsilon(\xi) d\xi \right] \right\rangle, \quad (19)$$

где $\varepsilon(\xi)$ — случайная функция и $\langle \rangle$ означают усреднение по всем возможным реализациям функции $\varepsilon(\xi)$. Случайная функция $\varepsilon(\xi)$ полностью определена своим характеристическим функционалом. Среднее значение, корреляционная функция и моменты более высокого порядка могут быть легко определены, если известен функционал (19). Например,

$$\frac{\delta \Phi[f(\xi)]}{\delta f(x)} = \left\langle i \varepsilon(x) \exp \left[i \int f(\xi) \varepsilon(\xi) d\xi \right] \right\rangle,$$

так что

$$\langle \varepsilon(x) \rangle = \frac{1}{i} \frac{\delta \Phi[f(\xi)]}{\delta f(x)} \Big|_{f=0}.$$

Аналогично

$$\langle \varepsilon(x_1) \varepsilon(x_2) \rangle = \left(\frac{1}{i} \right)^2 \frac{\delta^2 \Phi[f(\xi)]}{\delta f(x_1) \delta f(x_2)} \Big|_{f=0}$$

и т. д. Из характеристического функционала легко получить характеристические функции любого порядка n . Например,

$$\Phi[u \delta(\xi - x)] = \langle \exp[iu \varepsilon(x)] \rangle$$

— характеристическая функция одномерного распределения вероятностей. Точно так же

$$\Phi[u_1 \delta(\xi - x_1) + u_2 \delta(\xi - x_2)] = \langle \exp\{i[u_1 \varepsilon(x_1) + u_2 \varepsilon(x_2)]\} \rangle$$

— характеристическая функция двумерного распределения вероятностей, и т. д.

Если закон распределения вероятностей для $\varepsilon(x)$ гауссовский и $\langle \varepsilon \rangle = 0$, то

$$\Phi[f(\xi)] = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \iint B_{\varepsilon}(x_1, x_2) f(x_1) f(x_2) dx_1 dx_2 \right\},$$

где $B_{\varepsilon}(x_1, x_2) = \langle \varepsilon(x_1) \varepsilon(x_2) \rangle$.

В заключение отметим, что все вышеизложенное очевидным образом переносится на случай функционалов от функций многих переменных.

II. НЕКОТОРЫЕ ЧАСТО УПОТРЕБЛЯЕМЫЕ ФОРМУЛЫ

К главе 1

$$B(t_1, t_2) = \langle [f(t_1) - \langle f(t_1) \rangle] [f^*(t_2) - \langle f^*(t_2) \rangle] \rangle,$$

$$B^*(t_1, t_2) = B(t_2, t_1), |B(t_1, t_2)|^2 \leq B(t_1, t_1) \cdot B(t_2, t_2).$$

Для стационарных процессов

$$B(t_1, t_2) = B(t_1 - t_2, 0) = B(\tau) \quad (\tau = t_1 - t_2), \quad B^*(\tau) = B(-\tau).$$

Для стационарных и действительных процессов $B(-\tau) = B(\tau)$.

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega, \quad W(\omega) \geq 0.$$

Для действительных стационарных процессов $W(-\omega) = W(\omega)$,

$$B(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} W(\omega) \cos \omega\tau d\omega = 2 \int_0^{\infty} W(\omega) \cos \omega\tau d\omega.$$

Для действительных процессов со стационарными приращениями в случае $\langle f(t) \rangle = \text{const}$

$$D(\tau) = \langle [f(t+\tau) - f(t)]^2 \rangle.$$

Если f — стационарный процесс, то

$$D(\tau) = 2B(0) - 2B(\tau),$$

а если $B(\infty) = 0$, то и

$$B(\tau) = \frac{1}{2} D(\infty) - \frac{1}{2} D(\tau),$$

$$D(\tau) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - e^{i\omega\tau}] W(\omega) d\omega = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \omega\tau] W(\omega) d\omega.$$

Для структурной функции вида

$$D(\tau) = C^2 |\tau|^\mu \quad (0 < \mu < 2)$$

спектральная плотность равна

$$W(\omega) = \frac{\Gamma(\mu+1)}{2\pi} \sin \frac{\pi\mu}{2} |\omega|^{-(\mu+1)}.$$

Для однородных действительных случайных полей

$$B(\rho) = \langle [f(\mathbf{r} + \rho) - \langle f \rangle] [f(\mathbf{r}) - \langle f \rangle] \rangle,$$

$$B(\rho) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{x}) e^{i\mathbf{x}\rho} d^3\mathbf{x} = \iiint_{-\infty}^{\infty} \Phi(\mathbf{x}) \cos \mathbf{x}\rho d^3\mathbf{x},$$

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} e^{-i\mathbf{x}\rho} B(\rho) d^3\rho = \frac{1}{8\pi^3} \iiint_{-\infty}^{\infty} B(\rho) \cos \mathbf{x}\rho d^3\rho.$$

Для однородных и изотропных полей

$$B(\rho) = B(\rho) = 4\pi \int_0^{\infty} \Phi(x) \frac{\sin x\rho}{x\rho} x^2 dx,$$

$$\Phi(x) = \Phi(x) = \frac{1}{2\pi^2} \int_0^{\infty} B(\rho) \frac{\sin x\rho}{x\rho} \rho^2 d\rho.$$

Если одновременно имеет место разложение

$$B(x) = \int_{-\infty}^{\infty} V(x) \cos x dx,$$

$$V(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(x) \cos x dx,$$

то функции $V(x)$ и $\Phi(x)$ связаны формулой

$$\Phi(x) = -\frac{1}{2\pi x} \frac{dV(x)}{dx}.$$

Для локально однородных действительных случайных полей постоянным средним значением

$$D(\rho) = \langle [f(\mathbf{r} + \rho) - f(\mathbf{r})]^2 \rangle,$$

$$D(\rho) = 2 \iiint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \mathbf{x}\rho] \Phi(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}.$$

Для локально изотропных полей

$$D(\rho) = D(\rho), \quad \Phi(\mathbf{x}) = \Phi(x),$$

$$D(\rho) = 8\pi \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \kappa \rho}{\kappa \rho}\right) \Phi(x) \kappa^2 dx,$$

$$D(\rho) = 2 \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \kappa \rho] V(x) dx, \quad \Phi(x) = -\frac{1}{2\pi x} \frac{dV(x)}{dx}.$$

Двумерное спектральное разложение

$$D(\xi, \eta, \zeta) - D(\xi, 0, 0) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)] F(\kappa_2, \kappa_3, \xi) d\kappa_2 d\kappa_3,$$

$$D(0, \eta, \zeta) = 2 \iint_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos(\kappa_2 \eta + \kappa_3 \zeta)] F(\kappa_2, \kappa_3, 0) d\kappa_2 d\kappa_3,$$

$$F(\kappa_2, \kappa_3, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) \cos \kappa_1 \xi d\kappa_1,$$

$$\Phi(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\kappa_2, \kappa_3, \xi) \cos \kappa_1 \xi d\xi.$$

Для локально изотропных в плоскости $x = \text{const}$ полей

$$D(\xi, \eta, \zeta) = D(\xi, \sqrt{\eta^2 + \zeta^2}) = D(\xi, \rho),$$

$$F(\kappa_2, \kappa_3, \xi) = F(\sqrt{\kappa_2^2 + \kappa_3^2}, \xi) = F(\kappa, \xi), \quad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2, \quad \kappa^2 = \kappa_2^2 + \kappa_3^2$$

$$D(\xi, \rho) - D(\xi, 0) = 4\pi \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa \rho)] F(\kappa, \xi) \kappa d\kappa,$$

$$D(0, \rho) = 4\pi \int_0^{\infty} [1 - J_0(\kappa \rho)] F(\kappa, 0) \kappa d\kappa.$$

Если случайное поле статистически однородно и изотропно, то

$$D(r) = 2B(0) - 2B(r)$$

и наряду с прежним разложением имеет место формула

$$B(r) = 2\pi \int_0^{\infty} J_0(\kappa r) F(\kappa, \xi) \kappa d\kappa, \quad r^2 = \xi^2 + \rho^2.$$

Для структурной функции вида

$$D(r) = C^2 r^p \quad (0 < p < 2)$$

спектральные плотности равны

$$V(\kappa) = \frac{\Gamma(p+1)}{2\pi} \sin \frac{\pi p}{2} C^2 \kappa^{-(p-1)},$$

$$\Phi(\kappa) = \frac{\Gamma(p+2)}{4\pi^2} \sin \frac{\pi p}{2} C^2 \kappa^{-(p+3)},$$

$$F(\kappa, x) = \frac{\Gamma\left(\frac{p+2}{2}\right)}{\pi^2} 2^{\frac{p-2}{2}} \sin \frac{\pi p}{2} C^2 \frac{(\kappa x)^{\frac{p+2}{2}} K_{\frac{p+2}{2}}(\kappa x)}{\kappa^{p+2}}.$$

Формулы локально изотропной турбулентности

$$D_{ik}(\mathbf{r}) = \langle [v_i(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - v_i(\mathbf{r}')] [v_k(\mathbf{r} + \mathbf{r}') - v_k(\mathbf{r}')] \rangle,$$

$$D_{ik}(\mathbf{r}) = D_{ii}(r) \delta_{ik} + [D_{rr}(r) - D_{ii}(r)] n_i n_k \quad \left(\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}}{r} \right),$$

$$D_{ii}(r) = \frac{1}{2r} \frac{d}{dr} [r^2 D_{rr}(r)],$$

$$D_{ik}(\mathbf{r}) = 2 \int \int \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos \kappa r] \Phi_{ik}(\kappa) d^3 \kappa,$$

$$\Phi_{ik}(\kappa) = \frac{1}{4\pi \kappa^2} \left(\delta_{ik} - \frac{\kappa_i \kappa_k}{\kappa^2} \right) E(\kappa),$$

$$D_{rr}(r) = 4 \int_0^{\infty} \left[\frac{1}{3} + \frac{\cos \kappa r}{\kappa^2 r^2} - \frac{\sin \kappa r}{\kappa^3 r^3} \right] E(\kappa) d\kappa,$$

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \left\langle \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \right)^2 \right\rangle = 2\nu \int_0^{\infty} E(\kappa) \kappa^2 d\kappa.$$

$$\left. \begin{aligned} D_{rr}(r) &= \frac{1}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2 + \dots \\ D_{ii}(r) &= \frac{2}{15} \frac{\varepsilon}{\nu} r^2 + \dots \end{aligned} \right\} \text{при } r \ll \sqrt[4]{\frac{\nu^3}{\varepsilon}} = l_0,$$

$$\left. \begin{aligned} D_{rr}(r) &= C^2 \varepsilon^{2/3} r^{5/3} \\ D_{ii}(r) &= \frac{4}{3} C^2 \varepsilon^{2/3} r^{2/3} \end{aligned} \right\} (l_0 \ll r \ll L_0),$$

$$E(\kappa) = 0,76 C^2 \varepsilon^{2/3} \kappa^{-5/3} \quad \left(\frac{2\pi}{L_0} \ll \kappa \ll \frac{2\pi}{l_0} \right).$$

Температурное поле

$N = \chi \langle (\nabla T)^2 \rangle$ (χ — молекулярная теплопроводность,)

$$l_1 = \sqrt[4]{\frac{\chi^3}{\varepsilon}}, \quad \lambda_0 = (3a^2)^{\frac{3}{4}} l_1,$$

$$D_T(r) = \frac{1}{3} \frac{N}{\chi} r^2 + \dots = C_T^2 \lambda_0^{3/2} \left(\frac{r}{\lambda_0}\right)^2 + \dots \quad (r \ll \lambda_0),$$

$$D_T(r) = a^2 \frac{N}{\varepsilon^{1/2}} r^{3/2} = C_T^2 r^{3/2}, \quad \text{где } C_T^2 = \frac{a^2 N}{\varepsilon^{1/2}} \quad (\lambda_0 \ll r \ll L_0),$$

$$\Phi_T(\kappa) = AC_T^2 \kappa^{-11/2} \left(\frac{2\pi}{L_0} \ll \kappa \ll \frac{2\pi}{\lambda_0} \right),$$

$$A = 5\Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \sin \frac{\pi}{3} / 12\pi^2 = 0,033.$$

Во всей области $\kappa \gg \frac{2\pi}{L_0}$ используется аппроксимация

$$\Phi_T(\kappa) = AC_T^2 \kappa^{-11/2} e^{-\kappa^2/\kappa_m^2}, \quad \kappa_m \lambda_0 = 5,92.$$

К главе 2

Эффективный поперечник рассеяния единицы объема

$$\sigma_0 = \frac{\pi}{2} k^4 \tilde{\Phi}_\varepsilon(k_0 - k_s) \sin^2 \chi,$$

где $k = \frac{\omega}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$; k_0 и k_s — волновые векторы подающей и рассеянной волн; $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$ — пространственная трехмерная спектральная плотность флуктуаций диэлектрической проницаемости; χ — угол между электрическим вектором падающей волны и вектором k_s ; $\tilde{\Phi}_\varepsilon(\mathbf{x})$ — функция $\Phi_\varepsilon(\mathbf{x})$, усредненная в пространстве вектора \mathbf{x} по объему размером $8\pi^3/V_{\text{эфф}}$ вокруг точки $\mathbf{x} = k_0 - k_s$,

$$|k_0 - k_s| = 2k \sin \frac{\theta}{2},$$

где θ — угол рассеяния ($k_0 k_s = k^2 \cos \theta$), $l(\theta) = \frac{2\pi}{|k_0 - k_s|} = \frac{\lambda}{2 \sin \frac{\theta}{2}}$

— пространственный период рассеивающей фурье-компоненты поля ε . В инверсионном интервале спектра турбулентности

$$\Phi_\varepsilon(\kappa) = 0,033 C_\varepsilon^2 \kappa^{-11/3} \left(\frac{2\pi}{L_0} \ll \kappa \ll \frac{2\pi}{\lambda_0} \right).$$

Угол корреляции рассеянного поля $\Delta\theta \sim \lambda/L$, где L — размер рассеивающего объема в плоскости угла $\Delta\theta$.

Пространственный радиус корреляции рассеянного поля при поперечном разнесении точек наблюдения $\Delta r \sim r \Delta\theta = \lambda r/L$,

где r — расстояние от рассеивающего объема до точки наблюдения.

Диапазон частот, в котором рассеянные на один и тот же угол θ поля с разными частотами коррелированы ($|f_1 - f_2| < \Delta f$)

$$\Delta f \sim \frac{c}{2L \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}.$$

Величина Δf определяет также полосу пропускаемых частот канала связи, использующего рассеяние.

Эффективный рассеивающий объем для случая узких диаграмм направленности

$$V_{\text{эфф}} \approx \frac{d^2 \gamma_1^2 \gamma_2}{8\theta} \quad (\gamma_1, \gamma_2 \ll \theta \ll 1).$$

Здесь d — расстояние от передатчика до приемника, γ_1, γ_2 — эффективная ширина диаграмм направленности антенн по половинной мощности в вертикальной и горизонтальной плоскостях.

В случае широких диаграмм направленности эффективный рассеивающий объем определяется соотношением $V_{\text{эфф}} \sim d^3 \theta_0^2$, где θ_0 — минимальный угол рассеяния, соответствующий нижней части рассеивающего объема. В случае узких и широких диаграмм направленности в формулы для радиусов корреляции рассеянного поля следует подставлять в качестве L величины, соответствующие различным выражениям для $V_{\text{эфф}}$.

К главе 3

Геометрическая оптика

Условия применимости: $\lambda \ll \lambda_0, \sqrt{\lambda L} \ll \lambda_0, \langle \chi^2 \rangle \ll 1$, где L — расстояние, проходимое волной в неоднородной среде, $\chi = \ln \frac{A}{A_0}$ — логарифм амплитуды.

Общие соотношения. Плоская волна. Структурная функция эйконала $\theta = \frac{S}{k}$:

$$\begin{aligned} D_\theta(L, \eta, \xi) &= \langle [\theta(L, \eta, \xi) - \theta(L, 0, 0)]^2 \rangle = \\ &= \frac{L}{2} \int_0^\infty [D_\varepsilon(\xi, \eta, \zeta) - D_\varepsilon(\xi, 0, 0)] d\xi = \\ &= \pi L \int_0^\infty \int_0^\infty [1 - e^{i(\kappa_1 \eta + \kappa_2 \xi)}] \Phi_\varepsilon(0, \kappa_2, \kappa_3) d\kappa_2 d\kappa_3. \end{aligned}$$

В случае изотропных флуктуаций диэлектрической проницаемости

$$D_{\theta}(L, \eta, \zeta) = D_{\theta}(L, \rho), \quad \rho^2 = \eta^2 + \zeta^2,$$

$$D_{\theta}(L, \rho) = 2\pi^2 L \int_0^{\infty} [1 - J_0(x\rho)] \Phi_{\epsilon}(x) x dx.$$

Средний квадрат флуктуаций направления распространения в плоскости x, y на расстоянии L от источника

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{\theta}(L, \eta, 0)}{\partial \eta^2} \Big|_{\eta=0}.$$

В случае изотропных флуктуаций

$$\langle \alpha^2 \rangle = \frac{L}{4} \int_0^{\infty} \frac{D'_{\epsilon}(\xi)}{\xi} d\xi.$$

«Продольная» корреляционная функция флуктуаций направления распространения (угол отсчитывается в плоскости x, y , разнесение точек наблюдения в направлении оси y)

$$B_{\alpha}(L, \rho) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2 D_{\theta}(L, \rho)}{\partial \rho^2}.$$

«Поперечная» корреляционная функция флуктуаций направления распространения (угол отсчитывается в плоскости x, y , разнесение точек наблюдения в направлении оси z)

$$B_{\beta}(L, \rho) = \frac{1}{2\rho} \frac{\partial D_{\theta}(L, \rho)}{\partial \rho}.$$

Взаимная корреляция $B_{\alpha\beta}(\rho) = 0$. Корреляционная функция флуктуаций логарифма амплитуды в плоскости $x = L$

$$B_{\chi}(L, \eta, \zeta) = \langle [\chi(L, \eta, \zeta) - \langle \chi \rangle] [\chi(L, 0, 0) - \langle \chi \rangle] \rangle =$$

$$= -\frac{L^2}{48} \int_0^{\infty} \Delta_{\perp}^2 D_{\epsilon}(\xi, \eta, \zeta) d\xi = -\frac{L^2}{24} \Delta_{\perp}^2 D_{\theta}(L, \eta, \zeta).$$

Сферическая волна. Если две точки наблюдения расположены на одинаковом расстоянии L от точечного источника и на расстоянии b друг от друга, а угол между лучами мал, то

$$\langle [\theta_1 - \theta_2]^2 \rangle = \frac{1}{b} \int_0^b D_{\theta}(L, \rho) d\rho,$$

где $D_\theta(L, \rho)$ — структурная функция эйконала для плоской волны. Если расстояние между лучами на одном конце трассы равно b_1 , а на другом — b_2 (точечный источник помещен вне неоднородной среды), длина каждого луча L и угол между лучами мал, то

$$\langle [\theta_1 - \theta_2]^2 \rangle = \frac{1}{b_2 - b_1} \int_{b_1}^{b_2} D_\theta(L, |\rho|) d\rho$$

(формула пригодна для пересекающихся лучей, в этом случае b_1 отрицательно).

Для корреляционной функции флуктуаций логарифма амплитуды сферической волны в случае малого угла между лучами имеем выражение через соответствующую корреляционную функцию для плоской волны:

$$[B_x(L, \rho)]_{\text{сф}} = 3 \int_0^1 q^2 (1 - q)^2 B_x(L, \rho q) dq.$$

Соотношения для турбулентной среды. Плоская волна.

$$D_\theta(L, \rho) = BC_\epsilon^2 L \kappa_m^{-5/3} \left[{}_1F_1 \left(-\frac{5}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right) - 1 \right],$$

$$B = -\frac{5}{12} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right) \Gamma\left(-\frac{5}{6}\right) \sin \frac{\pi}{3} = 2,2.$$

Асимптотика при $\rho \gg \lambda_0$ и $\rho \ll \lambda_0$:

$$D_\theta(L, \rho) \approx 0,73 C_\epsilon^2 L \rho^{5/3} \quad \text{и} \quad D_\theta(L, \rho) \approx 0,82 C_\epsilon^2 L \lambda_0^{-1/3} \rho^2$$

Средний квадрат и корреляционные функции флуктуаций направления распространения:

$$\langle \alpha^2 \rangle = 0,82 C_\epsilon^2 L \lambda_0^{-1/3},$$

$$b_\beta(\rho) = \frac{B_\beta(L, \rho)}{B_\beta(L, 0)} = {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right),$$

$$b_\alpha(\rho) = \frac{B_\alpha(L, \rho)}{B_\alpha(L, 0)} = {}_1F_1 \left(\frac{1}{6}, 2, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{24} \right) - \frac{\kappa_m^2 \rho^2}{24} {}_1F_1 \left(\frac{7}{6}, 3, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} \right).$$

Средний квадрат и корреляционная функция флуктуаций логарифма амплитуды:

$$\langle \chi^2 \rangle = 0,80 C_e^2 L^3 \lambda_0^{-7/3},$$

$$b_x(\rho) = \frac{B_x(L, \rho)}{B_x(L, 0)} = {}_1F_1\left(\frac{7}{6}, 1, -\frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4}\right).$$

Средний квадрат поперечного смещения луча

$$\langle (\delta x)^2 \rangle = \frac{2}{3} L^2 \langle \alpha^2 \rangle = 0,55 C_e^2 L^3 \lambda_0^{-1/3}.$$

Сферическая волна.

$$[D_{\theta, \text{сф}}(L, \rho)] = \frac{1}{3} D_{\theta, \text{пл}}(L, \rho). \quad (\rho \ll \lambda_0), \quad \langle \alpha_{\text{сф}}^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle \alpha_{\text{пл}}^2 \rangle,$$

$$D_{\theta, \text{сф}}(L, \rho) = \frac{3}{8} D_{\theta, \text{пл}}(L, \rho) = 0,27 C_e^2 L \rho^{5/3} \quad (\rho \gg \lambda_0),$$

$$\langle \chi_{\text{сф}}^2 \rangle = \frac{1}{10} \langle \chi_{\text{пл}}^2 \rangle = 0,080 C_e^2 L^3 \lambda_0^{-7/3}.$$

Метод плавных возмущений

Границы применимости первого приближения: $\lambda^3 L \ll \lambda_0^4$, $\langle \chi^2 \rangle \ll 1$. Соотношения для турбулентной среды, плоская волна:

$$D_x(L, \rho) = \langle [\chi(L, \eta, \zeta) - \chi(L, 0, 0)]^2 \rangle = \frac{D_1(L, \rho) + \text{Re } D_2(L, \rho)}{2} \\ (\rho^2 = \eta^2 + \zeta^2),$$

$$D_S(L, \rho) = \langle [S(L, \eta, \zeta) - S(L, 0, 0)]^2 \rangle = \frac{D_1(L, \rho) - \text{Re } D_2(L, \rho)}{2},$$

$$D_{xS}(L, \rho) = \langle [\chi(L, \eta, \zeta) - \chi(L, 0, 0)] [S(L, \eta, \zeta) - \\ - S(L, 0, 0)] \rangle = \frac{1}{2} \text{Im } D_2(L, \rho),$$

$$D_1(L, \rho) = \frac{6}{5} \pi^2 A C_e^2 k^2 L \kappa_m^{-5/3} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -g\right) - 1 \right],$$

$$D_2(L, \rho) = -\frac{36}{55} \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) i A C_e^2 k^2 L \kappa_m^{-5/3} \frac{1}{D} \left\{ {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -g\right) - \right. \\ \left. - 1 - (1 + iD)^{1/6} \left[{}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, -\frac{g}{1 + iD}\right) - 1 \right] \right\},$$

где $g = \frac{\kappa_m^2 \rho^2}{4} = 8,8 \frac{\rho^2}{\lambda_0^2}$, $D = \frac{\kappa_m^2 L}{k} = 5,6 \frac{\lambda L}{\lambda_0^2}$, $A = 0,033$.

При $D \ll 1$ отсюда могут быть получены формулы геометрической оптики.

При

$$D \gg 1, g \ll 1 \quad (\rho \ll \lambda_0)$$

$$D_1(L, \rho) = \frac{1}{4} A \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) C_\epsilon^2 k^2 L \chi_m^{1/3} \rho^2 + \dots,$$

$$D_2(L, \rho) = \frac{1}{4} \cdot \frac{6}{5} A \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) e^{11i\pi/12} C_\epsilon^2 k^{13/6} L^{5/6} \rho^2 + \dots,$$

$$D_x(L, \rho) \approx 0,41 C_\epsilon^2 k^2 L \lambda_0^{-1/3} \left[1 - 0,87 \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda L} \right)^{1/6} \right] \rho^2 + \dots,$$

$$D_S(L, \rho) \approx 0,41 C_\epsilon^2 k^2 L \lambda_0^{-1/3} \left[1 + 0,87 \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda L} \right)^{1/6} \right] \rho^2 + \dots,$$

$$D_{xS}(L, \rho) \approx 0,071 C_\epsilon^2 k^{13/6} L^{5/6} \rho^2 + \dots$$

При

$$D \gg 1, g \gg 1 \quad (\rho \gg \lambda_0) \quad \langle \chi^2 \rangle = 0,077 C_\epsilon^2 k^{7/6} L^{11/6},$$

$$b_x(L, \rho) = \operatorname{Re} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, \frac{ik\rho^2}{4L}\right) - \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \operatorname{Im} {}_1F_1\left(-\frac{11}{6}, 1, \frac{ik\rho^2}{4L}\right) - \\ - \frac{1}{6 \Gamma\left(\frac{11}{6}\right) \sin \frac{\pi}{12}} \left(\frac{k\rho^2}{4L}\right)^{5/6},$$

$$b_x(L, \rho) = 1 - 2,36 \left(\frac{k\rho^2}{L}\right)^{5/6} + 1,71 \frac{k\rho^2}{L} - 0,024 \left(\frac{k\rho^2}{L}\right)^2 + \dots \\ (\lambda_0 \ll \rho \ll \sqrt{\lambda L}),$$

$$b_x(L, \rho) = -0,122 \left(\frac{k\rho^2}{L}\right)^{-7/6} \quad (\rho \gg \sqrt{\lambda L}),$$

$$D_S(L, \rho) = 0,73 C_\epsilon^2 k^2 L \rho^{5/3} - 0,154 C_\epsilon^2 k^{7/6} L^{11/6} [1 - b_x(L, \rho)],$$

$$D_S(L, \rho) = 0,73 C_\epsilon^2 k^2 L \rho^{5/3} \quad (\rho \gg \sqrt{\lambda L}),$$

$$D_S(L, \rho) = \frac{1}{2} \cdot 0,73 C_\epsilon^2 k^2 L \rho^{5/3} \quad (\lambda_0 \ll \rho \ll \sqrt{\lambda L}),$$

$$\langle \chi S \rangle = \operatorname{ctg} \frac{\pi}{12} \langle \chi^2 \rangle = 0,28 C_\epsilon^2 k^{7/6} L^{11/6}, \quad \langle \alpha^2 \rangle = 0,41 C_\epsilon^2 L \lambda_0^{-1/3}.$$

Для переменного C_ϵ^2 :

$$1. D \ll 1 \quad (\sqrt{\lambda L} \ll \lambda_0), \quad \langle \chi^2 \rangle = 2,4 \lambda_0^{-7/3} \int_0^L C_\epsilon^2(x) (L-x)^2 dx,$$

$$D_S(\rho) = \frac{6}{5} \pi^2 \Gamma\left(\frac{1}{6}\right) A k^2 \chi_m^{-5/3} \left[{}_1F_1\left(-\frac{5}{6}, 1, -g\right) - 1 \right] \int_0^L C_\epsilon^2(x) dx,$$

$$2. D \gg 1 \quad (\sqrt{\lambda L} \gg \lambda_0), \langle \chi^2 \rangle = 0,14 i k^{1/3} \int_0^L C_{\varepsilon}^2(x) (L-x)^{5/3} dx.$$

$$D_S(\rho) = 0,73 k^2 \rho^{5/3} \int_0^L C_{\varepsilon}^2(x) dx \quad (\rho \gg \sqrt{\lambda L}),$$

К главе 4

Частотные спектры флуктуаций. Приближение замороженности, справедливое для частот $f > \frac{v_{\perp}}{L_0}$:

$$R_x(\tau) = B_x(v_{\perp}\tau) = \int_0^{\infty} \cos(2\pi f\tau) W_x(f) df,$$

$$H_S(\tau) = D_S(v_{\perp}\tau) = 2 \int_0^{\infty} [1 - \cos 2\pi f\tau] W_S(f) df,$$

$$W_{x,S}(f) = \frac{8\pi}{v_{\perp}} \int_0^{\infty} F_{x,S} \left(\sqrt{\kappa^2 + \frac{4\pi^2 f^2}{v_{\perp}^2}}, L \right) d\kappa.$$

Для турбулентной среды

$$W_{x,S}(f) = \frac{\pi}{2} A C_{\varepsilon}^2 k^{7/6} L^{11/6} f_0^{-1} \Omega^{-8/3} \left\{ N \mp \operatorname{Im} \frac{\sqrt{\pi} e^{i\Omega^2}}{\Omega^2} \times \right. \\ \times \left[\frac{\Gamma\left(\frac{7}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{17}{6}\right)} {}_1F_1\left(\frac{1}{2}, -\frac{4}{3}, -i\Omega^2\right) + (-i\Omega^2)^{-3} \frac{\Gamma\left(-\frac{7}{3}\right)}{\sqrt{\pi}} \times \right. \\ \left. \left. \times {}_1F_1\left(\frac{17}{6}, \frac{10}{3}, -i\Omega^2\right) \right] \right\},$$

где $\Omega = \frac{f}{f_0}$, $f_0 = \frac{v_{\perp}}{\sqrt{2\pi\lambda L}}$, $N = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)}{\Gamma(11/6)} = 1,69$, $A = 0,033$.

Асимптотические разложения в области больших и малых частот:

$$W_x(f) = 0,15 \langle \chi^2 \rangle \frac{1}{f_0} [1 + 0,48 \Omega^{4/3} + \dots] \quad (\Omega \ll 1),$$

$$W_x(f) = 1,14 \langle \chi^2 \rangle f_0^{-1} \Omega^{-8/3} \quad (\Omega \gg 1),$$

$$W_S(f) = 8,2 \cdot 10^{-3} C_{\varepsilon}^2 k^2 L v_{\perp}^{5/3} f^{-8/3} \quad (\Omega \ll 1),$$

$$W_S(f) = 4,1 \cdot 10^{-3} C_{\varepsilon}^2 k^2 L v_{\perp}^{5/3} f^{-8/3} \quad (\Omega \gg 1).$$

1. А. М. Я г л о м, Введение в теорию стационарных случайных функций, УМН 7, вып. 5, 51 (1952).
2. А. М. О б у х о в, Статистическое описание непрерывных полей, Тр. ГеоФИАН № 24, 3 (1954).
3. А. М. О б у х о в, Вероятностное описание непрерывных полей, Укр. матем. ж. 6, № 1, 37 (1954).
4. А. М. Я г л о м, Некоторые классы случайных полей в n -мерном пространстве, родственные стационарным случайным процессам, Теория вероятностей и ее применения 2, вып. 3, 292 (1957).
5. А. М. Я г л о м, Теория корреляции непрерывных процессов и полей с приложениями к задаче о статистическом экстраполировании временных рядов и к теории турбулентности, Дисс. ГеоФИАН, 1955.
6. А. Я. Х и н ч и н, Теория корреляции стационарных случайных процессов, УМН 5, вып. 5, 42 (1938).
7. А. М. Я г л о м, Корреляционная теория процессов со случайными n -ми приращениями, Матем. сб. 37, вып. 1, 79 (1955).
8. В. С. П у г а ч е в, Теория случайных функций и ее применение к задачам автоматического управления, Физматгиз, 1962.
9. Р. Л. С т р а т о н о в и ч, Избранные вопросы теории флуктуаций в радиотехнике, «Сов. радио», 1961.
10. А. Н. К о л м о г о р о в, Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса, ДАН СССР 30, № 4, 299 (1941).
11. А. Н. К о л м о г о р о в, Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности, ДАН СССР 32, № 1, 19 (1941).
12. М. И. Ф о р т у с, Об экстраполяции случайного поля, удовлетворяющего волновому уравнению, Теория вероятностей и ее применения 8, вып. 2, 220 (1963).
13. Л. Д. Л а н д а у, Е. М. Л и ф ш и ц, Механика сплошных сред, Гостехиздат, 1953.
14. Л. И. С е д о в, Методы подобия и размерности в механике, Гостехиздат, 1954.
15. А. М. О б у х о в, О распределении энергии в спектре турбулентного потока, ДАН СССР 32, № 1, 22 (1941).
16. А. М. О б у х о в, О распределении энергии в спектре турбулентного потока, Изв. АН СССР (сер. геогр. и геофиз.) 5, № 4—5, 453 (1941).
17. А. М. О б у х о в, А. М. Я г л о м, Микроструктура турбулентного потока, ПММ 15, вып. 1, 3 (1951).
18. Г. С. Г о л и ц ы н, О структуре турбулентности в области малых масштабов, ПММ 24, вып. 6, 1124 (1960).
19. W. Heisenberg, On the theory of statistical and isotropic turbulence, Proc. Roy. Soc. A195, № 1042, 402 (1948).
20. Дж. Бэтчелор, Теория однородной турбулентности, ИЛ, 1955.
21. Е. А. Н о в и к о в, О спектре энергии турбулентного потока несжимаемой жидкости, ДАН СССР 139, № 2, 331 (1961).

22. H. I. Grant, R. W. Stewart, A. Moillict, Turbulence spectra from a tidal channel, *J. Fluid Mech.* 12, № 2 241 (1962).
23. А. М. Обухов, Структура температурного поля в турбулентном потоке, *Изв. АН СССР (сер. геогр. и геофиз.)* 13, № 1, 58 (1949).
24. А. М. Яглом, О локальной структуре поля температур в турбулентном потоке, *ДАН СССР* 69, № 6, 743 (1949).
25. S. Corrsin, On the spectrum of isotropic temperature fluctuations in an isotropic turbulence, *J. Appl. Phys.* 22, № 4, 469 (1951).
26. А. Зоммерфельд, Термодинамика и статистическая физика, ИЛ, 1955.
27. L. Prandtl, Bericht über Untersuchungen zur ausgebildeten Turbulenz, *Z. angew. Math. Mech.* 5, № 2, 136 (1925).
28. А. С. Моини, А. М. Обухов, Безразмерные характеристики турбулентности в приземном слое атмосферы, *ДАН СССР* 93, № 2, 257 (1953).
29. А. С. Моини, А. М. Обухов, Основные закономерности турбулентного перемешивания в приземном слое атмосферы, *Тр. ГеоФИАН* № 24, 163 (1954).
30. А. С. Моини, Структура атмосферной турбулентности, *Теория вероятностей и ее применения* 3, вып. 3, 285 (1958).
31. А. С. Моини, О структуре полей скорости ветра и температуры в приземном слое воздуха, *Тр. ИФА АН СССР* № 4, 5 (1962).
32. Л. С. Гандин, Д. Л. Лайхтмац, Л. Т. Матвеев, М. И. Юдин, Основы динамической метеорологии, Гидрометиздат, 1955.
33. А. М. Обухов, О влиянии архимедовых сил на структуру температурного поля в турбулентном потоке, *ДАН СССР* 125, № 6, 1246 (1959).
34. А. М. Обухов, О структуре температурного поля и поля скоростей в условиях свободной конвекции, *Изв. АН СССР (сер. геофиз.)* № 9, 1392 (1960).
35. R. Volgiano Jr., A meteorological interpretation of wavelength dependence in transhorizon propagation, School of Electrical Engineering, Cornell Univ., Ithaca, New York. Res. Rept. EE 385.
36. А. С. Моини, О спектре турбулентности в температурно-неоднородной среде, *Изв. АН СССР (сер. геофиз.)* № 3, 397 (1962).
37. K. Gödecke, Messungen der atmosphärische Turbulenz, *Ann. Hydrogr.* № 10, 400 (1935).
38. А. М. Обухов, Характеристики микроструктуры ветра в приземном слое атмосферы, *Изв. АН СССР (сер. геофиз.)* № 3, 49 (1951).
39. С. И. Кречмер, Методика измерений микропульсаций скорости ветра и температуры в атмосфере, *Тр. ГеоФИАН* № 24, 43 (1954).
40. С. И. Кречмер, А. М. Обухов, Н. З. Пинус, Результаты экспериментальных исследований микротурбулентности свободной атмосферы, *Тр. ЦАО*, вып. 6, 174 (1952).
41. А. В. Перепелкина, Некоторые результаты исследования турбулентных пульсаций температуры и вертикальной составляющей скорости ветра, *Изв. АН СССР (сер. геофиз.)* № 6, 765 (1957).
42. A. A. Townsend, Experimental evidence for the theory of local isotropy, *Proc. Cambridge Philos. Soc.* 44, № 4, 560 (1948).
43. С. И. Кречмер, Исследование микропульсаций температурного поля в атмосфере, *ДАН СССР* 84, № 1, 55 (1952).
44. В. И. Татарский, Микроструктура температурного поля в приземном слое атмосферы, *Изв. АН СССР (сер. геофиз.)* № 6, 689 (1956).
45. А. С. Гурвич, Акустический микроанемометр для исследования микроструктуры турбулентности, *Акуст. ж.* 5, вып. 3, 368 (1959).
46. В. М. Бовшверов, В. П. Воронов, Акустический флюгер, *Изв. АН СССР (сер. геофиз.)* № 6, 882 (1960).

47. А. С. Г у р в и ч, Спектры пульсаций вертикальной компоненты скорости ветра п их связи с микрометеорологическими условиями, Тр. ИФА АН СССР, № 4, 101 (1962).
48. А. С. Г у р в и ч, Измерение коэффициента асимметрии распределения разности скоростей в приземном слое атмосферы, ДАН СССР 134, № 5, 1073 (1960).
49. А. С. Г у р в и ч, Частотные спектры и функции распределения вероятностей вертикальной компоненты ветра, Изв. АН СССР (сер. геофиз.) № 7, 1042 (1960).
50. В. М. Б о в ш е в е р о в, А. С. Г у р в и ч, М. И. М о р д у х о в я ч, Л. Р. Ц в а н г, Приборы для измерений пульсаций температуры и скорости ветра и для статистического анализа результатов измерений, Тр. ИФА АН СССР № 4, 21 (1962).
51. E. E. G o s s a r d, Power spectra of temperature, humidity and refractive index from aircraft and tethered balloon measurements, IRE Trans. AP-8, № 2, 186 (1960).
52. Л. Р. Ц в а н г, Некоторые характеристики спектров температурных пульсаций в пограничном слое атмосферы, Изв. АН СССР (сер. геофиз.) № 10, 1594 (1963).
53. Л. Р. Ц в а н г, Измерение частотных спектров температурных пульсаций в приземном слое атмосферы, Изв. АН СССР (сер. геофиз.) № 8, 1252 (1960).
54. Л. Р. Ц в а н г, Измерения турбулентных потоков тепла и спектров температурных пульсаций, Тр. ИФА АН СССР № 4, 137 (1962).
55. А. С. Г у р в и ч, Т. К. К р а в ч е н к о, О частотном спектре пульсаций температуры в области малых масштабов, Тр. ИФА АН СССР № 4, 144 (1962).
56. С. Н. В. P r i e s t l y, Free and forced convection on the ground, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 81, № 348, 139 (1955).
57. W. C. S w i n b a n k, An experimental study of eddy transports in the lower atmosphere, C. S. I. R. O. Div. Meteorol., Phys. Techn. Pap. 2, № 2 (1955).
58. Л. Р. Ц в а н г, С. Л. З у б к о в с к и й, В. Н. И в а н о в, Ф. Я. К л и н о в, Т. К. К р а в ч е н к о, Измерения некоторых характеристик турбулентности в нижнем 300-метровом слое атмосферы, Изв. АН СССР (сер. геофиз.) № 5, 769 (1963).
59. Л. Р. Ц в а н г, Измерения спектров температурных пульсаций в свободной атмосфере, Изв. АН СССР (сер. геофиз.) № 11, 76 (1960).
60. С. Л. З у б к о в с к и й, Экспериментальное исследование спектров пульсаций вертикальной компоненты скорости ветра в свободной атмосфере, Изв. АН СССР (сер. геофиз.) № 8, 1285 (1963).
61. F. N. E d m o n d s Jr., An analysis of airborne measurements of tropospheric index of refraction fluctuations. Statistical methods in radio wave propagation, Pergamon Press, 1960 (p. 197).
62. А. В. П е р е л д к и я, Об определении турбулентного потока тепла, Изв. АН СССР (сер. геофиз.) № 7, 1026 (1959).
63. Н. В о о к е г, W. G o r d o n, A theory of radio scattering in the troposphere, Proc. IRE 38, № 4, 401 (1950).
64. Н. Г. Д е н и с о в, О влиянии области отражения на рассеяние радиоволн в ионосфере, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 2, 208 (1960).
65. В. И. Т а т а р с к и й, Теория флуктуационных явлений при распространении волн в турбулентной атмосфере, Изд-во АН СССР, 1959.
66. Г. С. Г о р е л и к, К теории рассеяния радиоволн на блуждающих неоднородностях, Радиотехника и электроники 1, вып. 6, 696 (1956).

67. Г. С. Горелик, О влиянии корреляции скорости рассеивателей на статистические свойства рассеянного излучения, Радиотехника и электроника 2, вып. 10, 1227 (1957).
68. М. И. Родак, А. В. Францессон, О применении теории турбулентности к рассеянию радиоволн на блуждающих неоднородностях, Радиотехника и электроника 4, вып. 3, 398 (1959).
69. А. Г. Горелик, В. В. Костарев, А. А. Черников, Радиолокационные измерения турбулентности в облаках, Метеорология и гидрология № 5, 12 (1958).
70. А. Г. Горелик, Использование статистических характеристик радиолокационного сигнала для изучения динамических процессов и микроструктуры облаков и осадков, Дисс. ЦАО, 1961.
71. H. S t a g a s, Forward scattering of radio waves by anisotropic turbulence, Proc. IRE 43, № 10, 1374 (1955).
72. В. И. Татарский, Г. С. Голлицы, О рассеянии электромагнитных волн турбулентными неоднородностями тропосферы, Тр. ИФА АН СССР № 4, 147 (1962).
73. Б. Р. Левин, Теория случайных процессов и ее применение в радиотехнике, «Сов. радио», 1957.
74. R. A. Silverman, Turbulent mixing theory applied to radio scattering, J. Appl. Phys. 27, № 7, 699 (1956).
75. Дж. Л. Позв, Р. Н. Брейсуэлл, Радиоастрономия, ИЛ, 1958.
76. J. H. Chisholm, P. A. Portmann, J. T. de Bettencourt, J. F. Roche, Investigations of angular scattering and multipath properties of tropospheric propagation of short radio waves beyond the horizon, Proc. IRE 43, № 10, 1317 (1955).
77. K. Bullington, Radio transmission beyond the horizon in the 40—4000 mc band, Proc. IRE 41, № 1, 132 (1953).
78. Ф. Б. Черный, Распространение радиоволн, «Сов. радио», 1962.
79. А. М. Обухов, О рассеянии звука в турбулентном потоке, ДАН СССР 30, № 7, 611 (1941).
80. Д. И. Блохинцев, Акустика неоднородной движущейся среды, Гостехиздат, 1946.
81. G. K. Batchelor, Wave scattering due to turbulence, Proc. Internat. Symp. on Naval Hydrodynamics, 1956.
82. В. И. Татарский, К теории распространения звуковых волн в турбулентном потоке, ЖЭТФ 25, вып. 1 (7), 74 (1953).
83. C. L. Pekeris, Note on Scattering in an inhomogeneous medium, Phys. Rev. 71, № 4, 268 (1947).
84. M. J. Lighthill, On the energy scattered from the interaction of turbulence with sound or shock waves, Proc. Cambridge Philos. Soc. 49, № 3, 531 (1953).
85. R. H. Kraichnan, The scattering of sound in a turbulent medium, J. Acoust. Soc. America 25, № 4, 822 (1953).
86. А. С. Монон, Некоторые особенности рассеяния звука в турбулентной атмосфере, Акуст. ж. 7, вып. 4, 457 (1961).
87. М. А. Каллистратова, Экспериментальное исследование рассеяния звука в турбулентной атмосфере, ДАН СССР 125, № 1, 69 (1959).
88. М. А. Каллистратова, Экспериментальное исследование рассеяния звуковых волн в атмосфере, Тр. ИФА АН СССР № 4, 203 (1962).
89. H. Sieg, Über die Schallausbreitung im Freien und ihre Abhängigkeit von den Wetterbedingungen, Elektr. Nachr. Tech. 17, № 9, 193 (1940).
90. И. Г. Петровский, Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, Гостехиздат, 1947.
91. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц, Электродинамика сплошных сред, Гостехиздат, 1957.

92. Л. А. Чернов, Распространение волн в среде со случайными неоднородностями, Изд-во АН СССР, 1958.
93. В. Л. Гинзбург, Распространение электромагнитных волн в плазме, Физматгиз, 1960.
94. Е. Л. Фейнберг, Распространение радиоволн вдоль земной поверхности, Изд-во АН СССР, 1961.
95. Ф. Г. Басс, А. В. Мень, Пространственная корреляция флуктуаций волн, распространяющихся в неограниченной турбулентной среде, Акуст. ж. 9, вып. 3, 283 (1963).
96. В. А. Красильников, О влиянии пульсаций коэффициента преломления в атмосфере на распространение ультракоротких радиоволн, Изв. АН СССР (сер. геогр. и геофиз.) 13, № 1, 33 (1949).
97. В. А. Красильников, О распространении звука в турбулентной атмосфере, ДАН СССР 47, № 7, 486 (1945).
98. Т. Н. Ellison, The propagation of sound waves through a medium with very small random variations in refractive index, J. Atmosph. Terr. Phys. 2, № 1, 14 (1951).
99. В. И. Татарский, О критерии применимости геометрической оптики в задачах распространения волн в среде со слабыми неоднородностями коэффициента преломления, ЖЭТФ 25, вып. 1 (7), 84 (1953).
100. С. М. Рытов, Дифракция света на ультразвуковых волнах, Изв. АН СССР (сер. физ.) № 2, 223 (1937).
101. А. М. Обухов, О влиянии слабых неоднородностей атмосферы на распространение звука и света, Изв. АН СССР (сер. геофиз.) № 2, 155 (1953).
102. Л. А. Чернов, Корреляция флуктуаций амплитуды и фазы при распространении волны в среде со случайными неоднородностями, Акуст. ж. 1, вып. 1, 89 (1955).
103. Л. А. Чернов, Корреляционные свойства волны в среде со случайными неоднородностями, Акуст. ж. 2, вып. 2, 211 (1956).
104. Л. А. Чернов, Корреляция флуктуаций поля, Акуст. ж. 3, вып. 2, 192 (1957).
105. В. И. Татарский, О пульсациях амплитуды и фазы волны, распространяющейся в слабонеоднородной атмосфере, ДАН СССР 107, № 2, 245 (1956).
106. Н. Г. Денисов, О флуктуациях амплитуды и фазы волны, прошедшей с через слой со случайными неоднородностями, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 2, 316 (1959).
107. Н. Г. Денисов, В. А. Зверев, Некоторые вопросы распространения волн в средах со случайными неоднородностями, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 4, 521 (1959).
108. В. И. Татарский, О распространении волн в локально изотропной турбулентной среде с плавно меняющимися характеристиками, ДАН СССР 120, № 2, 289 (1958).
109. Н. Г. Денисов, Л. Н. Полянин, Флуктуации амплитуды и фазы волны, распространяющейся в неоднородной поглощающей среде, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 6, 1010 (1959).
110. Ю. А. Рыжов, О взаимной функции корреляции флуктуаций амплитуды и фазы волны, распространяющейся в неоднородной среде, Радиотехника и электроника 7, вып. 10, 1824 (1962).
111. Ю. А. Рыжов, Э. П. Лаптева, Флуктуации параметров тригармонической волны при распространении ее в локально однородной среде, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 6, 976 (1960).
112. В. Н. Каравайчиков, Флуктуации амплитуды и фазы в сферической волне, Акуст. ж. 3, вып. 2, 165 (1957).

113. Н. Г. Денисов, О влиянии приемного устройства на флуктуации принимаемого излучения, Изв. вузов (Радиофизика) 4, № 6, 1045 (1961).
114. В. В. Писарева, О границах применимости метода плавных возмущений в задаче о распространении излучения через среду с неоднородностями, Акуст. ж. 6, вып. 1, 87 (1960).
115. Т. А. Широкова, Второе приближение в методе плавных возмущений, Акуст. ж. 5, вып. 4, 485 (1959).
116. В. И. Татарский, Второе приближение в задаче о распространении волн в среде со случайными неоднородностями, Изв. вузов (Радиофизика) 5, № 3, 490 (1962).
117. И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, Таблицы интегралов, сумм рядов и произведений, Физматгиз, 1962.
118. А. И. Коп, В. И. Татарский, Мерцание источников конечных угловых размеров, Изв. вузов (Радиофизика) 7, № 2, 306 (1964).
119. В. А. Зверев, Влияние направленности приемного устройства на среднюю интенсивность сигнала, принимаемого за счет рассеяния, Акуст. ж. 3, вып. 4, 329 (1957).
120. Н. Г. Денисов, В. И. Татарский, О средней дифракционной картине в фокальной плоскости линзы, Изв. вузов (Радиофизика) 6, № 3, 488 (1963).
121. Н. Г. Денисов, Ю. А. Рыжов, О флуктуациях излучения в фокусе линзы, Радиотехника и электроника 9, № 1, 33 (1964).
122. М. Н. Кром, Л. А. Чернов, Влияние флуктуаций в падающей волне на распределение средней интенсивности вблизи фокуса линзы, Акуст. ж. 4, вып. 4, 341 (1958).
123. Л. А. Чернов, М. Н. Кром, Зависимость дифракционного изображения в линзе от величины флуктуаций в падающей волне, Тр. совещания по исследованию мерцания звезд, Изд-во АН СССР, 1959.
124. В. И. Татарский, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Л. В. Герентьева, О влиянии метеорологических условий на интенсивность мерцания света в приземном слое атмосферы, Астрон. ж. 35, вып. 4, 123 (1958).
125. А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Л. Р. Цванг, Экспериментальное исследование статистических характеристик мерцания наземного источника света, ДАН СССР 123, № 4, 655 (1958).
126. А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Л. Р. Цванг, Мерцание наземных источников света, Труды совещания по исследованию мерцания звезд, Изд-во АН СССР, 1959.
127. D. J. Rortman, F. C. Elder, E. Ruznar, V. E. Noble, Some optical properties of turbulence in stratified flow near the ground, J. Geophys. Res. 67, № 8, 3223 (1962).
128. В. М. Бовшеверов, А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Л. Р. Цванг, Приборы для статистического анализа турбулентности, Труды совещания по исследованию мерцания звезд, Изд-во АН СССР, 1959.
129. В. М. Бовшеверов, А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Экспериментальное исследование «дрожания» искусственного источника света, Изв. вузов (Радиофизика) 4, № 5, 886 (1961).
130. В. А. Красильников, К. М. Иванов-Шниц, Некоторые новые опыты по распространению звука в атмосфере, ДАН СССР 67, № 4, 639 (1949).
131. В. А. Красильников, О флуктуациях фазы ультразвуковых волн при их распространении в приземном слое воздуха, ДАН СССР 88, № 4, 657 (1953).
132. Б. А. Сучков, Флуктуации амплитуды звука в турбулентной среде Акуст. ж. 4, вып. 1, 85 (1953).

133. Г. С. Голыцын, А. С. Гурвич, В. И. Татарский, Исследование частотных спектров флуктуаций амплитуды и разности фаз звуковых волн в турбулентной атмосфере, Акуст. ж. 6, вып. 2, 187 (1960).
134. C. M. Grain, Survey of airborne microwave refractometer measurements, Proc. IRE 43, № 10, 1405 (1955).
135. J. W. Herbstreit, M. C. Thompson, Measurements of the phase of radio waves received over transmission paths with electrical lengths varying as a result of atmospheric turbulence, Proc. IRE 43, № 10, 1391 (1955).
136. A. P. Deam, B. M. Fannin, Phase-difference variations in 9350-megacycle radio signals arriving at spaced antennas, Proc. IRE 43, № 10 1402 (1955).
137. K. A. Norton, Recent experimental evidence favouring the $\rho K_1(\rho)$ correlation function for describing the turbulence of refractivity in the troposphere and stratosphere, J. Atmosph. Terr. Phys. 15, № 3/4, 206 (1959).
138. R. B. Muchmore, A. D. Wheelon, Line-of-sight propagation phenomena, Proc. IRE 43, № 10, 1437, 1450 (1955).
139. В. И. Татарский, Радиофизические методы изучения атмосферной турбулентности, Изв. вузов (Радиофизика) 3, № 4, 551 (1960).
140. В. И. Татарский, Интерпретация наблюдений мерцания звезд и удаленных наземных источников света, Труды совещания по исследованию мерцания звезд, Изд-во АН СССР, 1959.
141. W. M. Frotheger, Preliminary report on stellar scintillation, Contribs. Perkins Observ. 2, № 4 (1954).
142. H. E. Butler, Observations of stellar scintillations, Quart. J. Roy. Meteorol. Soc. 80, № 344, 241 (1957).
143. Л. Н. Жукова, Регистрация мерцаний звезд фотоэлектрическим методом, Изв. ГАО АН СССР 21, вып. 3 (№ 162), 72 (1958).
144. G. Keller, The relation between the structure of stellar shadow patterns and stellar scintillations, JOSA 45, № 10, 845 (1955).
145. Л. Н. Жукова, Наблюдения мерцания звезд на телескопе АСИ-5 в Пулкове, Труды совещания по исследованию мерцания звезд, Изд-во АН СССР, 1959.
146. M. A. Ellison, H. Seddon, Some experiments on the scintillation of stars and planets, Monthly Notices Roy. Astron. Soc. 112, № 1, 73 (1952).
147. Ph. Varnhart, The photoelectric determination of the direction and velocity of motion of the scintillation layer, Contribs. Perkins Observ. 2, № 6, 84 (1955).
148. В. И. Татарский, Л. Н. Жукова, О хроматическом мерцании звезд, ДАН СССР 124, № 3, 567 (1959).
149. J. M. Pernter, F. M. Exner, Meteorologische Optik, Wien/Leipzig, 1910.
150. И. Г. Колчинский, Об амплитуде дрожания изображений звезд в телескопах в зависимости от зенитного расстояния, Астрон. ж. 29, вып. 3, 350 (1952).
151. И. Г. Колчинский, Некоторые результаты наблюдений дрожания изображений звезд на площадке ГАО АН УССР в Голосееве, Астрон. ж. 34, вып. 4, 638 (1957).
152. О. А. Мельников, И. Г. Колчинский, Н. И. Кучеров, Мерцание и дрожание изображений звезд. Астроклимат, Труды совещания по исследованию мерцания звезд, Изд-во АН СССР, 1959.

153. А. Х. Д а р ч я, Л. Ф. Ч м и л ь, Ш. П. Д а р ч я, Исследование дрожания звезд в экспедициях 1956—1958 гг., Изв. ГАО АН СССР 21, вып. 6 (№ 165), 52 (1960).
154. И. Г. К о л ч и н с к и й, Автокорреляционная функция пульсаций углов прихода световых лучей по наблюдениям дрожания изображений звезд, Изв. ГАО АН УССР 4, вып. 1, 13 (1961).
155. R. C. B o u r g e t, Propagation of randomly perturbed fields, Canad. J. Phys. 40, № 6, 782 (1962).
156. R. C. B o u r g e t, Stochastically perturbed fields with applications to wave propagation in random media, Nuovo Cim. 26, № 1, (1962).
157. К. F u r u t s u, On the statistical theory of electromagnetic waves in a fluctuating medium, J. Res. NBS D67, № 3, 303 (1963).
158. В. И. Т а т а р с к и й, М. Е. Г е р ц е н ш т е й н, Распространение волн в среде с сильными флуктуациями показателя преломления, ЖЭТФ 44, вып. 2, 676 (1963).
159. В. И. Т а т а р с к и й, Распространение электромагнитных волн в среде с сильными флуктуациями диэлектрической проницаемости, ЖЭТФ, 46, вып. 4, 1399 (1964).
160. И. М. Л и ф ш и ц, М. И. К а г а н о в, В. М. Ц у к е р н и к, Распространение электромагнитных колебаний в неоднородных анизотропных средах, Учен. зап. Харьковского ун-та 2, 41 (1950).
161. Ф. Г. Б а с с, О тензоре эффективной диэлектрической проницаемости в среде со случайными неоднородностями, Изв. вузов (Радиофизика) 2, № 6, 1015 (1959).
162. J. V. K e l l e r, Wave propagation in random media, Proc. of Symp. in Appl. Math., vol. 13, Hydrodynamic Instability, 1962. (См. перевод: Д ж о з е ф Б. К е л л е р, Распространение волн в случайной среде, в книге: «Гидродинамическая неустойчивость», изд-во «Мир», 1964, стр. 265.)
163. В. И. Т а т а р с к и й, О первообразном функционале и его применении к интегрированию некоторых уравнений в вариационных производных, УМН 16, вып. 4, 179 (1961).
164. А. С. М о н и н, А. М. Я г л о м, Статистическая гидромеханика, ч. I, «Наука», 1965.
165. С. М. Р ы т о в, Теория электрических флуктуаций и теплового излучения, Изд-во АН СССР, 1953.
166. R. A. S i l v e r m a n, Locally stationary random processes, IRE Trans. Inform. Theory 3, № 3, 182 (1957).
167. L. O n s a g e r, Statistical hydrodynamic, Nuovo Cim. Suppl. 6, № 2, 279 (1949).
168. С. F. W e i z s ä c k e r, Das Spektrum der Turbulenz bei grossen Reynolds'schen Zahlen, Z. Phys. 124, 614 (1948).
169. W. H e i s e n b e r g, Zur statistischen Theorie der Turbulenz, Z. Phys. 124, № 7—12, 628 (1948).
170. М. Е. Г р а ч е в а, А. С. Г у р в и ч, О сильных флуктуациях интенсивности света при распространении в приземном слое атмосферы, Изв. вузов (Радиофизика) 8, № 4, 717 (1965).
171. А. С. Г у р в и ч, А. И. К о н, Зависимость мерцания от размеров источника света, Изв. вузов (Радиофизика) 7, № 4, 790 (1964).
172. J. R a t c l i f f e, Reports. Progr. Phys. 19, 188 (1956). (Перевод: Дж. Р а т к л и ф ф, Некоторые вопросы дифракции и их применение к ионосфере, ПСФ № 10, 5 (1957).)
173. М. А. К а л л и с т р а т о в а, О флуктуациях угла прихода световых волн в атмосфере в конвективных условиях, Изв. вузов (Радиофизика) (в печати).

174. M. M. Gibson, Spectra of turbulence at high Reynolds number, *Nature* 195, № 4848, 281 (1962).
175. В. М. Финкельберг, Диэлектрическая проницаемость смесей, *ЖТФ* 34, вып. 3, 509 (1964).
176. Ю. А. Рыжов, В. В. Тамойкин, В. И. Татарский, О пространственной дисперсии неоднородных сред, *ЖЭТФ* 48, вып. 2, 656 (1965).
177. Ю. А. Рыжов, Тензор эффективной диэлектрической проницаемости сильно-неоднородной анизотропной среды, *Изв. вузов (Радиофизика)* 9, № 1, 39 (1966).
178. В. И. Татарский, О сильных флуктуациях параметров световой волны в турбулентной среде, *ЖЭТФ* 49, вып. 5, 1581 (1965).
179. И. В. Андреев, Электрон в случайном поле, *ЖЭТФ* 48, вып. 5, 1437 (1965).
180. И. В. Андреев, К теории распространения волн в среде со случайными неоднородностями, Препринт ФИАН, М., 1965.
181. В. И. Татарский, О сильных флуктуациях амплитуды волны, распространяющейся в среде со слабыми случайными неоднородностями, *Изв. вузов (Радиофизика)* 10, № 1 (1967).
182. М. Е. Грачева, Исследование статистических свойств сильных флуктуаций интенсивности света при распространении в приземном слое атмосферы, *Изв. вузов (Радиофизика)* (в печати).
183. S. Pond, R. W. Stewart, R. W. Burling, Turbulence Spectra in the wind over waves, *J. Atmosph. Sci.* 20, № 4, 319 (1963).
184. А. С. Гурвич, М. А. Каллистратова, Экспериментальное исследование флуктуаций угла прихода света в условиях сильных флуктуаций интенсивности, *Изв. вузов (Радиофизика)* (в печати).
185. А. С. Молин, А. М. Яглом, Статистическая гидромеханика, ч. 2, изд.-во «Наука» (в печати).